

El examen consta de **4 preguntas de respuesta obligatoria, puntuadas cada una con 2,5 puntos**: la primera sin apartados optativos y las tres siguientes con posibilidad de elección entre apartados.

PREGUNTA 1. ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD. (2,5 puntos)

CONTEXTO

Algunas pruebas médicas resultan ser «positivas» o «negativas». Si la prueba fuese infalible, «positiva» indicaría que la persona examinada tiene la enfermedad en cuestión; «negativa» indicaría que no la tiene. Una guionista está escribiendo, para una conocida plataforma de *streaming*, una historia que tiene lugar en un país imaginario. Explica en su guion que, para detectar una rara enfermedad que afecta a 1 de cada 10000 personas, una empresa farmacéutica logra desarrollar una prueba que resulta ser muy fiable, pues solamente 1 de cada 100 personas libres de la enfermedad obtiene un resultado positivo, y solamente 2 de cada 100 personas que padecen la enfermedad obtienen resultados negativos. Dice también que los detalles que revelan el diseño de la prueba están protegidos por varios sistemas de seguridad, y que, el 9 de agosto de 2024, la clave que permite abrir el último de esos sistemas es el número 219, el cual se ha calculado, específicamente para ese día, de la siguiente manera:

Clave = n.º de ríos cuya longitud en metros comienza con el dígito 9,
de entre los 2000 más largos del país = 219.

Poco antes de entregar su guion, le surgen dudas acerca de la verosimilitud de sus cifras, conque decide compartirlas con una amiga matemática. Esta le dice que le responderá una vez que calcule las siguientes probabilidades:

- P_1 = la probabilidad de que una persona con una prueba positiva tenga la enfermedad.
- P_2 = la probabilidad de que una persona con una prueba negativa tenga la enfermedad.
- P_3 = la probabilidad de que 219 ríos o más tengan una longitud en metros cuyo primer dígito sea el 9.

Con relación a este punto, la amiga matemática observa que, en muchos conjuntos de datos reales, los primeros dígitos no se distribuyen de manera uniforme, sino que siguen la llamada ley de Benford, la cual afirma que la probabilidad de que un número comience con el dígito d es $p = \log_{10}(1 + 1/d)$. Por ello, supondrá que la probabilidad de que un río tenga una longitud en m cuyo primer dígito sea el 9 es $p = 0.0458$.

Responda estos tres apartados: 1.1., 1.2. y 1.3.

- 1.1.** Calcule P_1 y P_2 . Entienda que los únicos resultados posibles de la prueba son «positivo» o «negativo». **(0,5 + 0,5 = 1 punto)**
- 1.2.** Calcule P_3 . **(1 punto)**
- 1.3.** En función de los valores de P_1 , P_2 y P_3 , dé al menos un motivo por el cual la guionista debería modificar alguna de sus cifras. No es necesario que diga cuáles deberían ser esas modificaciones ni cómo deberían ser efectuadas. **(0,5 puntos)**

PREGUNTA 2. NÚMEROS Y ÁLGEBRA. (2,5 puntos)

Responda uno de estos dos apartados: 2.1. o 2.2.

2.1. Responda los dos subapartados siguientes, considerando este sistema lineal:

$$\begin{cases} (m+1)x & + & z = 1, \\ (m+1)x + y & + & z = m+1, \\ (m+1)x + my & + & (m-1)z = m. \end{cases}$$

2.1.1. Discuta el sistema en función del valor del parámetro real m . **(2 puntos)**

2.1.2. Si es posible, resuélvalo en el caso $m = 0$. **(0,5 puntos)**

2.2. Responda los dos subapartados siguientes:

2.2.1. Calcule A si $(AB)^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. **(1 punto)**

2.2.2. Si $A = \begin{pmatrix} 3 & x \\ y & z \end{pmatrix}$ es invertible, obtenga los valores de x , y y z sabiendo que

$\det(A - 3I) = 0$, que $y \neq 0$ y que $(3z)A^{-1} + I = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$. Entiéndase que I es la matriz identidad. **(1,5 puntos)**

PREGUNTA 3. ANÁLISIS. (2,5 puntos)

Responda uno de estos dos apartados: **3.1. o 3.2.**

3.1. Responda los dos subapartados siguientes:

3.1.1. Enuncie los teoremas de Rolle y del valor medio del cálculo diferencial. **(1,25 puntos)**

3.1.2. Explique si $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, está o no en las hipótesis del teorema del valor medio del cálculo diferencial. En caso de que lo esté, calcule un valor c para el cual se cumpla la tesis de ese teorema. **(0,75 + 0,5 = 1,25 puntos)**

3.2. Responda los dos subapartados siguientes:

3.2.1. Calcule mediante cambio de variable las siguientes integrales:

3.2.1.1. $\int (\sin x)^5 \cos x dx$. **(0,5 puntos)**

3.2.1.2. $\int (\ln x) / x dx$. **(0,5 puntos)**

3.2.2. Calcule $\int (\ln x) / x dx$ empleando el método de integración por partes. Luego, obtenga algún valor de B tal que $\int_e^B (\ln x) / x dx = 3/2$. **(1 + 0,5 = 1,5 puntos)**

PREGUNTA 4. GEOMETRÍA. (2,5 puntos)

Responda uno de estos dos apartados: **4.1. o 4.2.**

4.1. Responda los dos subapartados siguientes:

4.1.1. Se consideran $\pi: ax + y + z = 1$, donde a es un parámetro real, y $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{3}$.

4.1.1.1. Estudie la posición relativa del plano π y la recta r en función de a . **(0,5 puntos)**

4.1.1.2. Obtenga el valor de a que hace que π y r sean perpendiculares. **(0,5 puntos)**

4.1.1.3. Razone si r puede estar contenida en π o no. **(0,5 puntos)**

4.1.2. Si π es el plano de ecuación $-3x + y + z = 1$, diga qué valor debe tomar el parámetro real b para que la recta $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y-b}{3} = \frac{z+1}{3}$ esté contenida en π . **(1 punto)**

4.2. Responda los dos subapartados siguientes, donde π es el plano de ecuación $2x - y + z = 1$:

4.2.1. Calcule la distancia de π al punto de corte de las rectas

$r_1: \begin{cases} x = 2 + \lambda, \\ y = 0 \\ z = -1 - \lambda \end{cases}$, y $r_2: \begin{cases} x = \mu, \\ y = -1 + \mu, \\ z = 0. \end{cases}$ ($\lambda, \mu \in \mathbb{R}$). **(1,25 puntos)**

4.2.2. Obtenga el punto simétrico de $P(1,0,0)$ con respecto a π . **(1,25 puntos)**

SOLUCIONES

PREGUNTA 1. ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD. (2,5 puntos)**CONTEXTO**

Algunas pruebas médicas resultan ser «positivas» o «negativas». Si la prueba fuese infalible, «positiva» indicaría que la persona examinada tiene la enfermedad en cuestión; «negativa» indicaría que no la tiene. Una guionista está escribiendo, para una conocida plataforma de *streaming*, una historia que tiene lugar en un país imaginario. Explica en su guion que, para detectar una rara enfermedad que afecta a 1 de cada 10000 personas, una empresa farmacéutica logra desarrollar una prueba que resulta ser muy fiable, pues solamente 1 de cada 100 personas libres de la enfermedad obtiene un resultado positivo, y solamente 2 de cada 100 personas que padecen la enfermedad obtienen resultados negativos. Dice también que los detalles que revelan el diseño de la prueba están protegidos por varios sistemas de seguridad, y que, el 9 de agosto de 2024, la clave que permite abrir el último de esos sistemas es el número 219, el cual se ha calculado, específicamente para ese día, de la siguiente manera:

Clave = n.º de ríos cuya longitud en metros comienza con el dígito 9,
de entre los 2000 más largos del país = 219.

Poco antes de entregar su guion, le surgen dudas acerca de la verosimilitud de sus cifras, conque decide compartirlas con una amiga matemática. Esta le dice que le responderá una vez que calcule las siguientes probabilidades:

- P_1 = la probabilidad de que una persona con una prueba positiva tenga la enfermedad.
- P_2 = la probabilidad de que una persona con una prueba negativa tenga la enfermedad.
- P_3 = la probabilidad de que 219 ríos o más tengan una longitud en metros cuyo primer dígito sea el 9.

Con relación a este punto, la amiga matemática observa que, en muchos conjuntos de datos reales, los primeros dígitos no se distribuyen de manera uniforme, sino que siguen la llamada ley de Benford, la cual afirma que la probabilidad de que un número comience con el dígito d es $p = \log_{10}(1 + 1/d)$. Por ello, supondrá que la probabilidad de que un río tenga una longitud en m cuyo primer dígito sea el 9 es $p = 0.0458$.

Responda estos tres apartados: 1.1., 1.2. y 1.3.

- 1.1.** Calcule P_1 y P_2 . Entienda que los únicos resultados posibles de la prueba son «positivo» o «negativo». **(0,5 + 0,5 = 1 punto)**
- 1.2.** Calcule P_3 . **(1 punto)**
- 1.3.** En función de los valores de P_1 , P_2 y P_3 , dé al menos un motivo por el cual la guionista debería modificar alguna de sus cifras. No es necesario que diga cuáles deberían ser esas modificaciones ni cómo deberían ser efectuadas. **(0,5 puntos)**

Respuestas

1.1. Consideramos los sucesos A = “padecer la enfermedad”, P = “Dar positivo en la prueba”, por lo que $\bar{A}$ = “No padecer la enfermedad” y $\bar{P}$ = “Dar negativo en la prueba”.

Sabemos que $P(A) = \frac{1}{10000} = 0.0001$ y $P(\bar{A}) = 1 - 0.0001 = 0.9999$.

“1 de cada 100 personas libres de la enfermedad obtiene un resultado positivo” $\rightarrow$

$$P(P / \bar{A}) = \frac{1}{100} = 0.01.$$

“2 de cada 100 personas que padecen la enfermedad obtienen resultados negativos” $\rightarrow$

$$P(\bar{P} / A) = \frac{2}{100} = 0.02.$$

Debemos calcular $P(P_1) = P(A/P)$.

Calculamos antes la probabilidad de dar positivo en la prueba: $P(P)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(P) = P(A)P(P/A) + P(\bar{A})P(P/\bar{A}) = 0.0001 \cdot (1 - 0.02) + 0.9999 \cdot 0.01 = 0.010097$$

Calculamos la probabilidad de P_1 .

$$\begin{aligned} P(P_1) = P(A/P) &= \frac{P(A \cap P)}{P(P)} = \frac{P(A)P(P/A)}{P(P)} = \frac{P(A)[1 - P(\bar{P}/A)]}{P(P)} = \\ &= \frac{0.0001 \cdot (1 - 0.02)}{0.010097} = \frac{98}{10097} \approx 0.0097 \end{aligned}$$

También debemos calcular $P(P_2) = P(A/\bar{P})$.

$$\begin{aligned} P(P_2) = P(A/\bar{P}) &= \frac{P(A \cap \bar{P})}{P(\bar{P})} = \frac{P(A)P(\bar{P}/A)}{1 - P(P)} = \\ &= \frac{0.0001 \cdot 0.02}{1 - 0.010097} = \frac{2}{989903} \approx 0.000002 \end{aligned}$$

1.2. $d = 9$ y $p = \log_{10}(1 + 1/9) \approx 0.0458$

Consideramos la variable binomial X = “Número de ríos cuya longitud (en metros) empiece por 9”. $X = B(2000, 0.0458)$

Aproximamos los valores de la binomial con una normal de media $np = 2000 \cdot 0.0458 = 91.6$ y desviación típica $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{2000 \cdot 0.0458 \cdot (1 - 0.0458)} \approx 9.35$.

La variable binomial X se aproxima con una variable normal $Y = N(91.6, 9.35)$.

Calculamos $P(P_3) = P(X \geq 219)$.

$$\begin{aligned} P(P_3) = P(X \geq 219) &= \{\text{Corrección de Yates}\} = P(Y \geq 218.5) = \{\text{Tipificamos}\} = \\ &= P\left(Z \geq \frac{218.5 - 91.6}{9.35}\right) = P(Z \geq 13.57) = 1 - P(Z \leq 13.57) = 1 - 1 = 0 \end{aligned}$$

1.3. El dato de que hay 219 ríos cuya longitud en metros comienza con el dígito 9, de entre los 2000 más largos del país no es creíble. Debería cambiar esa forma de obtener la clave que no es correcta.

2.1. Responda los dos subapartados siguientes, considerando este sistema lineal:

$$\begin{cases} (m+1)x + z = 1, \\ (m+1)x + y + z = m+1, \\ (m+1)x + my + (m-1)z = m. \end{cases}$$

2.1.1. Discuta el sistema en función del valor del parámetro real m . **(2 puntos)**

2.1.2. Si es posible, resuélvalo en el caso $m = 0$. **(0,5 puntos)**

2.1.1. La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A = \begin{pmatrix} m+1 & 0 & 1 \\ m+1 & 1 & 1 \\ m+1 & m & m-1 \end{pmatrix}$, y la matriz

ampliada es $A/B = \begin{pmatrix} m+1 & 0 & 1 & 1 \\ m+1 & 1 & 1 & m+1 \\ m+1 & m & m-1 & m \end{pmatrix}$

Averiguamos cuando se anula el determinante de la matriz A .

$$|A| = \begin{vmatrix} m+1 & 0 & 1 \\ m+1 & 1 & 1 \\ m+1 & m & m-1 \end{vmatrix} = (m+1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & m-1 \end{vmatrix} = (m+1)[m-1+m-1-m] = (m+1)(m-2)$$

$$|A| = 0 \Rightarrow (m+1)(m-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m+1 = 0 \rightarrow m = -1 \\ m-2 = 0 \rightarrow m = 2 \end{cases}$$

Analizamos tres casos por separado.

CASO 1. $m \neq -1$ y $m \neq 2$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada A/B y el número de incógnitas. El sistema es **compatible determinado** (una única solución).

CASO 2. $m = -1$

El determinante de A es nulo. El sistema queda tan sencillo que lo resolvemos.

$$\begin{cases} \boxed{z=1} \\ y+z=0 \\ -y-2z=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y+1=0 \rightarrow \boxed{y=-1} \\ -y-2=-1 \rightarrow y=-1 \end{cases}$$

$$\text{Soluciones: } \begin{cases} x=t \\ y=-1, \quad t \in \mathbb{R} \\ z=1 \end{cases}$$

El sistema es **compatible indeterminado** (infinitas soluciones)

CASO 3. $m = 2$

El determinante de A es nulo y su rango no es 3. Estudiamos el rango de A y de A/B usando el método de Gauss para obtener una matriz triangular equivalente.

$$A/B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 1^a \\ 3 \quad 2 \quad 1 \quad 2 \\ -3 \quad 0 \quad -1 \quad -1 \\ \hline 0 \quad 2 \quad 0 \quad 1 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - \text{Fila } 1^a \\ 3 \quad 1 \quad 1 \quad 3 \\ -3 \quad 0 \quad -1 \quad -1 \\ \hline 0 \quad 1 \quad 0 \quad 2 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - 2 \cdot \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad 2 \quad 0 \quad 1 \\ 0 \quad -2 \quad 0 \quad -4 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad -3 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{c} \overbrace{\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}}^{A/B} \\ \underbrace{\hspace{1.5cm}}_A \end{array} \right)$$

El rango de A es 2 y el de A/B es 3. Los rangos son distintos y el sistema es **incompatible**.

Resumiendo: Si $m \neq -1$ y $m \neq 2$ el sistema es compatible determinado, si $m = -1$ el sistema es compatible indeterminado y si $m = 2$ el sistema es incompatible.

2.1.2. Para $m = 0$ el sistema es compatible determinado. Obtenemos su solución.

$$\begin{cases} x + z = 1, \\ x + y + z = 1, \\ x - z = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + z = 1, \\ x + y + z = 1, \\ x = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z + z = 1 \rightarrow 2z = 1 \rightarrow \boxed{z = \frac{1}{2}} \\ z + y + z = 1 \rightarrow 2z + y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 + y = 1 \Rightarrow \boxed{y = 0} \\ \boxed{x = \frac{1}{2}} \end{cases}$$

La solución del sistema es $x = z = \frac{1}{2}$, $y = 0$.

2.2. Responda los dos subapartados siguientes:

2.2.1. Calcule A si $(AB)^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. **(1 punto)**

2.2.2. Si $A = \begin{pmatrix} 3 & x \\ y & z \end{pmatrix}$ es invertible, obtenga los valores de x , y y z sabiendo que

$\det(A - 3I) = 0$, que $y \neq 0$ y que $(3z)A^{-1} + I = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$. Entiéndase que I es la matriz identidad. **(1,5 puntos)**

2.2.1.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow AB = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b & a+b \\ c-d & c+d \end{pmatrix}$$

$$(AB)^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a-b & c-d \\ a+b & c+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a-b=1 \\ c-d=0 \\ a+b=2 \\ c+d=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=b+1 \\ c=d \\ a+b=2 \\ c+d=1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b+1+b=2 \rightarrow 2b=1 \rightarrow \boxed{b=\frac{1}{2}} \\ d+d=1 \rightarrow 2d=1 \rightarrow \boxed{d=\frac{1}{2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{a=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}} \\ \boxed{c=\frac{1}{2}} \end{cases} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 3/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

2.2.2. Se cumple que $\det(A - 3I) = 0$.

$$A - 3I = \begin{pmatrix} 3 & x \\ y & z \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & x \\ y & z-3 \end{pmatrix}$$

$$\det(A - 3I) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & x \\ y & z-3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -xy = 0 \Rightarrow \{y \neq 0\} \Rightarrow \boxed{x=0}$$

La matriz A queda $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ y & z \end{pmatrix}$. Se cumple que $(3z)A^{-1} + I = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$.

$$(3z)A^{-1} + I = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow (3z)A^{-1}A + I \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} A \Rightarrow (3z)I + A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} A \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (3z) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ y & z \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 3z & 0 \\ 0 & 3z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ -3+4y & 4z \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 3+3z & 0 \\ y & 4z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ -3+4y & 4z \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3+3z=6 \rightarrow 3z=3 \rightarrow \boxed{z=1} \\ 0=0 \\ y=-3+4y \rightarrow 3=3y \rightarrow \boxed{y=1} \\ 4z=4z \end{cases}$$

Los valores buscados son $x = 0, y = 1, z = 1$.

3.1. Responda los dos subapartados siguientes:

3.1.1. Enuncie los teoremas de Rolle y del valor medio del cálculo diferencial. **(1,25 puntos)**

3.1.2. Explique si $f:[0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, está o no en las hipótesis del teorema del valor medio del cálculo diferencial. En caso de que lo esté, calcule un valor c para el cual se cumpla la tesis de ese teorema. **(0,75 + 0,5 = 1,25 puntos)**

3.1.1. En cualquier libro de texto.

3.1.2. Para que sea aplicable el teorema del valor medio la función debe ser continua en $[0,1]$ y derivable en $(0,1)$.

El dominio de la función es $[0,1]$. La función es continua pues la raíz existe en el intervalo del dominio. La derivada de la función es $f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$. La función también es derivable en $(0,1)$.

Se puede aplicar el teorema del valor medio y podemos afirmar que existe $c \in (0,1)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0}.$$

Buscamos el valor c que cumple lo anterior.

$$\left. \begin{array}{l} f'(c) = \frac{-c}{\sqrt{1-c^2}} \\ f(0) = \sqrt{1-0^2} = 1 \\ f(1) = \sqrt{1-1^2} = 0 \\ f'(c) = \frac{f(1) - f(0)}{1-0} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{-c}{\sqrt{1-c^2}} = \frac{0-1}{1-0} \Rightarrow \frac{-c}{\sqrt{1-c^2}} = -1 \Rightarrow -c = -\sqrt{1-c^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c = \sqrt{1-c^2} \Rightarrow c^2 = (\sqrt{1-c^2})^2 \Rightarrow c^2 = 1-c^2 \Rightarrow 2c^2 = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{c = \sqrt{\frac{1}{2}} \approx 0.707} \in (0,1)$$

El valor c que nos indica el teorema del valor medio que existe es $c = \sqrt{\frac{1}{2}} \approx 0.707$.

3.2. Responda los dos subapartados siguientes:

3.2.1. Calcule mediante cambio de variable las siguientes integrales:

3.2.1.1. $\int (\sin x)^5 \cos x dx$. **(0,5 puntos)**

3.2.1.2. $\int (\ln x) / x dx$. **(0,5 puntos)**

3.2.2. Calcule $\int (\ln x) / x dx$ empleando el método de integración por partes. Luego, obtenga algún valor de B tal que $\int_e^B (\ln x) / x dx = 3/2$. **(1 + 0,5 = 1,5 puntos)**

3.2.1.1. La primera integral

$$\int (\sin x)^5 \cos x dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Cambio de variable} \\ \sin x = t \rightarrow \cos x dx = dt \end{array} \right\} = \int t^5 dt = \frac{t^6}{6} = \boxed{\frac{(\sin x)^6}{6} + K}$$

3.2.1.2. La segunda integral

$$\int \frac{\ln x}{x} dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Cambio de variable} \\ \ln x = t \rightarrow \frac{1}{x} dx = dt \\ dx = x dt \end{array} \right\} = \int \frac{t}{x} x dt = \int t dt = \frac{t^2}{2} = \boxed{\frac{(\ln x)^2}{2} + K}$$

3.2.2. Usamos el método de integración por partes para obtener la expresión de la integral.

$$\int \frac{\ln x}{x} dx = \int \ln x \cdot \frac{1}{x} dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Por partes} \\ \ln x = u \rightarrow \frac{1}{x} dx = du \\ dv = \frac{1}{x} dx \rightarrow v = \int \frac{1}{x} dx = \ln x \end{array} \right\} = (\ln x)(\ln x) - \int \ln x \frac{1}{x} dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int \frac{\ln x}{x} dx = (\ln x)^2 - \int \ln x \frac{1}{x} dx \Rightarrow 2 \int \frac{\ln x}{x} dx = (\ln x)^2 \Rightarrow \int \frac{\ln x}{x} dx = \boxed{\frac{(\ln x)^2}{2} + K}$$

Calculamos la integral definida.

$$\int_e^B (\ln x) / x dx = \left[\frac{(\ln x)^2}{2} \right]_e^B = \left[\frac{(\ln B)^2}{2} \right] - \left[\frac{(\ln e)^2}{2} \right] = \frac{(\ln B)^2}{2} - \frac{1}{2}$$

Igualamos la expresión obtenida a 3/2 y determinamos el valor de B.

$$\int_e^B (\ln x) / x dx = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{(\ln B)^2}{2} - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{(\ln B)^2}{2} = \frac{4}{2} = 2 \Rightarrow (\ln B)^2 = 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln B = \sqrt{4} = \pm 2 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \ln B = 2 \rightarrow \boxed{B = e^2} \\ \ln B = -2 \rightarrow \boxed{B = e^{-2}} \end{array} \right.$$

Los valores buscados son $B = e^2$ y $B = e^{-2}$.

4.1. Responda los dos subapartados siguientes:

4.1.1. Se consideran $\pi: ax + y + z = 1$, donde a es un parámetro real, y $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{3}$.

4.1.1.1. Estudie la posición relativa del plano π y la recta r en función de a . **(0,5 puntos)**

4.1.1.2. Obtenga el valor de a que hace que π y r sean perpendiculares. **(0,5 puntos)**

4.1.1.3. Razone si r puede estar contenida en π o no. **(0,5 puntos)**

4.1.2. Si π es el plano de ecuación $-3x + y + z = 1$, diga qué valor debe tomar el parámetro real b para que la recta $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y-b}{3} = \frac{z+1}{3}$ esté contenida en π . **(1 punto)**

4.1.1.1. Obtenemos el vector director de la recta y el vector normal del plano.

$$\pi: ax + y + z = 1 \Rightarrow \vec{n} = (a, 1, 1)$$

$$r: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{3} \Rightarrow r: \begin{cases} \vec{v}_r = (2, 3, 3) \\ P_r(1, 0, -1) \end{cases}$$

Si los vectores son perpendiculares la recta y el plano son paralelos o la recta está contenida en el plano. En caso contrario son secantes (coinciden en un punto).

$$\left. \begin{array}{l} \vec{n} = (a, 1, 1) \\ \vec{v}_r = (2, 3, 3) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{n} \cdot \vec{v}_r = (a, 1, 1) \cdot (2, 3, 3) = 2a + 3 + 3 = 2a + 6$$

$$\vec{n} \cdot \vec{v}_r = 0 \Rightarrow 2a + 6 = 0 \Rightarrow 2a = -6 \Rightarrow \boxed{a = -3}$$

Analizamos que pasa si $a = -3$.

En este caso los vectores son perpendiculares y plano y recta son paralelos o la recta está contenida en el plano. Comprobamos si el punto $P_r(1, 0, -1)$ de la recta está en el plano.

$$\left. \begin{array}{l} \pi: -3x + y + z = 1 \\ \text{¿} P_r(1, 0, -1) \in \pi? \end{array} \right\} \Rightarrow \text{¿} -3 + 0 - 1 = 1? \text{ ¡¡No se cumple!!}$$

Para $a = -3$ la recta r y el plano π son paralelos.

Analizamos que pasa si $a \neq -3$.

Para $a \neq -3$ los vectores no son perpendiculares y la recta r y el plano π se cortan.

4.1.1.2. Buscamos para $a \neq -3$ un valor para el que recta y plano formen 90° . Para que esto ocurra deben tener coordenadas proporcionales el vector director de la recta y el vector normal del plano.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{n} = (a, 1, 1) \\ \vec{v}_r = (2, 3, 3) \\ \vec{n} \parallel \vec{v}_r \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{a}{2} = \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{a}{2} = \frac{1}{3} \Rightarrow \boxed{a = \frac{2}{3}}$$

Para $a = \frac{2}{3}$ recta y plano son secantes y además son perpendiculares.

4.1.1.3. La recta r solo puede ser paralela al plano ($a = -3$) o secante ($a \neq -3$).

La recta r no puede estar contenida en el plano.

4.1.2. Para que la recta esté contenida en el plano deben cumplirse dos condiciones: 1ª el vector director de la recta y el normal del plano deben ser perpendiculares, 2ª un punto de la recta debe pertenecer al plano.

$$\left. \begin{array}{l} \pi: -3x + y + z = 1 \rightarrow \vec{n} = (-3, 1, 1) \\ r: \frac{x-1}{2} = \frac{y-b}{3} = \frac{z+1}{3} \rightarrow \vec{u}_r = (2, 3, 3) \\ \vec{n} \perp \vec{u}_r \Rightarrow \vec{n} \cdot \vec{u}_r = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow (-3, 1, 1)(2, 3, 3) = 0 \Rightarrow -6 + 3 + 3 = 0 \text{ ¡¡Se cumple!!}$$

$$\left. \begin{array}{l} \pi: -3x + y + z = 1 \\ r: \frac{x-1}{2} = \frac{y-b}{3} = \frac{z+1}{3} \rightarrow P_r(1, b, -1) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow -3 + b - 1 = 1 \Rightarrow \boxed{b = 5}$$

El valor buscado es $b = 5$.

4.2. Responda los dos subapartados siguientes, donde π es el plano de ecuación $2x - y + z = 1$:

4.2.1. Calcule la distancia de π al punto de corte de las rectas

$$r_1 : \begin{cases} x = 2 + \lambda, \\ y = 0 \\ z = -1 - \lambda \end{cases}, \text{ y } r_2 : \begin{cases} x = \mu, \\ y = -1 + \mu, \\ z = 0. \end{cases} \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{R}). \quad (1,25 \text{ puntos})$$

4.2.2. Obtenga el punto simétrico de $P(1,0,0)$ con respecto a π . (1,25 puntos)

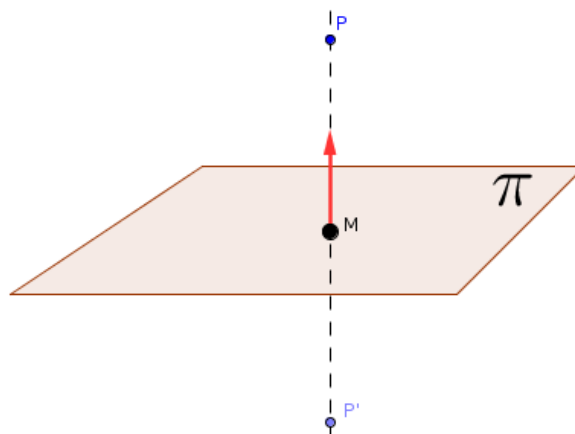
4.2.1. Averiguamos el punto P de corte de las dos rectas.

$$\begin{aligned} r_1 : \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 0 \\ z = -1 - \lambda \end{cases} & \Rightarrow \begin{cases} \mu = 2 + \lambda \\ -1 + \mu = 0 \rightarrow \boxed{\mu = 1} \\ 0 = -1 - \lambda \rightarrow \boxed{\lambda = -1} \end{cases} \Rightarrow 1 = 2 - 1 \text{ ¡Se cumple!} \Rightarrow \\ r_2 : \begin{cases} x = \mu \\ y = -1 + \mu \\ z = 0 \end{cases} & \\ \Rightarrow \begin{cases} x = 2 - 1 = 1 \\ y = 0 \\ z = -1 + 1 = 0 \end{cases} & \Rightarrow \boxed{P(1,0,0)} \end{aligned}$$

Hallamos la distancia del punto P al plano $\pi : 2x - y + z = 1$.

$$\left. \begin{array}{l} \pi : 2x - y + z - 1 = 0 \\ P(1,0,0) \end{array} \right\} \Rightarrow d(P, \pi) = \frac{|2 - 0 + 0 - 1|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6} \approx 0.408 \text{ unidades}$$

4.2.2. Nos piden hallar las coordenadas del punto P' del dibujo.



Hallamos la recta perpendicular al plano que pasa por el punto P. Esta recta tendrá como vector director el vector normal del plano.

$$\pi : 2x - y + z = 1 \Rightarrow \vec{n} = (2, -1, 1) \Rightarrow r : \begin{cases} \vec{v}_r = \vec{n} = (2, -1, 1) \\ P(1,0,0) \in r \end{cases} \Rightarrow r : \begin{cases} x = 1 + 2\alpha \\ y = -\alpha \\ z = \alpha \end{cases}$$

El punto M es la intersección de la recta r con el plano π .

$$\pi : 2x - y + z = 1$$

$$r : \begin{cases} x = 1 + 2\alpha \\ y = -\alpha \\ z = \alpha \end{cases} \Rightarrow 2(1 + 2\alpha) - (-\alpha) + \alpha = 1 \Rightarrow 2 + 4\alpha + \alpha + \alpha = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6\alpha = -1 \Rightarrow \alpha = -\frac{1}{6} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + 2 \cdot \frac{-1}{6} = \frac{2}{3} \\ y = -\frac{-1}{6} = \frac{1}{6} \\ z = \frac{-1}{6} \end{cases} \Rightarrow M\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{6}, \frac{-1}{6}\right)$$

El punto P' simétrico de P respecto del plano es el resultado de sumar al punto M el vector $\overrightarrow{PM}$.

$$\overrightarrow{PM} = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{6}, \frac{-1}{6}\right) - (1, 0, 0) = \left(\frac{-1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{-1}{6}\right)$$

$$P' = M + \overrightarrow{PM} = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{6}, \frac{-1}{6}\right) + \left(\frac{-1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{-1}{6}\right) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{-1}{3}\right)$$

El punto simétrico es $P'\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{-1}{3}\right)$