



**PROVA D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT**  
PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD



|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |                                   |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------|
| <b>CONVOCATÒRIA: MODEL 2025</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | <b>CONVOCATORIA: MODELO 2025</b>  |
| <b>Assignatura: MATEMÀTIQUES II</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | <b>Asignatura: MATEMÁTICAS II</b> |
| <b>BAREMO DEL EXAMEN: <i>Cada problema se puntuará hasta 2,5 puntos.</i></b><br>La calificación del ejercicio será la suma de las calificaciones de cada problema.<br>Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables, y que no puedan realizar cálculos simbólicos ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados.<br>A partir de la tercera falta de ortografía se deducirán -0,10 puntos hasta un máximo de un punto.<br>Por errores en la redacción, en la presentación, falta de coherencia, falta de cohesión, incorrección léxica e incorrección gramatical se podrá deducir un máximo de medio punto. |                                   |

**PREGUNTA 1: PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA (2,5 puntos)**

Una finca agrícola cultiva tres tipos de plantas que producen: tomates, pimientos y calabacines. Estas plantas son susceptibles de sufrir una plaga que puede afectar su rendimiento. La finca utiliza tres métodos de control de plagas: control biológico, pesticidas químicos y métodos orgánicos. La efectividad de cada método varía según el tipo de planta.

- El 50% del área está dedicada a tomates, el 30% a pimientos y el 20% a calabacines.
- Para los tomates, la finca utiliza control biológico en el 40% de la finca, pesticidas químicos en el 30% y métodos orgánicos en el 30%.
- Para los pimientos, la finca utiliza control biológico en el 30%, pesticidas químicos en el 40% y métodos orgánicos en el 30%.
- Para los calabacines, se utiliza control biológico en el 20%, pesticidas químicos en el 50% y métodos orgánicos en el 30%.

La efectividad de cada método de control para evitar la plaga, en porcentaje, es la siguiente:

- Para los tomates:
  - o El control biológico tiene un 85% de efectividad.
  - o Los pesticidas químicos tienen un 95% de efectividad.
  - o Los métodos orgánicos tienen un 80% de efectividad.
- Para los pimientos:
  - o El control biológico tiene un 80% de efectividad.
  - o Los pesticidas químicos tienen un 90% de efectividad.
  - o Los métodos orgánicos tienen un 75% de efectividad.
- Para los calabacines:
  - o El control biológico tiene un 70% de efectividad.
  - o Los pesticidas químicos tienen un 85% de efectividad.
  - o Los métodos orgánicos tienen un 65% de efectividad.

**Responda a todos los apartados**

- 1.1 **(0.75 puntos)** ¿Cuál es la probabilidad de que una planta seleccionada al azar en toda la finca esté libre de plagas (sin importar qué tipo de planta ni el método utilizado)?
- 1.2 **(0.75 puntos)** Si se sabe que una planta seleccionada está libre de plagas, ¿cuál es la probabilidad de que esa planta sea un pimiento?
- 1.3 **(1 punto)** Un consumidor compra 11 tomates que han sido controlados mediante métodos orgánicos. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos 3 de ellos hayan evitado los efectos de la plaga?

**PREGUNTA 2: ÁLGEBRA (2,5 puntos)****Responda al apartado 2.1 o al apartado 2.2**

2.1 Responda a todos los subapartados siguientes:

Sea el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x - y + az = -2 \\ -x + 2y - az = 3 \\ ax + y + z = 2 \end{cases}$$

donde  $a$  es un parámetro real. Obtener:

2.1.1 (1,25 puntos) Discutir del sistema en función del parámetro  $a$ .

2.1.2 (1,25 puntos) Las soluciones del sistema cuando éste sea compatible.

2.2 Responda a todos los subapartados siguientes:

Se dan las matrices  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  y  $U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

Obtener (con los cálculos intermedios necesarios, así como con la mención explícita de los teoremas o propiedades utilizados):

2.2.1 (1,25 puntos) Las matrices  $A^{-1}$  y  $B = A^3 - 3A^2 + 5A$ .

2.2.2 (1,25 puntos) Los valores  $\alpha$  y  $\beta$  tales que  $\alpha A^2 + \beta A + U = A^{-1}$ .

**PREGUNTA 3: GEOMETRÍA (2,5 puntos)****Responda al apartado 3.1 o al apartado 3.2**

3.1 Responda a todos los subapartados siguientes:

Dadas las rectas  $r: \begin{cases} y - z = 0 \\ 2x + 2 = 0 \end{cases}$  y  $s: \begin{cases} \frac{x-2}{-1} = \frac{y}{3} = z + 2 \end{cases}$ , obtener:

3.1.1 (1,25 puntos) La ecuación del plano  $\pi$  paralelo a ambas y que pase por el origen.

3.1.2 (1,25 puntos) La distancia de un punto de  $r$  y de un punto de  $s$  al plano  $\pi$ .

3.2 Responda a todos los subapartados siguientes:

Dadas la recta  $r$  y el plano  $\pi$ , de ecuaciones  $r = \frac{x-5}{1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{4}$  y  $\pi = ax + y - z = b$ , con  $a$  y  $b$  parámetros reales, obtener:

3.2.1 (1 punto) Los valores del parámetro  $a$  para los que  $r$  y  $\pi$  se cortan en un único punto y calcular las coordenadas de dicho punto en función del parámetro  $a$ .

3.2.2 (1,5 puntos) Los valores de  $a$  y  $b$  tales que la recta  $r$  esté contenida en el plano  $\pi$  y los valores de los parámetros para que la recta  $r$  no corte al plano  $\pi$ .

**PREGUNTA 4: ANÁLISIS (2,5 puntos)****Responda al apartado 4.1 o al apartado 4.2**

4.1 Responda a todos los subapartados siguientes:

Se dan las funciones polinómicas  $f(x) = -x^2 + x + 2$  y  $g(x) = x^2 - b$ , siendo  $b$  un parámetro real. Obtener:

4.1.1 **(1,25 puntos)** El valor de  $b$  para que uno de los puntos de intersección de las curvas  $y = -x^2 + x + 2$  e  $y = x^2 - b$  sea el punto  $P = (-1, 0)$ . Dibujad un esquema de las curvas  $y = -x^2 + x + 2$  e  $y = x^2 - 1$ .

4.1.2 **(1,25 puntos)** El área de la superficie finita encerrada entre las curvas  $y = -x^2 + x + 2$  e  $y = x^2 - 1$ .

4.2 Responda a todos los subapartados siguientes:

Una ventana Norman está formada por un rectángulo y un semicírculo. El semicírculo está apoyado sobre el lado horizontal superior del rectángulo, que coincide con el diámetro horizontal del semicírculo.

La base del rectángulo mide  $x$  y su altura mide  $y$ , por lo que el diámetro del semicírculo mide  $x$ .

Obtener:

4.2.1 **(1 punto)** La expresión  $S(x)$  que da el área de una ventana Norman de perímetro 5 metros en función de su anchura  $x$ .

4.2.2 **(1,5 puntos)** El valor de  $x$  para el que la función  $S(x)$  tenga un máximo relativo y el valor de dicha área máxima.

Tabla de la distribución Binomial (Bin(n,p))

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{k=0}^x \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

| n | k | p | 0,01   | 0,05   | 0,10   | 0,20   | 0,25   | 0,30   | 1/3    | 0,35   | 0,40   | 0,45   | 0,50   |
|---|---|---|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 1 | 0 |   | 0,9900 | 0,9500 | 0,9000 | 0,8000 | 0,7500 | 0,7000 | 0,6667 | 0,6500 | 0,6000 | 0,5500 | 0,5000 |
|   | 1 |   | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 |
| 2 | 0 |   | 0,9801 | 0,9025 | 0,8100 | 0,6400 | 0,5625 | 0,4900 | 0,4444 | 0,4225 | 0,3600 | 0,3025 | 0,2500 |
|   | 1 |   | 0,9999 | 0,9975 | 0,9900 | 0,9600 | 0,9375 | 0,9100 | 0,8889 | 0,8775 | 0,8400 | 0,7975 | 0,7500 |
|   | 2 |   | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 |
| 3 | 0 |   | 0,9703 | 0,8574 | 0,7290 | 0,5120 | 0,4219 | 0,3430 | 0,2963 | 0,2746 | 0,2160 | 0,1664 | 0,1250 |
|   | 1 |   | 0,9997 | 0,9928 | 0,9720 | 0,8960 | 0,8438 | 0,7840 | 0,7407 | 0,7183 | 0,6480 | 0,5748 | 0,5000 |
|   | 2 |   | 1,0000 | 0,9999 | 0,9990 | 0,9920 | 0,9844 | 0,9730 | 0,9630 | 0,9571 | 0,9360 | 0,9089 | 0,8750 |
|   | 3 |   | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 |
| 4 | 0 |   | 0,9606 | 0,8145 | 0,6561 | 0,4096 | 0,3164 | 0,2401 | 0,1975 | 0,1785 | 0,1296 | 0,0915 | 0,0625 |
|   | 1 |   | 0,9994 | 0,9860 | 0,9477 | 0,8192 | 0,7383 | 0,6517 | 0,5926 | 0,5630 | 0,4752 | 0,3910 | 0,3125 |
|   | 2 |   | 1,0000 | 0,9995 | 0,9963 | 0,9728 | 0,9492 | 0,9163 | 0,8889 | 0,8735 | 0,8208 | 0,7585 | 0,6875 |
|   | 3 |   | 1,0000 | 1,0000 | 0,9999 | 0,9984 | 0,9961 | 0,9919 | 0,9877 | 0,9850 | 0,9744 | 0,9590 | 0,9375 |
|   | 4 |   | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 |
| 5 | 0 |   | 0,9510 | 0,7738 | 0,5905 | 0,3277 | 0,2373 | 0,1681 | 0,1317 | 0,1160 | 0,0778 | 0,0503 | 0,0313 |
|   | 1 |   | 0,9990 | 0,9774 | 0,9185 | 0,7373 | 0,6328 | 0,5282 | 0,4609 | 0,4284 | 0,3370 | 0,2562 | 0,1875 |
|   | 2 |   | 1,0000 | 0,9988 | 0,9914 | 0,9421 | 0,8965 | 0,8369 | 0,7901 | 0,7648 | 0,6826 | 0,5931 | 0,5000 |
|   | 3 |   | 1,0000 | 1,0000 | 0,9995 | 0,9933 | 0,9844 | 0,9692 | 0,9547 | 0,9460 | 0,9130 | 0,8688 | 0,8125 |
|   | 4 |   | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 0,9997 | 0,9990 | 0,9976 | 0,9959 | 0,9947 | 0,9898 | 0,9815 | 0,9688 |
|   | 5 |   | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 |
| 6 | 0 |   | 0,9415 | 0,7351 | 0,5314 | 0,2621 | 0,1780 | 0,1176 | 0,0878 | 0,0754 | 0,0467 | 0,0277 | 0,0156 |
|   | 1 |   | 0,9985 | 0,9672 | 0,8857 | 0,6554 | 0,5339 | 0,4202 | 0,3512 | 0,3191 | 0,2333 | 0,1636 | 0,1094 |
|   | 2 |   | 1,0000 | 0,9978 | 0,9842 | 0,9011 | 0,8306 | 0,7443 | 0,6804 | 0,6471 | 0,5443 | 0,4415 | 0,3438 |
|   | 3 |   | 1,0000 | 0,9999 | 0,9987 | 0,9830 | 0,9624 | 0,9295 | 0,8999 | 0,8826 | 0,8208 | 0,7447 | 0,6563 |
|   | 4 |   | 1,0000 | 1,0000 | 0,9999 | 0,9984 | 0,9954 | 0,9891 | 0,9822 | 0,9777 | 0,9590 | 0,9308 | 0,8906 |
|   | 5 |   | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 0,9999 | 0,9998 | 0,9993 | 0,9986 | 0,9982 | 0,9959 | 0,9917 | 0,9844 |
|   | 6 |   | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 |
| 7 | 0 |   | 0,9321 | 0,6983 | 0,4783 | 0,2097 | 0,1335 | 0,0824 | 0,0585 | 0,0490 | 0,0280 | 0,0152 | 0,0078 |
|   | 1 |   | 0,9980 | 0,9556 | 0,8503 | 0,5767 | 0,4449 | 0,3294 | 0,2634 | 0,2338 | 0,1586 | 0,1024 | 0,0625 |
|   | 2 |   | 1,0000 | 0,9962 | 0,9743 | 0,8520 | 0,7564 | 0,6471 | 0,5706 | 0,5323 | 0,4199 | 0,3164 | 0,2266 |
|   | 3 |   | 1,0000 | 0,9998 | 0,9973 | 0,9667 | 0,9294 | 0,8740 | 0,8267 | 0,8002 | 0,7102 | 0,6083 | 0,5000 |
|   | 4 |   | 1,0000 | 1,0000 | 0,9998 | 0,9953 | 0,9871 | 0,9712 | 0,9547 | 0,9444 | 0,9037 | 0,8471 | 0,7734 |
|   | 5 |   | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 0,9996 | 0,9987 | 0,9962 | 0,9931 | 0,9910 | 0,9812 | 0,9643 | 0,9375 |
|   | 6 |   | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 0,9999 | 0,9998 | 0,9995 | 0,9994 | 0,9984 | 0,9963 | 0,9922 |
|   | 7 |   | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 |
| 8 | 0 |   | 0,9227 | 0,6634 | 0,4305 | 0,1678 | 0,1001 | 0,0576 | 0,0390 | 0,0319 | 0,0168 | 0,0084 | 0,0039 |
|   | 1 |   | 0,9973 | 0,9428 | 0,8131 | 0,5033 | 0,3671 | 0,2553 | 0,1951 | 0,1691 | 0,1064 | 0,0632 | 0,0352 |
|   | 2 |   | 0,9999 | 0,9942 | 0,9619 | 0,7969 | 0,6785 | 0,5518 | 0,4682 | 0,4278 | 0,3154 | 0,2201 | 0,1445 |
|   | 3 |   | 1,0000 | 0,9996 | 0,9950 | 0,9437 | 0,8862 | 0,8059 | 0,7414 | 0,7064 | 0,5941 | 0,4770 | 0,3633 |
|   | 4 |   | 1,0000 | 1,0000 | 0,9996 | 0,9896 | 0,9727 | 0,9420 | 0,9121 | 0,8939 | 0,8263 | 0,7396 | 0,6367 |
|   | 5 |   | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 0,9988 | 0,9958 | 0,9887 | 0,9803 | 0,9747 | 0,9502 | 0,9115 | 0,8555 |
|   | 6 |   | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 0,9999 | 0,9996 | 0,9987 | 0,9974 | 0,9964 | 0,9915 | 0,9819 | 0,9648 |
|   | 7 |   | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 0,9999 | 0,9998 | 0,9998 | 0,9993 | 0,9983 | 0,9961 |
|   | 8 |   | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 |
| 9 | 0 |   | 0,9135 | 0,6302 | 0,3874 | 0,1342 | 0,0751 | 0,0404 | 0,0260 | 0,0207 | 0,0101 | 0,0046 | 0,0020 |
|   | 1 |   | 0,9966 | 0,9288 | 0,7748 | 0,4362 | 0,3003 | 0,1960 | 0,1431 | 0,1211 | 0,0705 | 0,0385 | 0,0195 |
|   | 2 |   | 0,9999 | 0,9916 | 0,9470 | 0,7382 | 0,6007 | 0,4628 | 0,3772 | 0,3373 | 0,2318 | 0,1495 | 0,0898 |
|   | 3 |   | 1,0000 | 0,9994 | 0,9917 | 0,9144 | 0,8343 | 0,7297 | 0,6503 | 0,6089 | 0,4826 | 0,3614 | 0,2539 |
|   | 4 |   | 1,0000 | 1,0000 | 0,9991 | 0,9804 | 0,9511 | 0,9012 | 0,8552 | 0,8283 | 0,7334 | 0,6214 | 0,5000 |
|   | 5 |   | 1,0000 | 1,0000 | 0,9999 | 0,9969 | 0,9900 | 0,9747 | 0,9576 | 0,9464 | 0,9006 | 0,8342 | 0,7461 |
|   | 6 |   | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 0,9997 | 0,9987 | 0,9957 | 0,9917 | 0,9888 | 0,9750 | 0,9502 | 0,9102 |
|   | 7 |   | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 0,9999 | 0,9996 | 0,9990 | 0,9986 | 0,9962 | 0,9909 | 0,9805 |

|    |    |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |
|----|----|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
|    | 8  | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9997 | 0,9992 | 0,9980 |
|    | 9  | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 |
| 10 | 0  | 0,9044 | 0,5987 | 0,3487 | 0,1074 | 0,0563 | 0,0282 | 0,0173 | 0,0135 | 0,0060 | 0,0025 | 0,0010 |
|    | 1  | 0,9957 | 0,9139 | 0,7361 | 0,3758 | 0,2440 | 0,1493 | 0,1040 | 0,0860 | 0,0464 | 0,0233 | 0,0107 |
|    | 2  | 0,9999 | 0,9885 | 0,9298 | 0,6778 | 0,5256 | 0,3828 | 0,2991 | 0,2616 | 0,1673 | 0,0996 | 0,0547 |
|    | 3  | 1,0000 | 0,9990 | 0,9872 | 0,8791 | 0,7759 | 0,6496 | 0,5593 | 0,5138 | 0,3823 | 0,2660 | 0,1719 |
|    | 4  | 1,0000 | 0,9999 | 0,9984 | 0,9672 | 0,9219 | 0,8497 | 0,7869 | 0,7515 | 0,6331 | 0,5044 | 0,3770 |
|    | 5  | 1,0000 | 1,0000 | 0,9999 | 0,9936 | 0,9803 | 0,9527 | 0,9234 | 0,9051 | 0,8338 | 0,7384 | 0,6230 |
|    | 6  | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 0,9991 | 0,9965 | 0,9894 | 0,9803 | 0,9740 | 0,9452 | 0,8980 | 0,8281 |
|    | 7  | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 0,9999 | 0,9996 | 0,9984 | 0,9966 | 0,9952 | 0,9877 | 0,9726 | 0,9453 |
|    | 8  | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 0,9999 | 0,9996 | 0,9995 | 0,9983 | 0,9955 | 0,9893 |
|    | 9  | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 0,9999 | 0,9997 | 0,9990 |
|    | 10 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 |
| 11 | 0  | 0,8953 | 0,5688 | 0,3138 | 0,0859 | 0,0422 | 0,0198 | 0,0116 | 0,0088 | 0,0036 | 0,0014 | 0,0005 |
|    | 1  | 0,9948 | 0,8981 | 0,6974 | 0,3221 | 0,1971 | 0,1130 | 0,0751 | 0,0606 | 0,0302 | 0,0139 | 0,0059 |
|    | 2  | 0,9998 | 0,9848 | 0,9104 | 0,6174 | 0,4552 | 0,3127 | 0,2341 | 0,2001 | 0,1189 | 0,0652 | 0,0327 |
|    | 3  | 1,0000 | 0,9984 | 0,9815 | 0,8389 | 0,7133 | 0,5696 | 0,4726 | 0,4256 | 0,2963 | 0,1911 | 0,1133 |
|    | 4  | 1,0000 | 0,9999 | 0,9972 | 0,9496 | 0,8854 | 0,7897 | 0,7110 | 0,6683 | 0,5328 | 0,3971 | 0,2744 |
|    | 5  | 1,0000 | 1,0000 | 0,9997 | 0,9883 | 0,9657 | 0,9218 | 0,8779 | 0,8513 | 0,7535 | 0,6331 | 0,5000 |
|    | 6  | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 0,9980 | 0,9924 | 0,9784 | 0,9614 | 0,9499 | 0,9006 | 0,8262 | 0,7256 |
|    | 7  | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 0,9998 | 0,9988 | 0,9957 | 0,9912 | 0,9878 | 0,9707 | 0,9390 | 0,8867 |
|    | 8  | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 0,9999 | 0,9994 | 0,9986 | 0,9980 | 0,9941 | 0,9852 | 0,9673 |
|    | 9  | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 0,9999 | 0,9998 | 0,9993 | 0,9978 | 0,9941 |
|    | 10 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 0,9998 | 0,9995 |
|    | 11 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 |
| 12 | 0  | 0,8864 | 0,5404 | 0,2824 | 0,0687 | 0,0317 | 0,0138 | 0,0077 | 0,0057 | 0,0022 | 0,0008 | 0,0002 |
|    | 1  | 0,9938 | 0,8816 | 0,6590 | 0,2749 | 0,1584 | 0,0850 | 0,0540 | 0,0424 | 0,0196 | 0,0083 | 0,0032 |
|    | 2  | 0,9998 | 0,9804 | 0,8891 | 0,5583 | 0,3907 | 0,2528 | 0,1811 | 0,1513 | 0,0834 | 0,0421 | 0,0193 |
|    | 3  | 1,0000 | 0,9978 | 0,9744 | 0,7946 | 0,6488 | 0,4925 | 0,3931 | 0,3467 | 0,2253 | 0,1345 | 0,0730 |
|    | 4  | 1,0000 | 0,9998 | 0,9957 | 0,9274 | 0,8424 | 0,7237 | 0,6315 | 0,5833 | 0,4382 | 0,3044 | 0,1938 |
|    | 5  | 1,0000 | 1,0000 | 0,9995 | 0,9806 | 0,9456 | 0,8822 | 0,8223 | 0,7873 | 0,6652 | 0,5269 | 0,3872 |
|    | 6  | 1,0000 | 1,0000 | 0,9999 | 0,9961 | 0,9857 | 0,9614 | 0,9336 | 0,9154 | 0,8418 | 0,7393 | 0,6128 |
|    | 7  | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 0,9994 | 0,9972 | 0,9905 | 0,9812 | 0,9745 | 0,9427 | 0,8883 | 0,8062 |
|    | 8  | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 0,9999 | 0,9996 | 0,9983 | 0,9961 | 0,9944 | 0,9847 | 0,9644 | 0,9270 |
|    | 9  | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 0,9998 | 0,9995 | 0,9992 | 0,9972 | 0,9921 | 0,9807 |
|    | 10 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 0,9999 | 0,9997 | 0,9989 | 0,9968 |
|    | 11 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 0,9999 | 0,9998 |
|    | 12 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 |
| 13 | 0  | 0,8775 | 0,5133 | 0,2542 | 0,0550 | 0,0238 | 0,0097 | 0,0051 | 0,0037 | 0,0013 | 0,0004 | 0,0001 |
|    | 1  | 0,9928 | 0,8646 | 0,6213 | 0,2336 | 0,1267 | 0,0637 | 0,0385 | 0,0296 | 0,0126 | 0,0049 | 0,0017 |
|    | 2  | 0,9997 | 0,9755 | 0,8661 | 0,5017 | 0,3326 | 0,2025 | 0,1387 | 0,1132 | 0,0579 | 0,0269 | 0,0112 |
|    | 3  | 1,0000 | 0,9969 | 0,9658 | 0,7473 | 0,5843 | 0,4206 | 0,3224 | 0,2783 | 0,1686 | 0,0929 | 0,0461 |
|    | 4  | 1,0000 | 0,9997 | 0,9935 | 0,9009 | 0,7940 | 0,6543 | 0,5520 | 0,5005 | 0,3530 | 0,2279 | 0,1334 |
|    | 5  | 1,0000 | 1,0000 | 0,9991 | 0,9700 | 0,9198 | 0,8346 | 0,7587 | 0,7159 | 0,5744 | 0,4268 | 0,2905 |
|    | 6  | 1,0000 | 1,0000 | 0,9999 | 0,9930 | 0,9757 | 0,9376 | 0,8965 | 0,8705 | 0,7712 | 0,6437 | 0,5000 |
|    | 7  | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 0,9988 | 0,9944 | 0,9818 | 0,9653 | 0,9538 | 0,9023 | 0,8212 | 0,7095 |
|    | 8  | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 0,9998 | 0,9990 | 0,9960 | 0,9912 | 0,9874 | 0,9679 | 0,9302 | 0,8666 |
|    | 9  | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 0,9999 | 0,9993 | 0,9984 | 0,9975 | 0,9922 | 0,9797 | 0,9539 |
|    | 10 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 0,9999 | 0,9998 | 0,9997 | 0,9987 | 0,9959 | 0,9888 |
|    | 11 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 0,9999 | 0,9995 | 0,9983 |
|    | 12 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 0,9999 |
|    | 13 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 |

## Soluciones

### PREGUNTA 1: PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA (2,5 puntos)

Una finca agrícola cultiva tres tipos de plantas que producen: tomates, pimientos y calabacines. Estas plantas son susceptibles de sufrir una plaga que puede afectar su rendimiento. La finca utiliza tres métodos de control de plagas: control biológico, pesticidas químicos y métodos orgánicos. La efectividad de cada método varía según el tipo de planta.

- El 50% del área está dedicada a tomates, el 30% a pimientos y el 20% a calabacines.
- Para los tomates, la finca utiliza control biológico en el 40% de la finca, pesticidas químicos en el 30% y métodos orgánicos en el 30%.
- Para los pimientos, la finca utiliza control biológico en el 30%, pesticidas químicos en el 40% y métodos orgánicos en el 30%.
- Para los calabacines, se utiliza control biológico en el 20%, pesticidas químicos en el 50% y métodos orgánicos en el 30%.

La efectividad de cada método de control para evitar la plaga, en porcentaje, es la siguiente:

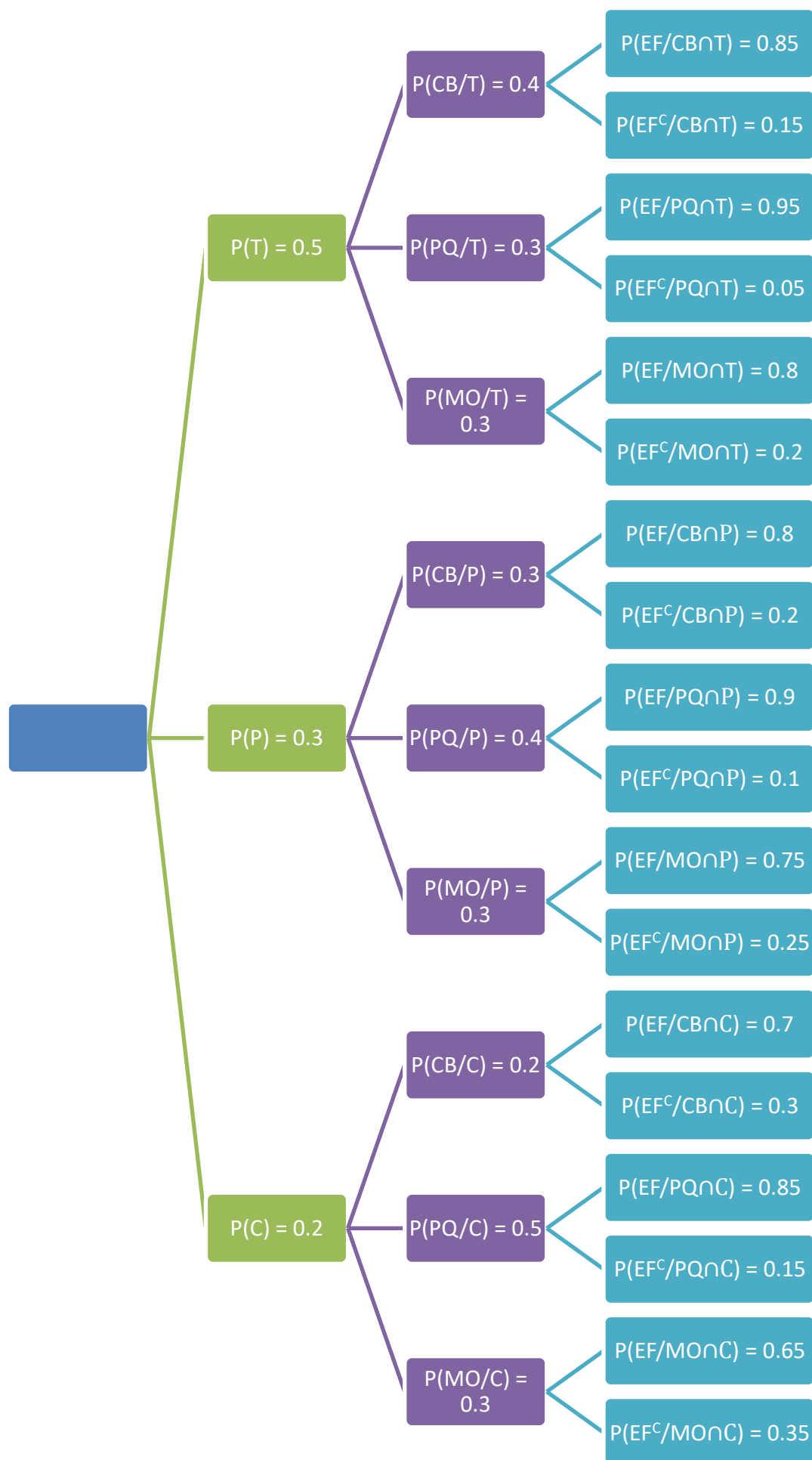
- Para los tomates:
  - o El control biológico tiene un 85% de efectividad.
  - o Los pesticidas químicos tienen un 95% de efectividad.
  - o Los métodos orgánicos tienen un 80% de efectividad.
- Para los pimientos:
  - o El control biológico tiene un 80% de efectividad.
  - o Los pesticidas químicos tienen un 90% de efectividad.
  - o Los métodos orgánicos tienen un 75% de efectividad.
- Para los calabacines:
  - o El control biológico tiene un 70% de efectividad.
  - o Los pesticidas químicos tienen un 85% de efectividad.
  - o Los métodos orgánicos tienen un 65% de efectividad.

### Responda a todos los apartados

- 1.1 (0.75 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que una planta seleccionada al azar en toda la finca esté libre de plagas (sin importar qué tipo de planta ni el método utilizado)?
- 1.2 (0.75 puntos) Si se sabe que una planta seleccionada está libre de plagas, ¿cuál es la probabilidad de que esa planta sea un pimiento?
- 1.3 (1 punto) Un consumidor compra 11 tomates que han sido controlados mediante métodos orgánicos. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos 3 de ellos hayan evitado los efectos de la plaga?

Llamamos  $T$  = “la planta produce tomates”,  $P$  = “la planta produce pimientos”,  $C$  = “la planta produce calabacines”,  $CB$  = “la planta es tratada con control biológico”,  $PQ$  = “la planta es tratada con pesticidas químicos”,  $MO$  = “la planta es tratada con métodos orgánicos” y  $EF$  = “el tratamiento es efectivo y la planta está libre de plagas”

Realizamos un diagrama de árbol.



1.1 Nos piden calcular  $P(EF)$ . Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$\begin{aligned}
 P(EF) &= P(T)P(CB/T)P(EF/(CB \cap T)) + P(T)P(PQ/T)P(EF/(PQ \cap T)) + \\
 &+ P(T)P(MO/T)P(EF/(MO \cap T)) + P(P)P(CB/P)P(EF/(CB \cap P)) + \\
 &+ P(P)P(PQ/P)P(EF/(PQ \cap P)) + \\
 &+ P(P)P(MO/P)P(EF/(MO \cap P)) + P(C)P(CB/C)P(EF/(CB \cap C)) + \\
 &+ P(C)P(PQ/C)P(EF/(PQ \cap C)) + P(C)P(MO/C)P(EF/(MO \cap C)) = \\
 &= 0.5 \cdot 0.4 \cdot 0.85 + 0.5 \cdot 0.3 \cdot 0.95 + 0.5 \cdot 0.3 \cdot 0.8 + \\
 &+ 0.3 \cdot 0.3 \cdot 0.8 + 0.3 \cdot 0.4 \cdot 0.9 + 0.3 \cdot 0.3 \cdot 0.75 + \\
 &+ 0.2 \cdot 0.2 \cdot 0.7 + 0.2 \cdot 0.5 \cdot 0.85 + 0.2 \cdot 0.3 \cdot 0.65 = 0.4325 + 0.2475 + 0.152 = \boxed{0.832}
 \end{aligned}$$

1.2 Llamamos  $X$  a la variable aleatoria que cuenta el número de tomates de una muestra de 11 libres de la plaga después de haber sido tratados mediante métodos orgánicos.

El número de repeticiones es  $n = 11$  y la probabilidad de que un tomate tratado mediante métodos orgánicos esté libre de plagas es  $P(EF/MO \cap T) = 0.8$ .

La variable  $X$  es una binomial.  $X = B(11, 0.8)$

Nos piden calcular  $P(X \geq 3)$ .

$$\begin{aligned}
 P(X \geq 3) &= 1 - P(X < 3) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)] = \\
 &= 1 - \left[ \binom{11}{0} 0.8^0 \cdot 0.2^{11} + \binom{11}{1} 0.8^1 \cdot 0.2^{10} + \binom{11}{2} 0.8^2 \cdot 0.2^9 \right] = \\
 &= 1 - \left[ 0.2^{11} + 11 \cdot 0.8 \cdot 0.2^{10} + \frac{11 \cdot 10}{2} \cdot 0.8^2 \cdot 0.2^9 \right] \approx \boxed{0.999981}
 \end{aligned}$$

Es un suceso casi seguro pues su probabilidad es muy cercana a 1.

Si queremos utilizar la tabla de la binomial proporcionada debemos considerar la variable  $Y$  que cuenta el número tomates de una muestra de 11 con la plaga después de haber sido tratados mediante métodos orgánicos.

El número de repeticiones es  $n = 11$  y la probabilidad de que un tomate tratado mediante métodos orgánicos esté con la plaga es  $P(EF^c/MO \cap T) = 0.2$ .

La variable  $Y$  es una binomial.  $Y = B(11, 0.2)$

Que haya al menos 3 tomates libres de la plaga es el mismo suceso que haya 8 tomates o menos con la plaga. Nos piden calcular  $P(Y \leq 8)$ .

Mirando en la tabla de la binomial tenemos que

$$P(Y \leq 8) = 1.$$

| n  | k  | p | 0,01   | 0,05   | 0,10   | 0,20   | 0,30   |
|----|----|---|--------|--------|--------|--------|--------|
| 11 | 0  |   | 0,8953 | 0,5688 | 0,3138 | 0,0859 | 0,0177 |
|    | 1  |   | 0,9948 | 0,8981 | 0,6974 | 0,3221 | 0,1330 |
|    | 2  |   | 0,9998 | 0,9848 | 0,9104 | 0,6744 | 0,4097 |
|    | 3  |   | 1,0000 | 0,9984 | 0,9815 | 0,8889 | 0,7277 |
|    | 4  |   | 1,0000 | 0,9999 | 0,9972 | 0,9596 | 0,8830 |
|    | 5  |   | 1,0000 | 1,0000 | 0,9997 | 0,9883 | 0,9517 |
|    | 6  |   | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 0,9980 | 0,9819 |
|    | 7  |   | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 0,9998 | 0,9923 |
|    | 8  |   | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 0,9979 |
|    | 9  |   | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 |
|    | 10 |   | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 |
|    | 11 |   | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 |

2.1 Responda a todos los subapartados siguientes:

Sea el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x - y + az = -2 \\ -x + 2y - az = 3 \\ ax + y + z = 2 \end{cases}$$

donde  $a$  es un parámetro real. Obtener:

2.1.1 (1,25 puntos) Discutir del sistema en función del parámetro  $a$ .

2.1.2 (1,25 puntos) Las soluciones del sistema cuando éste sea compatible.

a) La matriz de coeficientes  $A$  y la matriz ampliada del sistema  $A/B$  son:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ -1 & 2 & -a \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad A/B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a & -2 \\ -1 & 2 & -a & 3 \\ a & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Calculamos el determinante de  $A$ .

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & a \\ -1 & 2 & -a \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 + a^2 - a - 2a^2 - 1 + a = -a^2 + 1$$

Averiguamos cuando se anula el determinante.

$$|A| = 0 \Rightarrow -a^2 + 1 = 0 \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow a = \sqrt{1} = \pm 1$$

Estudiamos tres casos diferentes.

**CASO 1.**  $a \neq -1$  y  $a \neq 1$ .

En este caso el determinante de  $A$  es no nulo y su rango es 3. El rango de la matriz  $A/B$  también es 3, al igual que el número de incógnitas (3). El sistema es compatible determinado (una única solución).

**CASO 2.**  $a = -1$ .

En este caso el determinante de  $A$  es nulo y su rango no es 3.

La matriz de coeficientes queda  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ . Si tomamos el menor de orden 2 que

resulta de quitar la primera fila y la primera columna su determinante es no nulo.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1 \neq 0$$

El rango de  $A$  es 2.

La matriz ampliada queda  $A/B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ . Como la primera columna y la tercera son proporcionales consideramos el menor de orden 3 que resulta de quitar la primera columna y vemos si su determinante es nulo o no.

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -2 - 3 - 4 + 2 + 4 + 3 = 0$$

Al ser nulo el rango de  $A/B$  no es 3 y tiene rango 2 igual que la matriz  $A$ .

El rango de  $A$  y el de  $A/B$  son iguales (2), pero es menor que el número de incógnitas (3).

El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

### CASO 3. $a = 1$

En este caso el determinante de  $A$  es nulo y su rango no es 3.

La matriz de coeficientes queda  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ . Si tomamos el menor de orden 2 que resulta de quitar la primera fila y la primera columna su determinante es no nulo.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 1 = 3 \neq 0$$

El rango de  $A$  es 2.

La matriz ampliada queda  $A/B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ . Como la primera columna y la tercera son iguales consideramos el menor de orden 3 que resulta de quitar la primera columna y vemos si su determinante es nulo o no.

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 3 - 4 - 2 - 4 + 3 = -2 \neq 0$$

Al no ser nulo el rango de  $A/B$  es 3.

El rango de  $A$  y el de  $A/B$  son distintos. El sistema es incompatible (sin solución).

**Resumiendo:** Si  $a \neq -1$  y  $a \neq 1$  el sistema es compatible determinado, si  $a = -1$  el sistema es compatible indeterminado y si  $a = 1$  el sistema es incompatible.

b) Resolvemos el sistema para  $a \neq -1$  y  $a \neq 1$ . Utilizamos el método de Cramer.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ -1 & 2 & -a \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a & -2 \\ -1 & 2 & -a & 3 \\ a & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -2 & -1 & a \\ 3 & 2 & -a \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & a \\ -1 & 2 & -a \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-4 + 2a + 3a - 4a + 3 - 2a}{1 - a^2} = \frac{-1 - a}{(1-a)(1+a)} = \frac{-\cancel{(1+a)}}{(1-a)\cancel{(1+a)}} = \frac{-1}{1-a}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 & a \\ -1 & 3 & -a \\ a & 2 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{3 + 2a^2 - 2a - 3a^2 - 2 + 2a}{1 - a^2} = \frac{-a^2 + 1}{1 - a^2} = 1$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \\ a & 1 & 2 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{4 - 3a + 2 + 4a - 2 - 3}{1 - a^2} = \frac{\cancel{a+1}}{(1-a)\cancel{(1+a)}} = \frac{1}{1-a}$$

La solución del sistema para  $a \neq -1$  y  $a \neq 1$  es  $x = \frac{-1}{1-a}$ ;  $y = 1$ ;  $z = \frac{1}{1-a}$

Resolvemos el sistema para  $a = -1$ .

El sistema queda  $\begin{cases} x - y - z = -2 \\ -x + 2y + z = 3 \\ -x + y + z = 2 \end{cases}$ . Observamos que la primera y la tercera ecuación son la

misma. Resolvemos el sistema equivalente formado por las dos primeras ecuaciones.

$$\begin{cases} x - y - z = -2 \\ -x + 2y + z = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 + y + z \\ -x + 2y + z = 3 \end{cases} \Rightarrow 2 - y - z + 2y + z = 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{y = 1} \Rightarrow \boxed{x = -2 + 1 + z = -1 + z}$$

Las soluciones del sistema para  $a = -1$  son  $x = -1 + \lambda$ ;  $y = 1$ ;  $z = \lambda$ , siendo  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

2.2 Responda a todos los subapartados siguientes:

Se dan las matrices  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  y  $U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

Obtener (con los cálculos intermedios necesarios, así como con la mención explícita de los teoremas o propiedades utilizados):

2.2.1 (1,25 puntos) Las matrices  $A^{-1}$  y  $B = A^3 - 3A^2 + 5A$ .

2.2.2 (1,25 puntos) Los valores  $\alpha$  y  $\beta$  tales que  $\alpha A^2 + \beta A + U = A^{-1}$ .

a) Comprobamos que existe la inversa de la matriz A y la calculamos.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 2 + 0 - 0 + 2 + 0 = 5 \neq 0 \quad \text{Existe la inversa.}$$

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^T)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}{5} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Calculamos la matriz B. Para ello calculamos primero las potencias de A necesarias.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2 & 2+2 & 2 \\ -1-1+1 & -2+1 & 1+1 \\ 1+1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-4+2 & -2+4 & 4+2 \\ -1+1+2 & -2-1 & -1+2 \\ 2-2+1 & 4+2 & 2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 6 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

$$B = A^3 - 3A^2 + 5A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 6 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 6 & 3 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} -3+3+5 & 2-12+10 & 6-6+0 \\ 2+3-5 & -3+3+5 & 1-6+5 \\ 1-6+5 & 6-6+0 & 3-3+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = 5U$$

b) Resolvemos la ecuación matricial  $\alpha A^2 + \beta A + U = A^{-1}$ .

$$\alpha A^2 + \beta A + U = A^{-1} \Rightarrow \alpha \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -\alpha + \beta + 1 & 4\alpha + 2\beta & 2\alpha \\ -\alpha - \beta & -\alpha + \beta + 1 & 2\alpha + \beta \\ 2\alpha + \beta & 2\alpha & \alpha + \beta + 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\alpha + \beta + 1 = \frac{1}{5} \\ 4\alpha + 2\beta = \frac{-2}{5} \\ 2\alpha = \frac{2}{5} \\ -\alpha - \beta = \frac{2}{5} \\ 2\alpha + \beta = \frac{-1}{5} \\ \alpha + \beta + 1 = \frac{3}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\alpha + \beta = \frac{1}{5} - 1 = \frac{-4}{5} \\ 4\alpha + 2\beta = \frac{-2}{5} \\ \boxed{\alpha = \frac{1}{5}} \\ \alpha + \beta = \frac{-2}{5} \\ 2\alpha + \beta = \frac{-1}{5} \\ \alpha + \beta = \frac{3}{5} - 1 = \frac{-2}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{1}{5} + \beta = \frac{-4}{5} \rightarrow \boxed{\beta = \frac{-4}{5} + \frac{1}{5} = \frac{-3}{5}} \\ 4\frac{1}{5} + 2\beta = \frac{-2}{5} \rightarrow 2\beta = \frac{-2}{5} - \frac{4}{5} = \frac{-6}{5} \\ \frac{1}{5} + \beta = \frac{-2}{5} \rightarrow \beta = \frac{-2}{5} - \frac{1}{5} = \frac{-3}{5} \\ 2\frac{1}{5} + \beta = \frac{-1}{5} \rightarrow \beta = \frac{-1}{5} - \frac{2}{5} = \frac{-3}{5} \\ \frac{1}{5} + \beta = \frac{-2}{5} \rightarrow \beta = \frac{-2}{5} - \frac{1}{5} = \frac{-3}{5} \end{cases}$$

Los valores buscados son  $\alpha = \frac{1}{5}$  y  $\beta = \frac{-3}{5}$ .

#### OTRA FORMA DE RESOLVER EL APARTADO b)

Hemos visto en el apartado a) que  $B = A^3 - 3A^2 + 5A = 5U$ . Sacamos A factor común en el primer miembro de la igualdad.

$$A^3 - 3A^2 + 5A = 5U \Rightarrow A(A^2 - 3A + 5U) = 5U \Rightarrow A \cdot \frac{1}{5}(A^2 - 3A + 5U) = U \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A\left(\frac{1}{5}A^2 - \frac{3}{5}A + \frac{5}{5}U\right) = U \Rightarrow A\left(\frac{1}{5}A^2 - \frac{3}{5}A + U\right) = U \Rightarrow \frac{1}{5}A^2 - \frac{3}{5}A + U = A^{-1}$$

Como buscamos valores  $\alpha$  y  $\beta$  tales que  $\alpha A^2 + \beta A + U = A^{-1}$  estos son  $\alpha = \frac{1}{5}$  y  $\beta = \frac{-3}{5}$ .

3.1 Responda a todos los subapartados siguientes:

Dadas las rectas  $r: \begin{cases} y-z=0 \\ 2x+2=0 \end{cases}$  y  $s: \begin{cases} \frac{x-2}{-1} = \frac{y}{3} = z+2 \end{cases}$ , obtener:

3.1.1 (1,25 puntos) La ecuación del plano  $\pi$  paralelo a ambas y que pase por el origen.

3.1.2 (1,25 puntos) La distancia de un punto de  $r$  y de un punto de  $s$  al plano  $\pi$ .

a) Estudiamos la posición relativa de las rectas.

$$r: \begin{cases} y-z=0 \\ 2x+2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=z \\ 2x=-2 \rightarrow x=-1 \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} x=-1 \\ y=\lambda \\ z=\lambda \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} P_r(-1,0,0) \\ \vec{v}_r=(0,1,1) \end{cases}$$

$$s: \begin{cases} \frac{x-2}{-1} = \frac{y-0}{3} = \frac{z+2}{1} \end{cases} \Rightarrow s: \begin{cases} Q_s(2,0,-2) \\ \vec{u}_s=(-1,3,1) \end{cases}$$

Los vectores directores de las rectas no tienen coordenadas proporcionales, por lo que no son paralelas ni coincidentes.

Las rectas se cortan o cruzan. Hallamos el valor del producto mixto  $[\vec{v}_r, \vec{u}_s, \overrightarrow{P_rQ_s}]$ .

$$\overrightarrow{P_rQ_s} = (2,0,-2) - (-1,0,0) = (3,0,-2)$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = (0,1,1) \\ \vec{u}_s = (-1,3,1) \\ \overrightarrow{P_rQ_s} = (3,0,-2) \end{array} \right\} \Rightarrow [\vec{v}_r, \vec{u}_s, \overrightarrow{P_rQ_s}] = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 0 + 3 + 0 - 9 - 2 - 0 = -8 \neq 0$$

Al ser el producto mixto no nulo las rectas se cruzan.

El plano  $\pi$  paralelo a ambas y que pase por el origen tiene como vectores directores los vectores directores de ambas rectas.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} = \vec{v}_r = (0,1,1) \\ \vec{v} = \vec{u}_s = (-1,3,1) \\ (0,0,0) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \pi: \begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x - y + z - 3x = 0 \Rightarrow \boxed{\pi: -2x - y + z = 0}$$

b) Hallamos la distancia de un punto de  $r$  al plano  $\pi$ .

$$\left. \begin{array}{l} P_r(-1,0,0) \in r \\ \pi: -2x - y + z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow d(P_r, \pi) = \frac{|-2(-1) - 0 + 0|}{\sqrt{(-2)^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{2}{\sqrt{6}} \text{ unidades}$$

Hallamos la distancia de un punto de  $s$  al plano  $\pi$ .

$$\left. \begin{array}{l} Q_s(2,0,-2) \in s \\ \pi: -2x - y + z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow d(Q_s, \pi) = \frac{|-2(2) - 0 + (-2)|}{\sqrt{(-2)^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6} \text{ unidades}$$

3.2 Responda a todos los subapartados siguientes:

Dadas la recta  $r$  y el plano  $\pi$ , de ecuaciones  $r = \frac{x-5}{1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{4}$  y  $\pi = ax + y - z = b$ , con  $a$  y  $b$  parámetros reales, obtener:

3.2.1 (1 punto) Los valores del parámetro  $a$  para los que  $r$  y  $\pi$  se cortan en un único punto y calcular las coordenadas de dicho punto en función del parámetro  $a$ .

3.2.2 (1,5 puntos) Los valores de  $a$  y  $b$  tales que la recta  $r$  esté contenida en el plano  $\pi$  y los valores de los parámetros para que la recta  $r$  no corte al plano  $\pi$ .

a) Pasamos la ecuación de la recta a paramétricas.

$$r = \frac{x-5}{1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-0}{4} \Rightarrow r: \begin{cases} P_r(5,1,0) \\ \vec{v}_r = (1,3,4) \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} x = 5 + \lambda \\ y = 1 + 3\lambda \\ z = 4\lambda \end{cases}$$

Intentamos resolver el sistema formado por las ecuaciones paramétricas de la recta y la ecuación implícita del plano.

$$r: \begin{cases} x = 5 + \lambda \\ y = 1 + 3\lambda \\ z = 4\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a(5 + \lambda) + 1 + 3\lambda - 4\lambda = b \\ \pi = ax + y - z = b \end{cases} \Rightarrow 5a + a\lambda + 1 - \lambda = b \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a-1)\lambda = b-1-5a \Rightarrow \{a-1 \neq 0 \rightarrow a \neq 1\} \Rightarrow \lambda = \frac{b-1-5a}{a-1}$$

Para que el sistema tenga solución y sea única debe ser  $a \neq 1$ . Para este valor recta y plano se cortan en un único punto.

Terminamos de resolver el sistema y hallamos las coordenadas del punto P de corte de recta y plano.

$$\lambda = \frac{b-1-5a}{a-1} \Rightarrow \begin{cases} x = 5 + \frac{b-1-5a}{a-1} = \frac{5a-5+b-1-5a}{a-1} = \frac{b-6}{a-1} \\ y = 1 + 3\frac{b-1-5a}{a-1} = 1 + \frac{3b-3-15a}{a-1} = \frac{a-1+3b-3-15a}{a-1} = \frac{-4+3b-14a}{a-1} \\ z = 4\frac{b-1-5a}{a-1} = \frac{4b-4-20a}{a-1} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(\frac{b-6}{a-1}, \frac{-4+3b-14a}{a-1}, \frac{4b-4-20a}{a-1}\right)$$

Para  $a \neq 1$  la recta  $r$  y el plano  $\pi$  se cortan en un único punto.

Este punto tiene coordenadas  $P\left(\frac{b-6}{a-1}, \frac{-4+3b-14a}{a-1}, \frac{4b-4-20a}{a-1}\right)$ .

- b) Para que la recta  $r$  esté contenida en el plano deben cumplirse dos cosas: 1ª el vector normal del plano y el director de la recta deben ser perpendiculares (su producto escalar debe ser nulo), 2ª el punto  $P_r$  de la recta debe pertenecer al plano (debe cumplir su ecuación).

1ª condición. El plano  $\pi = ax + y - z = b$  tiene como vector normal  $\vec{n} = (a, 1, -1)$ . El vector director de la recta  $r$  es  $\vec{v}_r = (1, 3, 4)$ . El producto  $\vec{v}_r \cdot \vec{n}$  debe ser nulo.

$$\vec{v}_r \cdot \vec{n} = 0 \Rightarrow (1, 3, 4)(a, 1, -1) = 0 \Rightarrow a + 3 - 4 = 0 \Rightarrow \boxed{a = 1}$$

2ª condición.  $P_r(5, 1, 0)$  pertenece al plano  $\pi = ax + y - z = b$ .

$$\left. \begin{array}{l} a = 1 \rightarrow \pi = x + y - z = b \\ P_r(5, 1, 0) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow 5 + 1 - 0 = b \Rightarrow \boxed{b = 6}$$

Los valores tales que la recta  $r$  está contenida en el plano son  $a = 1$  y  $b = 6$ .

Para que la recta  $r$  no corte al plano  $\pi$  deben ser paralelos y para ello deben cumplirse dos cosas: 1ª el vector normal del plano y el director de la recta deben ser perpendiculares (su producto escalar debe ser nulo), 2ª el punto  $P_r$  de la recta **no** debe pertenecer al plano (**no** debe cumplir su ecuación).

1ª condición. Ya la hemos estudiado y hemos obtenido que  $a = 1$ .

2ª condición. Hemos visto que si  $b = 6$  el punto  $P_r$  pertenece al plano, por lo que si  $b \neq 6$  el punto no pertenece al plano.

Los valores tales que la recta  $r$  es paralela al plano son  $a = 1$  y  $b \neq 6$ .

4.1 Responda a todos los subapartados siguientes:

Se dan las funciones polinómicas  $f(x) = -x^2 + x + 2$  y  $g(x) = x^2 - b$ , siendo  $b$  un parámetro real. Obtener:

4.1.1 (1,25 puntos) El valor de  $b$  para que uno de los puntos de intersección de las curvas  $y = -x^2 + x + 2$  e  $y = x^2 - b$  sea el punto  $P = (-1, 0)$ . Dibujad un esquema de las curvas  $y = -x^2 + x + 2$  e  $y = x^2 - 1$ .

4.1.2 (1,25 puntos) El área de la superficie finita encerrada entre las curvas  $y = -x^2 + x + 2$  e  $y = x^2 - 1$ .

a) Resolvemos el sistema formado por las ecuaciones de las dos funciones.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = -x^2 + x + 2 \\ g(x) = x^2 - b \\ f(x) = g(x) \end{array} \right\} \Rightarrow -x^2 + x + 2 = x^2 - b \Rightarrow -2x^2 + x + 2 + b = 0$$

Como la intersección debe ser el punto  $P(-1, 0)$  el valor de  $x = -1$  debe cumplir la ecuación.

$$-2(-1)^2 + (-1) + 2 + b = 0 \Rightarrow -2 - 1 + 2 + b = 0 \Rightarrow \boxed{b = 1}$$

El valor buscado es  $b = 1$ .

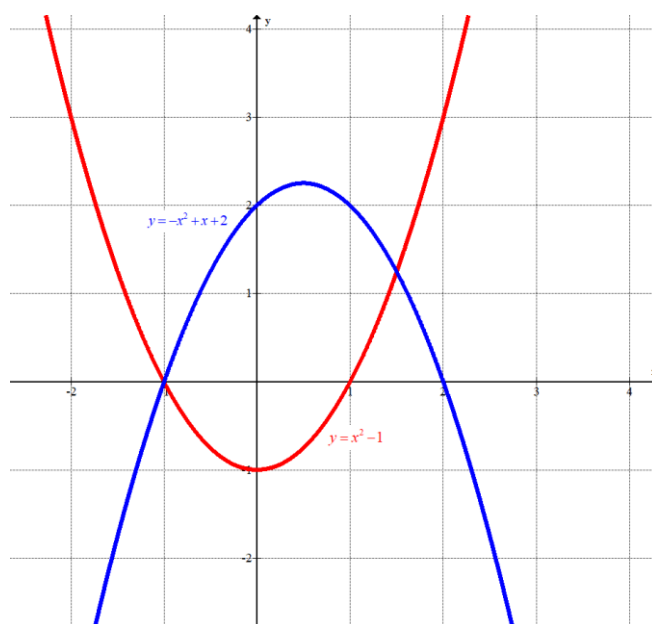
Las gráficas de las funciones  $f(x)$  y  $g(x)$  son dos parábolas. Averiguamos el vértice y hacemos una tabla de valores de cada una para poder dibujar sus graficas.

$$y = -x^2 + x + 2 \Rightarrow y' = -2x + 1 = 0 \Rightarrow -2x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$y = x^2 - 1 \Rightarrow y' = 2x = 0 \Rightarrow x = 0$$

| $x$ | $y = -x^2 + x + 2$ |
|-----|--------------------|
| -1  | 0                  |
| 0   | 2                  |
| 1/2 | 2.25               |
| 1   | 2                  |
| 2   | 0                  |

| $x$ | $y = x^2 - 1$ |
|-----|---------------|
| -2  | 3             |
| -1  | 0             |
| 0   | -1            |
| 1   | 0             |
| 2   | 3             |



b) Hallamos los puntos de corte de ambas gráficas.

$$\begin{cases} y = -x^2 + x + 2 \\ y = x^2 - 1 \end{cases} \Rightarrow -x^2 + x + 2 = x^2 - 1 \Rightarrow -2x^2 + x + 3 = 0 \Rightarrow$$

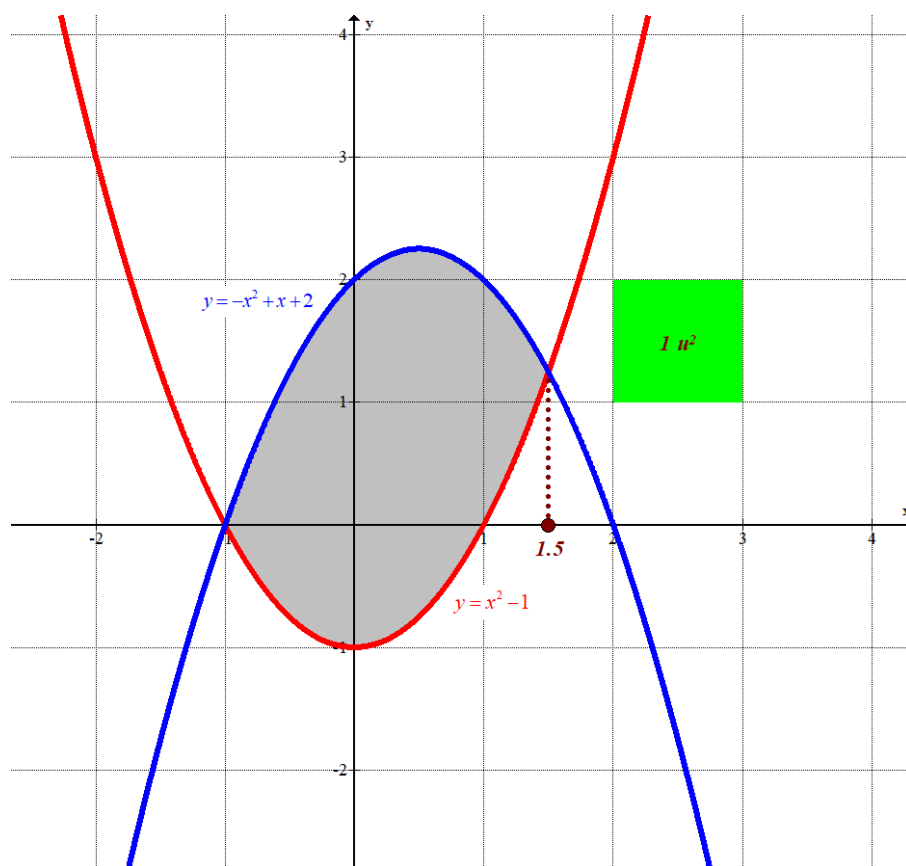
$$\Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(-2)(3)}}{2(-2)} = \frac{-1 \pm 5}{-4} = \begin{cases} \frac{-1-5}{-4} = \frac{-6}{-4} = \frac{3}{2} = 1.5 \\ \frac{-1+5}{-4} = -1 \end{cases}$$

El área de la región limitada por las dos gráficas es el valor de la integral definida entre  $x = -1$  y  $x = 1.5$  de la diferencia entre las dos funciones.

$$\text{Área} = \int_{-1}^{1.5} (-x^2 + x + 2 - (x^2 - 1)) dx = \int_{-1}^{1.5} -x^2 + x + 2 - x^2 + 1 dx = \int_{-1}^{1.5} -2x^2 + x + 3 dx =$$

$$= \left[ -\frac{2}{3}x^3 + \frac{x^2}{2} + 3x \right]_{-1}^{1.5} = \left[ -\frac{2}{3}(1.5)^3 + \frac{(1.5)^2}{2} + 3(1.5) \right] - \left[ -\frac{2}{3}(-1)^3 + \frac{(-1)^2}{2} + 3(-1) \right] =$$

$$= -\frac{9}{4} + \frac{9}{8} + \frac{9}{2} - \frac{2}{3} - \frac{1}{2} + 3 = \boxed{\frac{125}{24} \approx 5.2 \text{ u}^2}$$



4.2 Responda a todos los subapartados siguientes:

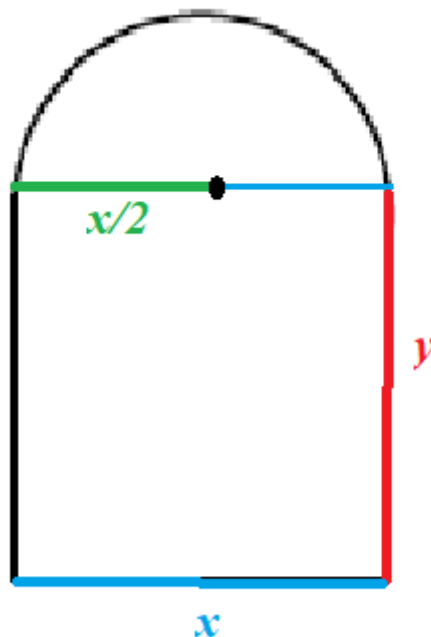
Una ventana Norman está formada por un rectángulo y un semicírculo. El semicírculo está apoyado sobre el lado horizontal superior del rectángulo, que coincide con el diámetro horizontal del semicírculo.

La base del rectángulo mide  $x$  y su altura mide  $y$ , por lo que el diámetro del semicírculo mide  $x$ . Obtener:

4.2.1 (1 punto) La expresión  $S(x)$  que da el área de una ventana Norman de perímetro 5 metros en función de su anchura  $x$ .

4.2.2 (1,5 puntos) El valor de  $x$  para el que la función  $S(x)$  tenga un máximo relativo y el valor de dicha área máxima.

a) Realizamos un dibujo de la ventana indicando las longitudes de cada lado.



El perímetro de la ventana es la suma de los tres lados rectos y la longitud de la semicircunferencia.

$$\left. \begin{aligned} \text{Perímetro} &= x + 2y + \frac{2\pi \frac{x}{2}}{2} = x + 2y + \frac{\pi x}{2} \\ \text{Perímetro} &= 5 \end{aligned} \right\} \Rightarrow x + 2y + \frac{\pi x}{2} = 5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x + 4y + \pi x = 10 \Rightarrow 4y = 10 - 2x - \pi x \Rightarrow y = \frac{10 - 2x - \pi x}{4} = 2.5 - \frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}x$$

Buscamos la expresión de la superficie de la ventana. Es la suma del área del rectángulo más el área del semicírculo.

$$\left. \begin{aligned} S(x, y) &= xy + \frac{\pi \left(\frac{x}{2}\right)^2}{2} = xy + \frac{\pi x^2}{8} \\ y &= 2.5 - \frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}x \end{aligned} \right\} \Rightarrow S(x) = x \left( 2.5 - \frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}x \right) + \frac{\pi x^2}{8} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S(x) = 2.5x - \frac{x^2}{2} - \frac{\pi}{4}x^2 + \frac{\pi x^2}{8} = 2.5x - \frac{x^2}{2} - \frac{2\pi}{8}x^2 + \frac{\pi x^2}{8} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S(x) = 2.5x - \frac{x^2}{2} - \frac{\pi}{8}x^2 = 2.5x - \left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{8}\right)x^2$$

b) Buscamos el máximo de la función área usando la derivada.

$$S(x) = 2.5x - \left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{8}\right)x^2 \Rightarrow S'(x) = 2.5 - \left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{8}\right)2x = 2.5 - \left(\frac{4+\pi}{8}\right)2x = 2.5 - \frac{4+\pi}{4}x$$

$$\left. \begin{array}{l} S'(x) = 10 - \frac{4+\pi}{4}x \\ S'(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 2.5 - \frac{4+\pi}{4}x = 0 \Rightarrow 2.5 = \frac{4+\pi}{4}x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 10 = (4+\pi)x \Rightarrow x = \frac{10}{4+\pi} \simeq 1.4$$

Comprobamos si el punto crítico  $x = \frac{10}{4+\pi}$  es un máximo usando la derivada segunda.

$$S'(x) = 2.5 - \frac{4+\pi}{4}x \Rightarrow S''(x) = -\frac{4+\pi}{4} \Rightarrow S''\left(\frac{10}{4+\pi}\right) = -\frac{4+\pi}{4} < 0$$

Como la segunda derivada es negativa la función área tiene un máximo en  $x = \frac{10}{4+\pi}$ .

Las dimensiones de la ventana con superficie máxima son  $x = \frac{10}{4+\pi} \simeq 1.4$  metros en la base,

en la parte recta vertical vale  $y = 2.5 - \frac{1}{2} \frac{10}{4+\pi} - \frac{\pi}{4} \frac{10}{4+\pi} = 2.5 - \frac{5}{4+\pi} - \frac{2.5\pi}{4+\pi} \simeq 0.7$  metros y

el semicírculo superior de radio  $\frac{x}{2} = \frac{5}{4+\pi} \simeq 0.7$  metros.

Para  $x = \frac{10}{4+\pi}$  determinamos el valor del área  $S\left(\frac{10}{4+\pi}\right)$ .

$$S\left(\frac{10}{4+\pi}\right) = 2.5 \frac{10}{4+\pi} - \left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{8}\right) \left(\frac{10}{4+\pi}\right)^2 = \frac{25}{4+\pi} - \frac{4+\pi}{8} \frac{100}{(4+\pi)^2} =$$

$$= \frac{25}{4+\pi} - \frac{12.5}{4+\pi} = \frac{12.5}{4+\pi} \simeq 1.75$$

Para  $x = \frac{10}{4+\pi}$  el área tiene un valor de  $\frac{12.5}{4+\pi} \simeq 1.75$  metros cuadrados.