



**Proba de Avaliación do Bacharelato
para o Acceso á Universidade
SETEMBRO 2017**

Código: 40

MATEMÁTICAS APLICADAS ÁS CIENCIAS SOCIAIS II

(Responde solamente a los ejercicios de una de las opciones. Puntuación máxima de los ejercicios de cada opción: ejercicio 1 = 3 puntos, ejercicio 2 = 3 puntos, ejercicio 3 = 2 puntos, ejercicio 4 = 2 puntos)

OPCIÓN A

1. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & a \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & c & c \end{pmatrix}$

- (a) Calcula los valores de a , b y c para que se satisfaga la igualdad $A \cdot B + B \cdot C = 2I$, I matriz identidad de orden 3.
- (b) Para $a = 4$, $b = -3$ y $c = 1$ calcula el rango de la matriz $A + B - 2C$.
2. El precio en euros de las acciones de cierto grupo empresarial a lo largo de un año se estima por la función:

$$P(t) = \begin{cases} 15 + 2t - t^2, & 0 \leq t \leq 3 \\ \frac{1}{3}t + 11, & 3 < t \leq 12 \end{cases}$$

- (a) Determinar los períodos en los que el precio aumentó y en los que disminuyó y calcular su precio máximo y su precio mínimo
- (b) Determinar el período en el que el precio de la acción fue inferior o igual a 13,75 euros. Representa la gráfica de la función $P(t)$.
3. El 60% de los individuos de una población están vacunados contra una determinada enfermedad. Durante una epidemia se sabe que el 20% contrajo la enfermedad y que el 3% está vacunado y contrajo la enfermedad.
- (a) Calcule el porcentaje de individuos que han contraído la enfermedad, entre los que no están vacunados.
- (b) Calcule el porcentaje de individuos vacunados entre los que contrajeron la enfermedad. Justifique si los sucesos "ser vacunado" y "contraer la enfermedad" son dependientes o independientes.
4. (a) En una muestra aleatoria de 200 clientes de un centro comercial, 150 realizan sus compras utilizando la tarjeta del centro. Calcule un intervalo de confianza del 95% para la proporción de clientes que realizan compras con la tarjeta del centro. Interpretar el intervalo obtenido.
- (b) Si se sabe que 8 de cada 10 clientes del centro comercial utilizan para sus compras la tarjeta del centro y tomamos una muestra aleatoria de 100 clientes, ¿cuál es la probabilidad de que la proporción de clientes de la muestra que utilizan la tarjeta del centro sea superior a 0,75?

OPCIÓN B

1. Una fábrica de materiales plásticos produce dos tipos de envases A y B. Su producción semanal debe ser de al menos 10 envases en total y el número de envases tipo B no puede superar en más de 10 el número de los del tipo A. Además, cada envase tipo A tiene unos costes de producción

de 150€ y cada envase tipo B de 100€, con un máximo de 6.000€ semanales para el coste total de producción.

- (a) Formule el sistema de inecuaciones. Dibuje la región factible y calcule sus vértices.
- (b) Si cada envase del tipo A genera unos beneficios de 130€ y el tipo B de 140€, ¿cuántos envases de cada tipo tendrán que producir por semana para que la ganancia semanal total sea máxima?

2. Sean las funciones $f(x) = x^2 + 2x - 8$ y $g(x) = -x^2 + 4$.

- (a) Representar el recinto acotado por las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$, estudiando los puntos de intersección con los ejes, máximos, mínimos y los puntos donde ambas funciones se cruzan.
- (b) Calcular el área de dicho recinto.

3. Una multinacional realiza operaciones comerciales en tres mercados A, B y C. El 20% de las operaciones corresponden al mercado B y en los mercados A y C realiza el mismo número de operaciones. Los retrasos en el pago se producen en un 15%, el 10% y el 5% de las operaciones realizadas en los mercados A, B y C, respectivamente.

- (a) Calcule el porcentaje de operaciones de la multinacional en las que se producen retrasos en los pagos.
- (b) ¿Qué porcentaje de transacciones con pagos atrasados se realizaron en el mercado A?

4. El tiempo de formación, en horas, que necesita un empleado de una empresa para poder trabajar en una nueva planta sigue una distribución $N(\mu, \sigma = 15)$.

- (a) Elegida una muestra de 36 empleados de la empresa, se obtiene el intervalo de confianza $(321.1, 330.9)$ para la media μ . Calcular el tiempo medio de formación de los empleados de la muestra y el nivel de confianza con el que se construyó el intervalo.
- (b) Supongamos que el tiempo de formación, en horas, que necesita un empleado de esa empresa para poder trabajar en la nueva planta sigue una distribución $N(\mu = 326, \sigma = 15)$. Calcule la probabilidad de que el tiempo medio de formación no supera las 330 horas, en muestras de 36 empleados.

SOLUCIONES**OPCIÓN A**

1. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & a \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & c & c \end{pmatrix}$

- (a) Calcula los valores de a , b y c para que se satisfaga la igualdad $A \cdot B + B \cdot C = 2I$, I matriz identidad de orden 3.
 (b) Para $a = 4, b = -3$ y $c = 1$ calcula el rango de la matriz $A + B - 2C$.

a) Resolvemos la ecuación matricial.

$$A \cdot B + B \cdot C = 2I \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & a \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & c & c \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2b+a & 2 \\ 0 & b+a & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -b+c & b+c \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & a+b+c & 2+b+c \\ 0 & -1+a+b & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a+b+c=2 \\ 2+b+c=0 \\ -1+a+b=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{matrix} a+b+c=2 \\ \Rightarrow c=-b-2 \\ a=1-b \end{matrix} \right\} \Rightarrow 1-b+b-b-2=2 \Rightarrow -b=3 \Rightarrow \boxed{b=-3} \Rightarrow \left. \begin{matrix} \boxed{c=3-2=1} \\ \boxed{a=1+3=4} \end{matrix} \right\}$$

Los valores buscados son $a = 4$, $b = -3$ y $c = 1$.

b) Para $a = 4, b = -3$ y $c = 1$ calculamos la matriz $A + B - 2C$.

$$A + B - 2C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

El determinante de la matriz es nulo pues tiene la primera fila nula. El rango de la matriz es menor de 3.

Si consideramos el menor de orden 2 que resulta de quitar la primera fila y la primera

columna $\rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$. El rango de la matriz $A + B - 2C$ es 2.

2. El precio en euros de las acciones de cierto grupo empresarial a lo largo de un año se estima por la función:

$$P(t) = \begin{cases} 15 + 2t - t^2, & 0 \leq t \leq 3 \\ \frac{1}{3}t + 11, & 3 < t \leq 12 \end{cases}.$$

- a) Determinar los períodos en los que el precio aumentó y en los que disminuyó y calcular su precio máximo y su precio mínimo
 (b) Determinar el período en el que el precio de la acción fue inferior o igual a 13,75 euros. Representa la gráfica de la función $P(t)$.

- (a) Comprobamos si la función es continua en $t = 3$.

$$\left. \begin{aligned} P(3) &= 15 + 2 \cdot 3 - 3^2 = 12 \\ \lim_{t \rightarrow 3^-} P(t) &= \lim_{t \rightarrow 3^-} 15 + 2t - t^2 = 12 \\ \lim_{t \rightarrow 3^+} P(t) &= \lim_{t \rightarrow 3^+} \frac{1}{3}t + 11 = \frac{1}{3} \cdot 3 + 11 = 12 \end{aligned} \right\} \Rightarrow P(3) = \lim_{t \rightarrow 3^-} P(t) = \lim_{t \rightarrow 3^+} P(t) = 12$$

La función es continua en $t = 3$. La función es continua en $[0, 12]$.

La función es derivable en $[0, 3) \cup (3, 12]$, siendo su derivada:

$$P'(t) = \begin{cases} 2 - 2t & 0 \leq t < 3 \\ \frac{1}{3} & 3 < t \leq 12 \end{cases}$$

La función en el intervalo $(3, 12]$ tiene derivada $P'(t) = \frac{1}{3} > 0$. La función es creciente.

En el intervalo $[0, 3)$ la función tiene derivada $P'(t) = 2 - 2t$. Esta derivada se anula en $t = 1$, por lo que en dicho valor la función tiene un extremo relativo. Estudiamos el crecimiento y decrecimiento de la función antes y después de $t = 1$.

- En el intervalo $[0, 1)$ consideramos $t = 0.5$ y la derivada vale $P'(0.5) = 2 - 2 \cdot 0.5 = 1 > 0$. La función crece en $[0, 1)$.
- En el intervalo $(1, 3)$ consideramos $t = 2$ y la derivada vale $P'(2) = 2 - 2 \cdot 2 = -2 < 0$. La función decrece en $(1, 3)$.

La función tiene un máximo relativo en $t = 1$.

Resumiendo: La función crece en $[0, 1) \cup (3, 12]$ y decrece en $(1, 3)$. El precio aumentó durante el primer mes y a partir del tercer mes. Disminuyó entre el primer y el tercer mes.

Para encontrar el precio máximo y el precio mínimo de la función. Valoramos la función en los extremos del intervalo de definición, en el máximo relativo y en el cambio de definición.

$$\left. \begin{aligned} P(0) &= 15 + 2 \cdot 0 - 0^2 = 15 \\ P(1) &= 15 + 2 \cdot 1 - 1^2 = 16 \\ P(3) &= 12 \\ P(12) &= \frac{1}{3}12 + 11 = 15 \end{aligned} \right\}$$

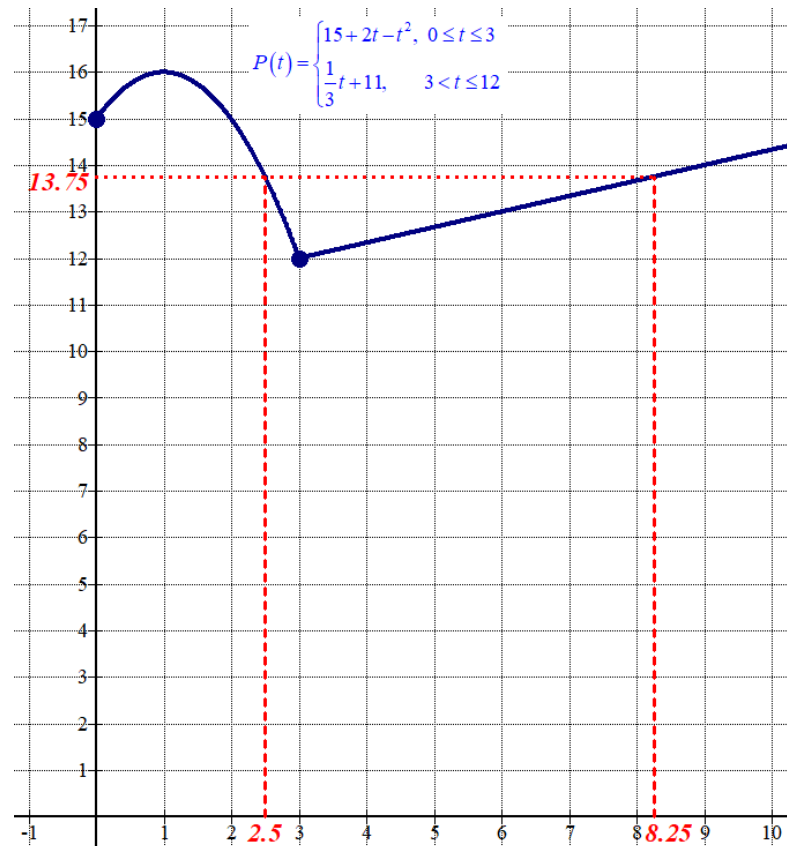
Como la función es continua podemos afirmar que el precio mínimo es de 12 euros en el tercer mes y el precio máximo es de 16 euros en el primer mes.

(b) Buscamos cuando la función vale 13.75.

$$P(t) = 13.75 \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} 15 + 2t - t^2 &= 13.75 \rightarrow t^2 - 2t - 1.25 = 0 \rightarrow \\ \rightarrow t &= \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 + 5}}{2} = \frac{2 \pm 3}{2} = \begin{cases} t = \frac{2+3}{2} = 2.5 \in [0, 3) \\ t = \frac{2-3}{2} = -0.5 \notin [0, 3) \end{cases} \\ , \quad 0 \leq t \leq 3 \\ \frac{1}{3}t + 11 &= 13.75 \rightarrow \frac{1}{3}t = 2.75 \rightarrow t = 8.25 \in (3, 12] \end{aligned} \right.$$

El precio es 13.75 euros en $t = 2.5$. Como de este valor a $t = 3$ la función decrece podemos afirmar que el precio es igual o inferior a 13.75 euros de 2.5 a 3.

El precio es 13.75 euros en $t = 8.25$. Como la función es continua el precio es inferior a 13.75 euros entre 2.5 y 8.25. Después el precio aumenta y supera este valor.



3. El 60% de los individuos de una población están vacunados contra una determinada enfermedad. Durante una epidemia se sabe que el 20% contrajo la enfermedad y que el 3% está vacunado y contrajo la enfermedad.
- (a) Calcule el porcentaje de individuos que han contraído la enfermedad, entre los que no están vacunados.
- (b) Calcule el porcentaje de individuos vacunados entre los que contrajeron la enfermedad. Justifique si los sucesos "ser vacunado" y "contraer la enfermedad" son dependientes o independientes.

Realizamos una tabla de contingencia para obtener el resto de datos implícitos en los datos proporcionados en el problema.

	Contraen la enfermedad	No contraen la enfermedad	
Vacunados	3		60
No vacunados			
	20		100

Completamos la tabla.

	Contraen la enfermedad	No contraen la enfermedad	
Vacunados	3	57	60
No vacunados	17	23	40
	20	80	100

- (a) En la tabla se aprecia que de 40 no vacunados hay 17 que contraen la enfermedad. El porcentaje es $\frac{17}{40} = 0.425$. El 42.5 % de los no vacunados contraen la enfermedad.

- (b) Contrajeron la enfermedad 20 y de ellos 3 están vacunados. Esto significa $\frac{3}{20} = 0.15$.

El porcentaje de individuos vacunados entre los que contrajeron la enfermedad es del 15 %. Llamamos C a "contraer la enfermedad" y V a "estar vacunado". Para que estos sucesos sean independientes debe cumplirse $P(C \cap V) = P(C)P(V)$.

$$\left. \begin{array}{l} P(C \cap V) = \frac{3}{100} = 0.03 \\ P(C)P(V) = \frac{20}{100} \cdot \frac{60}{100} = 0.12 \end{array} \right\} \Rightarrow P(C \cap V) = 0.03 \neq 0.12 = P(C)P(V)$$

Al ser las probabilidades distintas los sucesos "ser vacunado" y "contraer la enfermedad" son dependientes.

4. (a) En una muestra aleatoria de 200 clientes de un centro comercial, 150 realizan sus compras utilizando la tarjeta del centro. Calcule un intervalo de confianza del 95% para la proporción de clientes que realizan compras con la tarjeta del centro. Interpretar el intervalo obtenido.
- (b) Si se sabe que 8 de cada 10 clientes del centro comercial utilizan para sus compras la tarjeta propia del centro y tomamos una muestra aleatoria de 100 clientes, ¿cuál es la probabilidad de que la proporción de clientes de la muestra que utilizan la tarjeta del centro sea superior a 0,75?

(a) La proporción muestral es $p = \frac{150}{200} = 0.75$ y el tamaño de la muestra es $n = 200$.

Para un nivel de confianza del 95% determinamos el valor de $z_{\alpha/2}$.

$$1 - \alpha = 0.95 \rightarrow \alpha = 0.05 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.025 \rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.975 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1.96$$

Utilizamos la fórmula del error para obtener la amplitud del intervalo de confianza.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.75 \cdot 0.25}{200}} \approx 0.06$$

El intervalo de confianza es:

$$(p - Error, p + Error) = (0.75 - 0.06, 0.75 + 0.06) = (0.69, 0.81)$$

Con un nivel de confianza del 95% la proporción de clientes que utilizan la tarjeta del centro para pagar se sitúa entre el 69 % y el 81 %.

(b) La proporción poblacional es $p = \frac{8}{10} = 0.8$.

La proporción muestral P para muestras de tamaño 100 sigue una distribución normal de

media $p = 0.8$ y desviación típica $\sigma = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = \sqrt{\frac{0.8 \cdot 0.2}{100}} = 0.04$.

$$P = N(0.8, 0.04).$$

Nos piden calcular $P(P > 0.75)$.

$$P(P > 0.75) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(Z > \frac{0.75 - 0.8}{0.04}\right) = P(Z > -1.25) =$$

$$= P(Z < 1.25) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = \boxed{0.8944}$$

OPCIÓN B

1. Una fábrica de materiales plásticos produce dos tipos de envases A y B. Su producción semanal debe ser de al menos 10 envases en total y el número de envases tipo B no puede superar en más de 10 el número de los del tipo A. Además, cada envase tipo A tiene unos costes de producción de 150€ y cada envase tipo B de 100€, con un máximo de 6.000€ semanales para el coste total de producción.
- (a) Formule el sistema de inecuaciones. Dibuje la región factible y calcule sus vértices.
- (b) Si cada envase del tipo A genera unos beneficios de 130€ y el tipo B de 140€, ¿cuántos envases de cada tipo tendrán que producir por semana para que la ganancia semanal total sea máxima?

(a) Llamemos x = número de envases A, y = número de envases B.

Establecemos las inecuaciones que representan las restricciones:

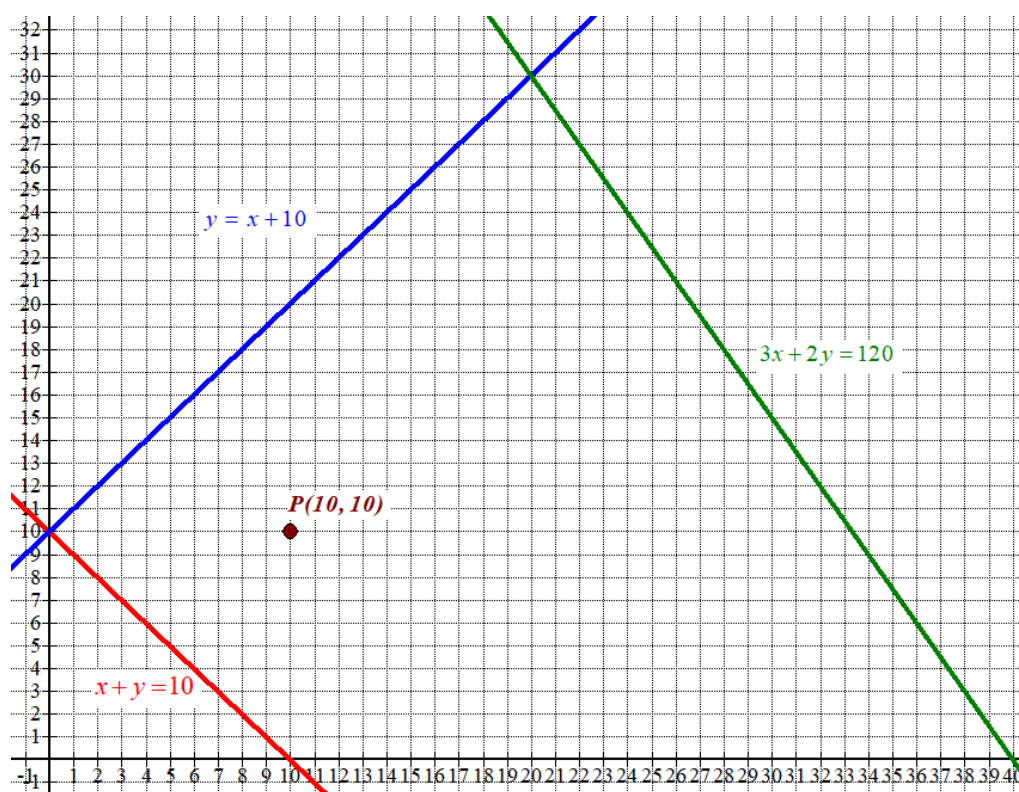
- Su producción semanal debe ser de al menos 10 envases en total $\rightarrow x + y \geq 10$.
- El número de envases tipo B no puede superar en más de 10 el número de los del tipo A $\rightarrow y \leq x + 10$.
- Cada envase tipo A tiene unos costes de producción de 150€ y cada envase tipo B de 100€, con un máximo de 6.000€ semanales para el coste total de producción $\rightarrow 150x + 100y \leq 6000$.
- Las cantidades deben ser positivas $\rightarrow x \geq 0; y \geq 0$.

Reunimos las restricciones en un sistema de inecuaciones.

$$\left. \begin{array}{l} x + y \geq 10 \\ y \leq x + 10 \\ 150x + 100y \leq 6000 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y \geq 10 \\ y \leq x + 10 \\ 3x + 2y \leq 120 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Dibujamos las rectas asociadas a las restricciones.

x	$y = 10 - x$	x	$y = x + 10$	x	$y = \frac{120 - 3x}{2}$	$x \geq 0; y \geq 0$ Primer cuadrante
0	10	0	10	0	60	
5	5	10	20	20	30	
10	0	20	30	40	0	



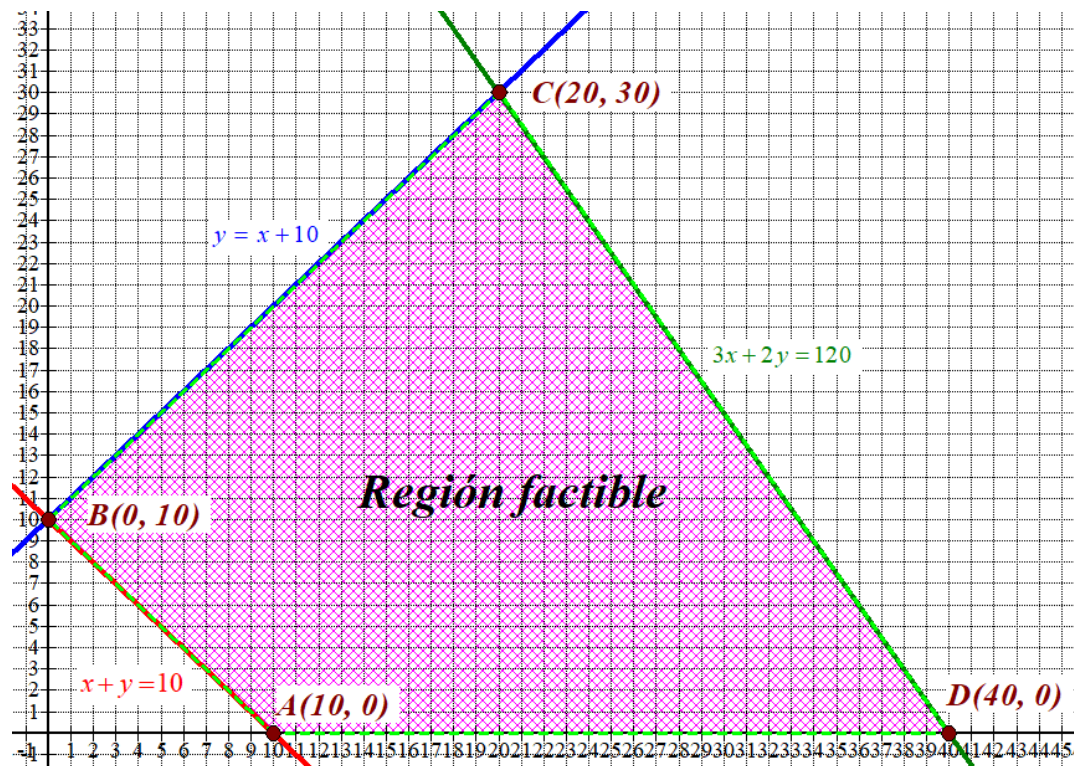
Como las restricciones son

$$\left. \begin{array}{l} x + y \geq 10 \\ y \leq x + 10 \\ 3x + 2y \leq 120 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \text{ la región factible es la región del primer}$$

cuadrante situada por debajo de las rectas verde y azul, y por encima de la recta roja. Comprobamos que el punto $P(10, 10)$ perteneciente a esta región cumple todas las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 10 + 10 \geq 10 \\ 10 \leq 10 + 10 \\ 30 + 20 \leq 120 \\ 10 \geq 0; 10 \geq 0 \end{array} \right\} \text{ ¡Se cumplen todas!}$$

La región factible es la región sombreada del siguiente dibujo.



(b) La función objetivo son los beneficios que vienen expresados por la función

$$B(x, y) = 130x + 140y$$

Valoramos la función objetivo en cada vértice de la región factible en busca del valor máximo.

$$A(10, 0) \rightarrow B(10, 0) = 130 \cdot 10 + 140 \cdot 0 = 1300$$

$$B(0, 10) \rightarrow B(0, 10) = 130 \cdot 0 + 140 \cdot 10 = 1400$$

$$C(20, 30) \rightarrow B(20, 30) = 130 \cdot 20 + 140 \cdot 30 = 6800 \text{ ¡Máximo!}$$

$$D(40, 0) \rightarrow B(40, 0) = 130 \cdot 40 + 140 \cdot 0 = 5200$$

El beneficio máximo tiene un valor de 6800 euros y se consiguen con 20 envases A y 30 envases B.

2. Sean las funciones $f(x) = x^2 + 2x - 8$ y $g(x) = -x^2 + 4$.

- (a) Representar el recinto acotado por las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$, estudiando los puntos de intersección con los ejes, máximos, mínimos y los puntos donde ambas funciones se cruzan.
 (b) Calcular el área de dicho recinto.

(a) Puntos de intersección con los ejes.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = x^2 + 2x - 8 \\ \text{Eje OY} \rightarrow x = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f(0) = 0^2 + 2 \cdot 0 - 8 = -8 \Rightarrow \boxed{A(0, -8)}$$

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = x^2 + 2x - 8 \\ \text{Eje OX} \rightarrow y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x^2 + 2x - 8 = 0 \Rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 + 32}}{2} = \frac{-2 \pm 6}{2} =$$

$$= \begin{cases} \frac{-2+6}{2} = 2 = x \rightarrow \boxed{B(2, 0)} \\ \frac{-2-6}{2} = -4 = x \rightarrow \boxed{C(-4, 0)} \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} g(x) = -x^2 + 4 \\ \text{Eje OY} \rightarrow x = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow g(0) = -0^2 + 4 = 4 \Rightarrow \boxed{P(0, 4)}$$

$$\left. \begin{array}{l} g(x) = -x^2 + 4 \\ \text{Eje OX} \rightarrow y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow -x^2 + 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \sqrt{4} = \pm 2 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{B(2, 0)} \\ \boxed{Q(-2, 0)} \end{cases}$$

Máximos, mínimos.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = x^2 + 2x - 8 \Rightarrow f'(x) = 2x + 2 \\ f'(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 2x + 2 = 0 \Rightarrow x + 1 = 0 \Rightarrow \boxed{x = -1}$$

$$f''(x) = 2 \Rightarrow f''(-1) = 2 > 0 \Rightarrow \boxed{x = -1 \text{ es mínimo relativo de } f(x)}$$

Como $f(-1) = (-1)^2 + 2(-1) - 8 = -9$ el vértice de la parábola y mínimo relativo de la función es el punto de coordenadas $V(-1, -9)$.

$$\left. \begin{array}{l} g(x) = -x^2 + 4 \Rightarrow g'(x) = -2x \\ g'(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow -2x = 0 \Rightarrow \boxed{x = 0}$$

$$g''(x) = -2 \Rightarrow g''(0) = -2 < 0 \Rightarrow \boxed{x = 0 \text{ es máximo relativo de } g(x)}$$

Como $g(0) = -0^2 + 4 = 4$ el vértice de la parábola y máximo relativo de la función es el punto de coordenadas $P(0, 4)$.

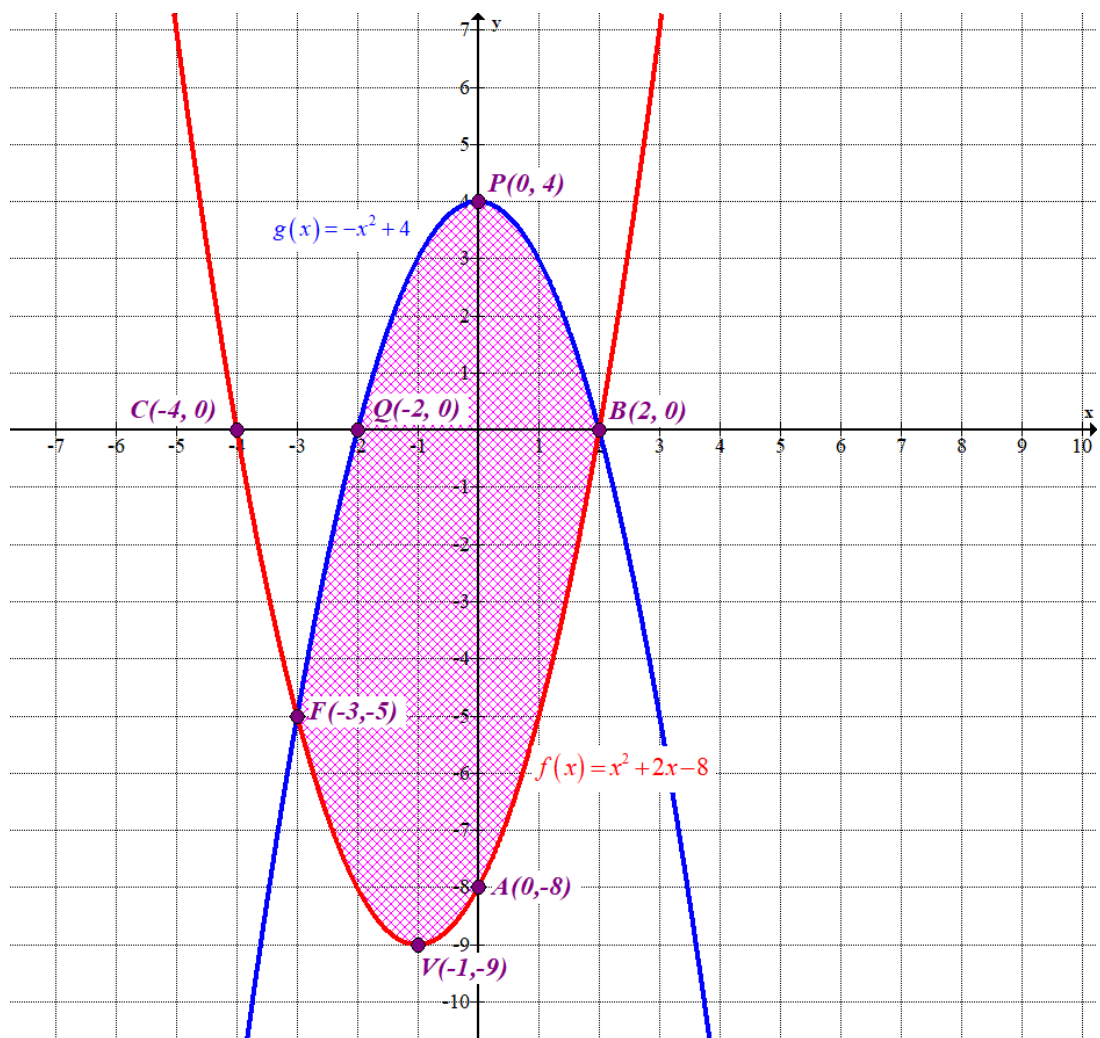
Puntos donde ambas funciones se cruzan.

$$g(x) = f(x) \Rightarrow -x^2 + 4 = x^2 + 2x - 8 \Rightarrow 2x^2 + 2x - 12 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 + 24}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2} = \begin{cases} \frac{-1+5}{2} = \boxed{2=x} \\ \frac{-1-5}{2} = \boxed{-3=x} \end{cases}$$

Como $g(-3) = -(-3)^2 + 4 = -5$ y $g(2) = -2^2 + 4 = 0$ las funciones se cortan en los puntos $F(-3, -5)$ y $B(2, 0)$.

Dibujamos las gráficas de las dos funciones remarcando la región del plano limitada por ellas.



- (b) El área del recinto coloreado es grande. Contando cuadraditos contiene más de 30 cuadraditos, es decir, es mayor de 30 unidades cuadradas. Calculamos su valor exacto usando el cálculo integral.

Como en el intervalo $[-3, 2]$ se cumple que $g(x) \geq f(x)$ el valor del área es la integral definida entre -3 y 2 de la diferencia entre las dos funciones: $g(x) - f(x)$.

$$\int_{-3}^2 g(x) - f(x) dx = \int_{-3}^2 -x^2 + 4 - (x^2 + 2x - 8) dx = \int_{-3}^2 -x^2 + 4 - x^2 - 2x + 8 dx =$$

$$\begin{aligned} &= \int_{-3}^2 -2x^2 - 2x + 12 dx = \left[-2\frac{x^3}{3} - x^2 + 12x \right]_{-3}^2 = \\ &= \left[-2\frac{2^3}{3} - 2^2 + 12 \cdot 2 \right] - \left[-2\frac{(-3)^3}{3} - (-3)^2 + 12(-3) \right] = \\ &= -\frac{16}{3} - 4 + 24 - 18 + 9 + 36 = \boxed{\frac{125}{3} \simeq 41.6667 \text{ u}^2} \end{aligned}$$

El recinto acotado por las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$ tiene un área de $\frac{125}{3} \simeq 41.6667$ unidades cuadradas.

3. Una multinacional realiza operaciones comerciales en tres mercados A, B y C. El 20% de las operaciones corresponden al mercado B y en los mercados A y C realiza el mismo número de operaciones. Los retrasos en el pago se producen en un 15%, el 10% y el 5% de las operaciones realizadas en los mercados A, B y C, respectivamente.

(a) Calcule el porcentaje de operaciones de la multinacional en las que se producen retrasos en los pagos.

(b) ¿Qué porcentaje de transacciones con pagos atrasados se realizaron en el mercado A?

(a) Supongamos que se realizan 1000 operaciones comerciales en los tres mercados.

El 20% de las operaciones corresponden al mercado B, estas serían $0.20 \cdot 1000 = 200$ operaciones.

Las restantes $1000 - 200 = 800$ se realizan a partes iguales en los mercados A y C, lo que supone que se realizan 400 operaciones en cada uno de los mercados A y C.

El 15% de las operaciones realizadas en el mercado A (400) sufren retrasos en los pagos, esto significa $0.15 \cdot 400 = 60$ operaciones con retrasos en el pago en el mercado A.

El 10% de las operaciones realizadas en el mercado B (200) sufren retrasos en los pagos, esto significa $0.10 \cdot 200 = 20$ operaciones con retrasos en el pago en el mercado B.

El 5% de las operaciones realizadas en el mercado C (400) sufren retrasos en los pagos, esto significa $0.05 \cdot 400 = 20$ operaciones con retrasos en el pago en el mercado C.

Colocamos todos estos datos en una tabla.

	Operaciones con retraso en los pagos	Operaciones sin retraso en los pagos	
Mercado A	60		400
Mercado B	20		200
Mercado C	20		400
TOTALES			1000

Completamos la tabla.

	Operaciones con retraso en los pagos	Operaciones sin retraso en los pagos	
Mercado A	60	340	400
Mercado B	20	180	200
Mercado C	20	380	400
TOTALES	100	900	1000

Utilizando los datos de la tabla respondemos a las preguntas planteadas.

(a) De las 1000 operaciones sufren retrasos en los pagos en 100 de ellas. El porcentaje de operaciones de la multinacional en las que se producen retrasos en los pagos es de

$$\frac{100}{1000} = 0.1 = 10\%.$$

(b) De las 100 operaciones que sufren retrasos en los pagos 60 son del mercado A.

El porcentaje de transacciones con pagos que sufren retrasos que se realizaron en el mercado

$$A \text{ es del } \frac{60}{100} = 0.6 = 60\%$$

4. El tiempo de formación, en horas, que necesita un empleado de una empresa para poder trabajar en una nueva planta sigue una distribución $N(\mu, \sigma = 15)$.
- (a) Elegida una muestra de 36 empleados de la empresa, se obtiene el intervalo de confianza $(321.1, 330.9)$ para la media μ . Calcular el tiempo medio de formación de los empleados de la muestra y el nivel de confianza con el que se construyó el intervalo.
- (b) Supongamos que el tiempo de formación, en horas, que necesita un empleado de esa empresa para poder trabajar en la nueva planta sigue una distribución $N(\mu = 326, \sigma = 15)$. Calcule la probabilidad de que el tiempo medio de formación no supera las 330 horas, en muestras de 36 empleados.

- (a) X = El tiempo de formación, en horas, que necesita un empleado de una empresa para poder trabajar en una nueva planta. $X \approx N(\mu, 15)$

El tamaño de la muestra es $n = 36$. El intervalo de confianza es $(321.1, 330.9)$.

La media muestral es el valor central del intervalo de confianza.

$$\bar{x} = \frac{330.9 + 321.1}{2} = 326 \text{ horas}$$

El error de estimación es la mitad de la amplitud del intervalo de confianza.

$$Error = \frac{330.9 - 321.1}{2} = 4.9 \text{ horas}$$

Determinamos el valor de $z_{\alpha/2}$.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 4.9 = z_{\alpha/2} \cdot \frac{15}{\sqrt{36}} \Rightarrow 4.9 = z_{\alpha/2} \cdot 2.5 \Rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{4.9}{2.5} = 1.96$$

Determinamos el nivel de confianza.

$$z_{\alpha/2} = 1.96 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Busco en la tabla} \\ \text{de la } N(0,1) \end{array} \right\} \Rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.975 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.025 \Rightarrow \alpha = 0.05 \Rightarrow 1 - \alpha = 0.95$$

El nivel de confianza con que se ha construido el intervalo es del 95 %.

- (b) X = El tiempo de formación, en horas, que necesita un empleado de una empresa para poder trabajar en una nueva planta. $X \approx N(326, 15)$.

La distribución de las medias muestrales de tamaño 36 sigue una distribución normal con la misma media (326 horas) y con desviación típica $\sigma = \frac{15}{\sqrt{36}} = 2.5$ horas. $\bar{X}_{36} = N(326, 2.5)$

Nos piden calcular $P(\bar{X}_{36} \leq 330)$.

$$P(\bar{X}_{36} \leq 330) = \{ \text{Tipificamos} \} = P\left(Z \leq \frac{330 - 326}{2.5}\right) = P(Z \leq 1.6) =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = \boxed{0.9452}$$

La probabilidad de que el tiempo medio de formación no supere las 330 horas, en muestras de 36 empleados es de 0.9452.