



**Proba de Avaliación do Bacharelato
para o Acceso á Universidade
XUÑO 2018**

Código: 40

MATEMÁTICAS APLICADAS ÁS CIENCIAS SOCIAIS II

(Responde solamente a los ejercicios de una de las opciones. Puntuación máxima de los ejercicios de cada opción: ejercicio 1 = 3 puntos, ejercicio 2 = 3 puntos, ejercicio 3 = 2 puntos, ejercicio 4 = 2 puntos)

OPCIÓN A

1. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & -c \end{pmatrix}$

Calcula las matrices $B - C$ y $A \cdot B$. Calcula los valores de a , b y c que verifican $B - C = A \cdot B$.

2. Dada la función $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$.

- a) Calcula la primitiva F de f verificando que $F(2) = 1$. b) Estudia el crecimiento y decrecimiento y representa la función f .
c) Calcula el área limitada por la curva $f(x)$ y el eje X entre $x = 0$ y $x = 2$.

3. El peso (en gramos) de las empanadas que salen del horno sigue una distribución normal con una desviación típica de 120 gramos. Si se establece el intervalo (1499,9; 1539,1) como el intervalo de confianza para la media de una muestra de 144 empanadas a) ¿cuál es el valor de la media muestral?, ¿con qué nivel de confianza se construyó el intervalo? b) ¿Cuántas empanadas, como mínimo, deberíamos pesar para que el nivel de confianza del intervalo anterior sea del 99%?

4. En una empresa, el 20% de los trabajadores tiene más de 30 años, el 8% ocupa un puesto directivo y el 6% tiene más de 30 años y ocupa un cargo directivo. a) ¿Qué porcentaje de trabajadores tiene más de 30 años y no desempeña ningún cargo directivo? b) ¿Qué porcentaje de trabajadores no es directivo ni mayor de 30 años? c) Si la empresa tiene 100 trabajadores, ¿cuántos son directivos y no tienen más de 30 años?

OPCIÓN B

1. Una panadería utiliza harina y nata para hacer dos tipos de galletas: blandas y duras. Tiene 160 kilogramos de harina y 100 kilogramos de nata. Para hacer una galleta blanda necesitas 250 gramos de harina y 250 gramos de nata y para hacer una galleta dura necesitas 400 gramos de harina y 100 gramos de nata. Además, el número de galletas blandas fabricadas deben exceder el número de galletas duras en al menos 100 unidades. Si las galletas blandas se venden por 6€ y las galletas duras por 4,5€,

- a) Formula un problema que controle la fabricación de galletas maximizando las ventas.
b) Representa la región factible c) ¿Qué cantidad de cada tipo se debe fabricar para maximizar dichas ventas? ¿A cuánto ascienden?

2. El salario diario de un joven durante los primeros cinco años en una determinada empresa se ajusta a la siguiente función, donde t representa el tiempo, en años, que lleva contratado:

$$S(t) = \begin{cases} 35 & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ 25 + 10t & \text{si } 1 \leq t < 2 \\ -0.5t^2 + 4t + 39 & \text{si } 2 \leq t \leq 5 \end{cases}$$

a) Estudia el crecimiento y decrecimiento de la función salarial y representarla. b) ¿En qué momento recibió un salario máximo? ¿Y mínimo? Calcula estos salarios.

3. El 30% de los estudiantes de secundaria practican baloncesto. Entre los que practican baloncesto, el 40% practica también tenis. Entre los que no practican baloncesto, una cuarta parte practica tenis. Elegido un estudiante de ese instituto al azar, a) ¿Cuál es la probabilidad de que practique ambos deportes? b) ¿Cuál es la probabilidad de que practique tenis? c) ¿Son independientes los sucesos “practicar tenis” y “practicar baloncesto”?

4. Un consumidor cree que el peso medio de un producto es diferente al indicado en el envase. Para estudiar este hecho, el consumidor toma una muestra aleatoria simple de 100 productos en los que se observó un peso promedio de 245 g. También se supone que el peso del producto por paquete sigue una distribución normal con una desviación típica de 9 g.

a) Construya un intervalo de confianza para el peso medio de ese producto con un 95% de confianza.

b) ¿Cuál sería el tamaño de muestra mínimo necesario para estimar el verdadero peso medio a partir de la media muestral con un error de estimación máximo de 2g y un nivel de confianza del 90%?

SOLUCIONES**OPCIÓN A**

1. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & -c \end{pmatrix}$

Calcula las matrices $B - C$ y $A \cdot B$. Calcula los valores de a , b y c que verifican $B - C = A \cdot B$.

Calculamos las matrices $B - C$ y $A \cdot B$.

$$B - C = \begin{pmatrix} b & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & -c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & 1-c \\ 0 & -1+c \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & 1-a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Resolvemos la ecuación $B - C = A \cdot B$.

$$B - C = A \cdot B \Rightarrow \begin{pmatrix} b & 1-c \\ 0 & -1+c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & 1-a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} b = b \\ 1-c = 1-a \\ 0 = 0 \\ -1+c = 1 \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} c = a \\ \boxed{c = 2} \end{matrix} \right\} \Rightarrow \boxed{a = 2}$$

Los valores que cumplen lo pedido son $a = c = 2$, b puede ser cualquier número real.

2. Dada la función $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$.

- a) Calcula la primitiva F de f verificando que $F(2) = 1$. b) Estudia el crecimiento y decrecimiento y representa la función f.
c) Calcula el área limitada por la curva f(x) y el eje X entre $x = 0$ y $x = 2$.

a) Calculamos la integral indefinida de la función f(x).

$$F(x) = \int f(x) dx = \int x^3 - 3x^2 + 2x dx = \frac{x^4}{4} - x^3 + x^2 + K$$

Determinamos el valor de K usando que $F(2) = 1$.

$$\left. \begin{array}{l} F(x) = \frac{x^4}{4} - x^3 + x^2 + K \\ F(2) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow 1 = \frac{2^4}{4} - 2^3 + 2^2 + K \Rightarrow 1 = 4 - 8 + 4 + K \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 = K \Rightarrow \boxed{F(x) = \frac{x^4}{4} - x^3 + x^2 + 1}$$

La primitiva buscada es $F(x) = \frac{x^4}{4} - x^3 + x^2 + 1$.

b) Utilizamos la derivada para encontrar los puntos críticos de la función.

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = 3x^2 - 6x + 2 \\ f'(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 3x^2 - 6x + 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 24}}{6} \Rightarrow$$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{12}}{6} = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{3} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{3 + \sqrt{3}}{3} \approx 1.57 \\ \frac{3 - \sqrt{3}}{3} \approx 0.42 \end{array} \right.$$

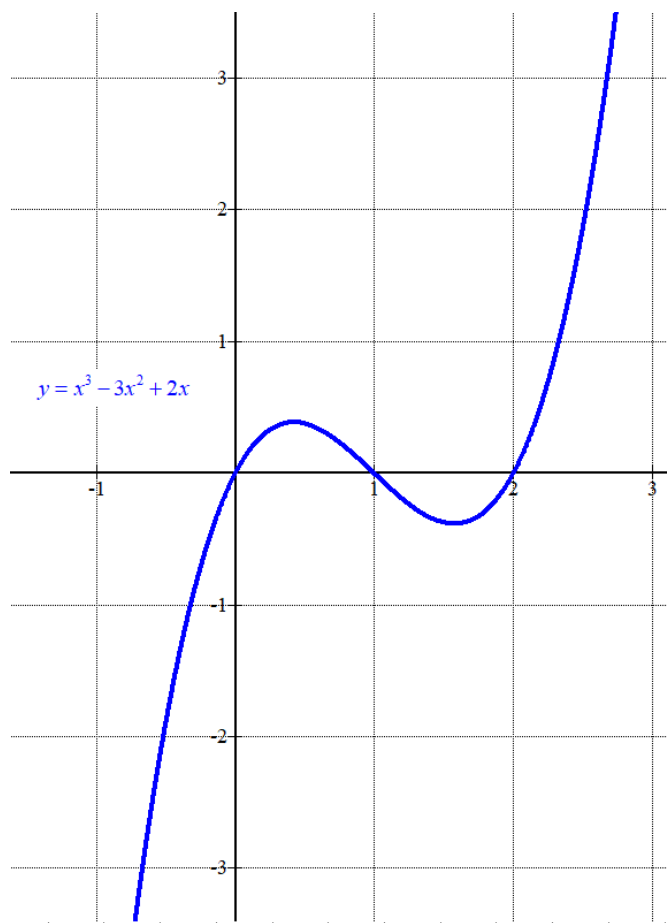
Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos dos puntos críticos obtenidos.

- En el intervalo $(-\infty, 0.42)$ tomamos $x = 0$ y la derivada vale $f'(0) = 3 \cdot 0^2 - 6 \cdot 0 + 2 = 2 > 0$. La función crece en $(-\infty, 0.42)$.
- En el intervalo $(0.42, 1.57)$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale $f'(1) = 3 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 + 2 = -1 < 0$. La función decrece en $(0.42, 1.57)$.
- En el intervalo $(1.57, +\infty)$ tomamos $x = 2$ y la derivada vale $f'(2) = 3 \cdot 2^2 - 6 \cdot 2 + 2 = 2 > 0$. La función crece en $(1.57, +\infty)$.

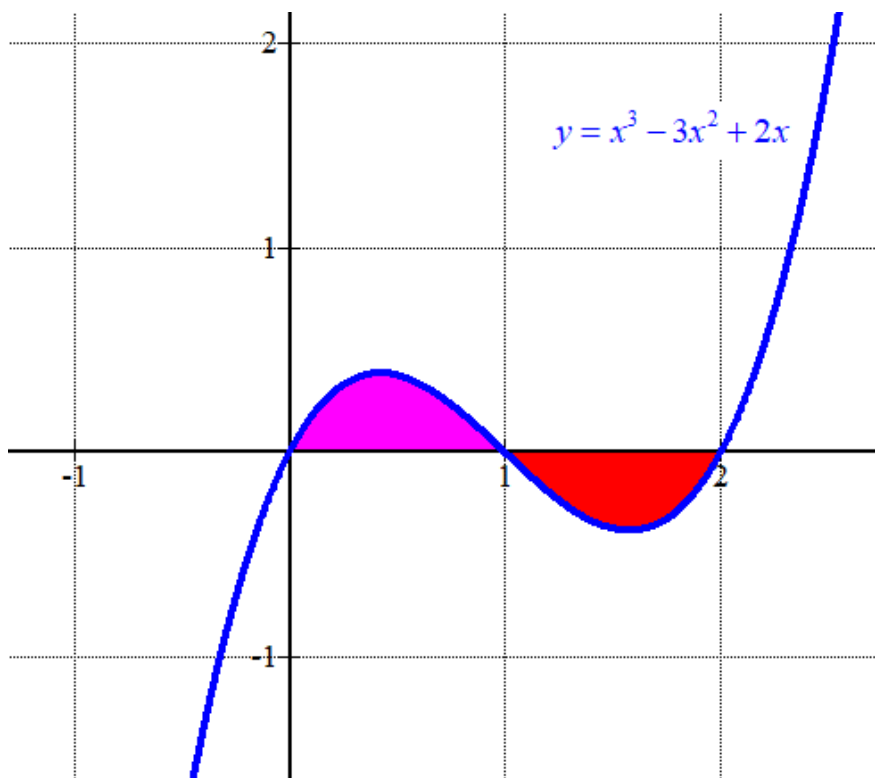
La función crece en $(-\infty, 0.42) \cup (1.57, +\infty)$ y decrece en $(0.42, 1.57)$.

Hacemos una tabla de valores y dibujamos la gráfica de la función.

x	$y = x^3 - 3x^2 + 2x$
0	0
$\frac{3-\sqrt{3}}{3}$	0.38
1	0
$\frac{3+\sqrt{3}}{3}$	-0.38
2	0



c) Nos piden hallar el área de la zona rayada del dibujo.



Contando cuadraditos de 1 unidad cuadrada observamos que el área es muy pequeña (menor que 1 unidad). El área la calculamos usando dos integrales definidas: una entre 0 y 1, la otra entre 1 y 2.

$$\text{Área 1} = \int_0^1 x^3 + 3x^2 + 2x = \left[\frac{x^4}{4} - x^3 + x^2 \right]_0^1 = \left[\frac{1^4}{4} - 1^3 + 1^2 \right] - \left[\frac{0^4}{4} - 0^3 + 0^2 \right] = \frac{1}{4} u^2$$

$$\text{Área 2} = \left| \int_1^2 x^3 + 3x^2 + 2x \right| = \left| \left[\frac{x^4}{4} - x^3 + x^2 \right]_1^2 \right| = \left| \left[\frac{2^4}{4} - 2^3 + 2^2 \right] - \left[\frac{1^4}{4} - 1^3 + 1^2 \right] \right| = \frac{1}{4} u^2$$

$$\text{Área total} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} u^2$$

El área limitada por la curva $f(x)$ y el eje X entre $x = 0$ y $x = 2$ tiene un valor de 0.5 unidades cuadradas.

3. El peso (en gramos) de las empanadas que salen del horno sigue una distribución normal con una desviación típica de 120 gramos. Si se establece el intervalo (1499,9; 1539,1) como el intervalo de confianza para la media de una muestra de 144 empanadas a) ¿cuál es el valor de la media muestral?, ¿con qué nivel de confianza se construyó el intervalo? b) ¿Cuántas empanadas, como mínimo, deberíamos pesar para que el nivel de confianza del intervalo anterior sea del 99%?

a) X = El peso (en gramos) de las empanadas que salen del horno.

$$X \approx N(\mu, 120)$$

El tamaño de la muestra es $n = 144$. El intervalo de confianza es (1499.9, 1539.1).

La media muestral es el valor central del intervalo de confianza.

$$\bar{x} = \frac{1499.9 + 1539.1}{2} = 1519.5 \text{ gramos}$$

El error de estimación es la mitad de la amplitud del intervalo de confianza.

$$Error = \frac{1539.1 - 1499.9}{2} = 19.6 \text{ gramos}$$

Determinamos el valor de $z_{\alpha/2}$ usando la fórmula del error.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 19.6 = z_{\alpha/2} \cdot \frac{120}{\sqrt{144}} \Rightarrow 19.6 = z_{\alpha/2} \cdot 10 \Rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{19.6}{10} = 1.96$$

Determinamos el nivel de confianza partiendo de que $z_{\alpha/2} = 1.96$.

$$z_{\alpha/2} = 1.96 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Busco en la tabla} \\ \text{de la } N(0,1) \end{array} \right\} \Rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.975 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.025 \Rightarrow \alpha = 0.05 \Rightarrow 1 - \alpha = 0.95$$

El nivel de confianza es del 95 %.

b) Determinamos el valor de $z_{\alpha/2}$ para un nivel de confianza del 99%.

$$1 - \alpha = 0.99 \Rightarrow \alpha = 0.01 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.005 \Rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.995 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Busco en la} \\ \text{tabla } N(0,1) \end{array} \right\} \Rightarrow z_{\alpha/2} = 2.575$$

Queremos que el error siga siendo 19.6 gramos. Utilizamos la fórmula del error para despejar el valor de n .

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 19.6 = 2.575 \cdot \frac{120}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = \frac{2.575 \cdot 120}{19.6} \Rightarrow n = \left(\frac{2.575 \cdot 120}{19.6} \right)^2 \approx 248.54$$

Para que el nivel de confianza del intervalo anterior sea del 99% deberíamos pesar, como mínimo 249 empanadas.

4. En una empresa, el 20% de los trabajadores tiene más de 30 años, el 8% ocupa un puesto directivo y el 6% tiene más de 30 años y ocupa un cargo directivo. a) ¿Qué porcentaje de trabajadores tiene más de 30 años y no desempeña ningún cargo directivo? b) ¿Qué porcentaje de trabajadores no es directivo ni mayor de 30 años? c) Si la empresa tiene 100 trabajadores, ¿cuántos son directivos y no tienen más de 30 años?

Ponemos los datos proporcionados en una tabla de contingencia.

	Cargo directivo	No cargo directivo	
Más de 30 años	6		20
Menores de 30 años			
	8		100

Completamos la tabla.

	Cargo directivo	No cargo directivo	
Más de 30 años	6	14	20
Menores de 30 años	2	78	80
	8	92	100

Con estos datos respondemos a las preguntas planteadas.

- a) Un 14 % de los trabajadores tiene más de 30 años y no desempeña ningún cargo directivo.
- b) Un 78 % de los trabajadores no es directivo ni mayor de 30 años.
- c) De los 100 trabajadores 2 son directivos y no tienen más de 30 años.

OPCIÓN B

1. Una panadería utiliza harina y nata para hacer dos tipos de galletas: blandas y duras. Tiene 160 kilogramos de harina y 100 kilogramos de nata. Para hacer una galleta blanda necesitas 250 gramos de harina y 250 gramos de nata y para hacer una galleta dura necesitas 400 gramos de harina y 100 gramos de nata. Además, el número de galletas blandas fabricadas deben exceder el número de galletas duras en al menos 100 unidades. Si las galletas blandas se venden por 6€ y las galletas duras por 4,5€,

- a) Formula un problema que controle la fabricación de galletas maximizando las ventas.
 b) Representa la región factible c) ¿Qué cantidad de cada tipo se debe fabricar para maximizar dichas ventas? ¿A cuánto ascienden?

- a) Llamemos x = número de galletas blandas, y = número de galletas duras.
 Realizamos una tabla con los datos.

	Kg de harina	Kg de nata	Ventas
Nº galletas blandas (x)	$0.25x$	$0.25x$	$6x$
Nº galletas duras (y)	$0.4y$	$0.1y$	$4.5y$
TOTALES	$0.25x + 0.4y$	$0.25x + 0.1y$	$6x + 4.5y$

Establecemos las inecuaciones que representan las restricciones:

- Tiene 160 kilogramos de harina y 100 kilogramos de nata $\rightarrow$
 $0.25x + 0.4y \leq 160$; $0.25x + 0.1y \leq 100$.
- El número de galletas blandas fabricadas deben exceder el número de galletas duras en al menos 100 unidades $\rightarrow x \geq 100 + y$.
- Las cantidades deben ser positivas $\rightarrow x \geq 0$; $y \geq 0$.

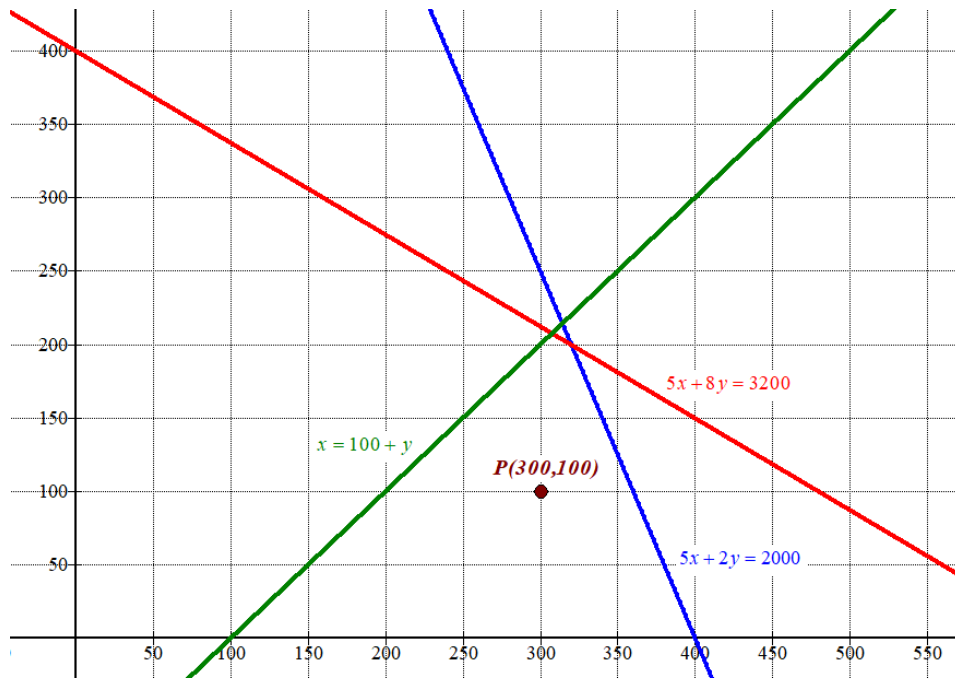
Reunimos las restricciones en un sistema de inecuaciones.

$$\left. \begin{array}{l} 0.25x + 0.4y \leq 160 \\ 0.25x + 0.1y \leq 100 \\ x \geq 100 + y \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 25x + 40y \leq 16000 \\ 25x + 10y \leq 10000 \\ x \geq 100 + y \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 5x + 8y \leq 3200 \\ 5x + 2y \leq 2000 \\ x \geq 100 + y \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

La función objetivo son las ventas $V(x, y) = 6x + 4.5y$ que deseamos maximizar.

- b) Dibujamos las rectas asociadas a las restricciones.

x	$y = \frac{3200 - 5x}{8}$	x	$y = \frac{2000 - 5x}{2}$	x	$y = x - 100$	$x \geq 0; y \geq 0$ Primer cuadrante
0	400	0	1000	100	0	
400	150	200	500	200	100	
640	0	400	0	300	200	

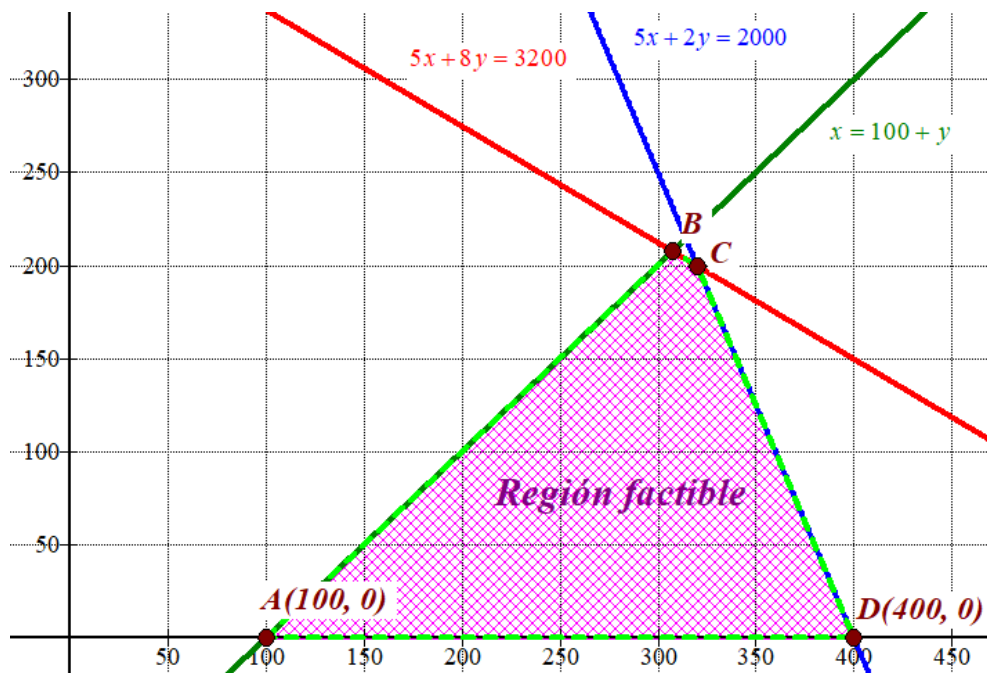


Las restricciones son $\left. \begin{array}{l} 5x + 8y \leq 3200 \\ 5x + 2y \leq 2000 \\ x \geq 100 + y \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$. La región factible es la región del primer cuadrante

situada por debajo de las rectas verde, azul y roja. Comprobamos que el punto $P(300, 100)$ perteneciente a esta región cumple todas las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 5 \cdot 300 + 8 \cdot 100 \leq 3200 \\ 5 \cdot 300 + 2 \cdot 100 \leq 2000 \\ 300 \geq 100 + 100 \\ 300 \geq 0; 100 \geq 0 \end{array} \right\} \text{ ¡Se cumplen todas! }$$

La región factible es la región sombreada del siguiente dibujo.



c) Debemos determinar las coordenadas de los puntos B y C.

$$B \rightarrow \begin{cases} x = 100 + y \\ 5x + 8y = 3200 \end{cases} \Rightarrow 5(100 + y) + 8y = 3200 \Rightarrow 500 + 5y + 8y = 3200 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 13y = 2700 \Rightarrow y = \frac{2700}{13} \Rightarrow x = 100 + \frac{2700}{13} = \frac{4000}{13} \Rightarrow B\left(\frac{4000}{13}, \frac{2700}{13}\right)$$

$$C \rightarrow \begin{cases} 5x + 2y = 2000 \\ 5x + 8y = 3200 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x = 2000 - 2y \\ 5x + 8y = 3200 \end{cases} \Rightarrow 2000 - 2y + 8y = 3200 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6y = 1200 \Rightarrow y = \frac{1200}{6} = 200 \Rightarrow 5x = 2000 - 400 = 1600 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{1600}{5} = 320 \Rightarrow C(320, 200)$$

Valoramos la función objetivo $V(x, y) = 6x + 4.5y$ en cada vértice de la región factible en busca del valor máximo.

$$A(100, 0) \rightarrow V(100, 0) = 6 \cdot 100 + 4.5 \cdot 0 = 600$$

$$B\left(\frac{4000}{13}, \frac{2700}{13}\right) \rightarrow V\left(\frac{4000}{13}, \frac{2700}{13}\right) = 6 \cdot \frac{4000}{13} + 4.5 \cdot \frac{2700}{13} \approx 2780.769$$

$$C(320, 200) \rightarrow V(320, 200) = 6 \cdot 320 + 4.5 \cdot 200 = \mathbf{2820 \text{ ¡Máximo!}}$$

$$D(400, 0) \rightarrow V(400, 0) = 6 \cdot 400 + 4.5 \cdot 0 = 2400$$

Los máximos ingresos por ventas son 2820 euros y se consiguen con 320 galletas blandas y 200 duras.

2. El salario diario de un joven durante los primeros cinco años en una determinada empresa se ajusta a la siguiente función, donde t representa el tiempo, en años, que lleva contratado:

$$S(t) = \begin{cases} 35 & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ 25 + 10t & \text{si } 1 \leq t < 2 \\ -0.5t^2 + 4t + 39 & \text{si } 2 \leq t \leq 5 \end{cases}$$

a) Estudia el crecimiento y decrecimiento de la función salarial y representarla. b) ¿En qué momento recibió un salario máximo? ¿Y mínimo? Calcula estos salarios.

a) La función en el intervalo $[0,1)$ tiene la expresión $S(t) = 35$. Es constante.

La función en el intervalo $(1,2)$ tiene la expresión $S(t) = 25 + 10t$. Es una función lineal con pendiente 10 positiva y por tanto creciente.

La función en el intervalo $(2,5)$ tiene la expresión $S(t) = -0.5t^2 + 4t + 39$. Es una función parabólica. Buscamos su vértice (máximo o mínimo).

$$\left. \begin{array}{l} S'(t) = -t + 4 \\ S'(t) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow -t + 4 = 0 \Rightarrow \boxed{t = 4}$$

- En el intervalo $(2,4)$ tomamos $t = 3$ y la derivada vale $S'(3) = -3 + 4 = 1 > 0$. La función crece en $(2,4)$.
- En el intervalo $(4,5)$ tomamos $t = 4.5$ y la derivada vale $S'(4.5) = -4.5 + 4 = -0.5 < 0$. La función decrece en $(4,5)$.

Estudiamos la continuidad en los cambios de definición: $t = 1$ y $t = 2$.

- En $t = 1$.

$$\left. \begin{array}{l} S(1) = 25 + 10 = 35 \\ \lim_{t \rightarrow 1^-} S(t) = \lim_{t \rightarrow 1^-} 35 = 35 \\ \lim_{t \rightarrow 1^+} S(t) = \lim_{t \rightarrow 1^+} 25 + 10t = 35 \end{array} \right\} \Rightarrow S(1) = \lim_{t \rightarrow 1^-} S(t) = \lim_{t \rightarrow 1^+} S(t) = 35$$

La función es continua en $t = 1$.

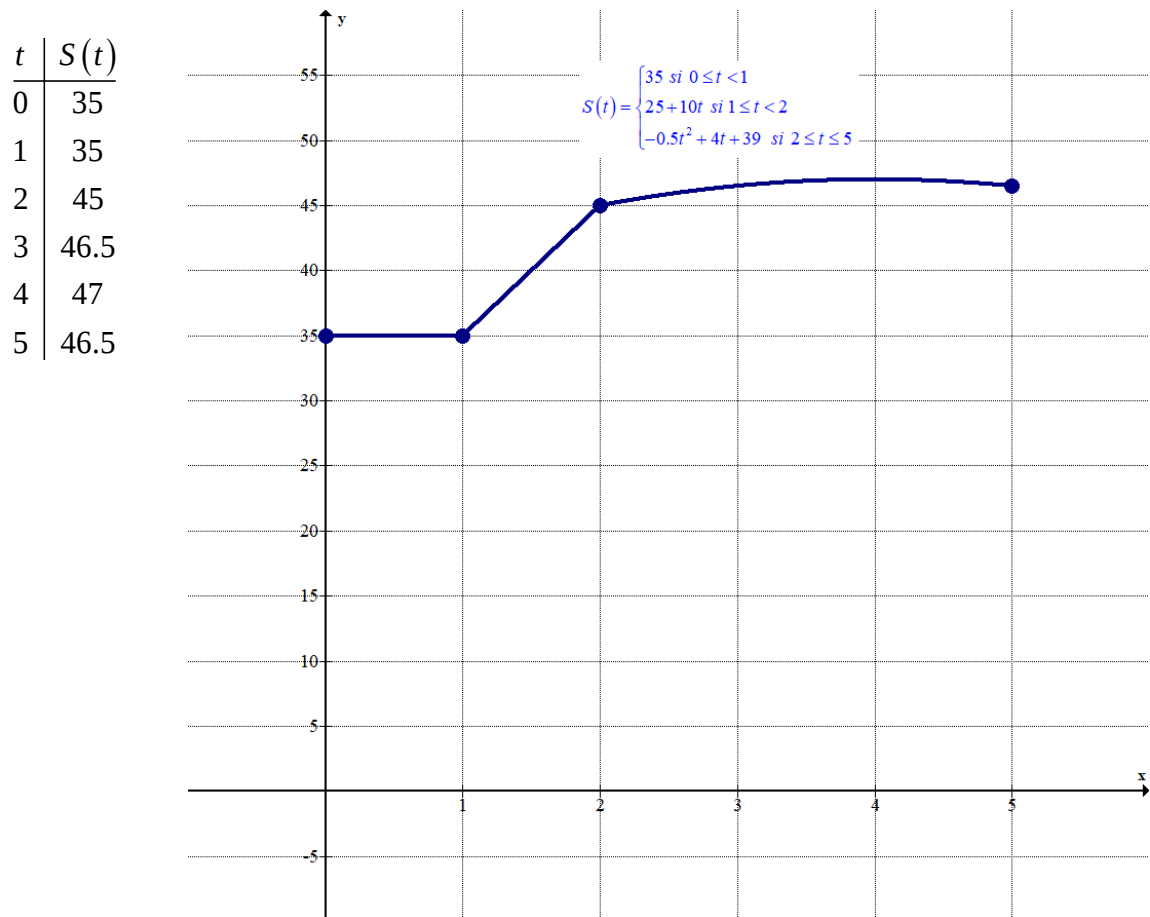
- En $t = 2$.

$$\left. \begin{array}{l} S(2) = -0.5 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 + 39 = 45 \\ \lim_{t \rightarrow 2^-} S(t) = \lim_{t \rightarrow 2^-} 25 + 10t = 45 \\ \lim_{t \rightarrow 2^+} S(t) = \lim_{t \rightarrow 2^+} -0.5t^2 + 4t + 39 = 45 \end{array} \right\} \Rightarrow S(2) = \lim_{t \rightarrow 2^-} S(t) = \lim_{t \rightarrow 2^+} S(t) = 45$$

La función es continua en $t = 2$.

La función es constante en $[0,1)$, crece en $(1,4)$ y decrece en $(4,5)$.

Hacemos una tabla de valores y representamos su gráfica.



- b) Observando la gráfica y con los datos de la tabla podemos decir que el salario máximo se produce en el año 4 siendo este salario máximo de 47 euros al día. El salario mínimo se produce durante el primer año, siendo este salario mínimo de 35 euros al día.

3. El 30% de los estudiantes de secundaria practican baloncesto. Entre los que practican baloncesto, el 40% practica también tenis. Entre los que no practican baloncesto, una cuarta parte practica tenis. Elegido un estudiante de ese instituto al azar, a) ¿Cuál es la probabilidad de que practique ambos deportes? b) ¿Cuál es la probabilidad de que practique tenis? c) ¿Son independientes los sucesos “practicar tenis” y “practicar baloncesto”?

Pasamos estos datos porcentuales a valores absolutos.

Supongamos que son 200 los estudiantes de secundaria.

Hay $0.3 \cdot 200 = 60$ estudiantes que practican baloncesto. Los restantes $200 - 60 = 140$ no practican baloncesto.

Entre los que practican baloncesto (60), el 40% practica también tenis, es decir, $0.40 \cdot 60 = 24$ practican baloncesto y tenis.

Entre los que no practican baloncesto (140), una cuarta parte practica tenis, es decir, $\frac{1}{4} \cdot 140 = 35$ practica tenis y no baloncesto.

Ponemos todos estos datos en una tabla.

	Baloncesto	No baloncesto	
Tenis	24	35	
No tenis			
TOTALES	60	140	200

Completamos la tabla.

	Baloncesto	No baloncesto	
Tenis	24	35	59
No tenis	36	105	141
TOTALES	60	140	200

Utilizando los datos de la tabla y la regla de Laplace respondemos a las preguntas planteadas en el ejercicio.

a) Hay 200 estudiantes y 24 practican los dos deportes. La probabilidad de que al elegir un estudiante al azar practique ambos deportes vale $\frac{24}{200} = 0.12$.

b) Hay 200 estudiantes y 59 practican tenis. La probabilidad de que al elegir un estudiante al azar practique tenis vale $\frac{59}{200} = 0.295$.

c) Llamamos T al suceso “practicar tenis” y B al suceso “practicar baloncesto”.

Para que los sucesos T y B sean independientes debe cumplirse $P(T \cap B) = P(T)P(B)$.

$$\left. \begin{array}{l} P(T \cap B) = 0.12 \\ P(T)P(B) = \frac{59}{200} \cdot \frac{60}{200} = 0.0885 \end{array} \right\} \Rightarrow P(T \cap B) = 0.12 \neq 0.0885 = P(T)P(B)$$

Como las probabilidades son distintas los sucesos no son independientes.

4. Un consumidor cree que el peso medio de un producto es diferente al indicado en el envase. Para estudiar este hecho, el consumidor toma una muestra aleatoria simple de 100 productos en los que se observó un peso promedio de 245 g. También se supone que el peso del producto por paquete sigue una distribución normal con una desviación típica de 9 g.

- a) Construya un intervalo de confianza para el peso medio de ese producto con un 95% de confianza.
 b) ¿Cuál sería el tamaño de muestra mínimo necesario para estimar el verdadero peso medio a partir de la media muestral con un error de estimación máximo de 2g y un nivel de confianza del 90%?

a) X = El peso (en gramos) de un producto.

$$X \approx N(\mu, 9)$$

El tamaño de la muestra es $n = 100$. La media muestral es $\bar{x} = 245$ gramos.

Determinamos el valor de $z_{\alpha/2}$ para un nivel de confianza del 95%.

$$1 - \alpha = 0,95 \Rightarrow \alpha = 0,05 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,025 \Rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,975 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Busco en la} \\ \text{tabla } N(0,1) \end{array} \right\} \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1.96$$

Determinamos el error de estimación.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{9}{\sqrt{100}} = 1.764 \text{ gramos}$$

El intervalo de confianza es:

$$(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error) = (245 - 1.764, 245 + 1.764) = (243.236, 246.764)$$

b) Determinamos el valor de $z_{\alpha/2}$ para un nivel de confianza del 90%.

$$1 - \alpha = 0,90 \Rightarrow \alpha = 0,1 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,05 \Rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,95 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Busco en la} \\ \text{tabla } N(0,1) \end{array} \right\} \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1.645$$

Queremos que el error sea de 2 gramos. Utilizamos la fórmula del error para despejar el valor de n .

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 2 = 1.645 \cdot \frac{9}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = \frac{1.645 \cdot 9}{2} \Rightarrow n = \left(\frac{1.645 \cdot 9}{2} \right)^2 \approx 54.79$$

Para que el error de estimación sea como máximo de 2g con un nivel de confianza del 90% la muestra debe ser de un mínimo de 55 productos.