



**Proba de Avaliación do Bacharelato
para o Acceso á Universidade
SETEMBRO 2018**

Código: 40

MATEMÁTICAS APLICADAS ÁS CIENCIAS SOCIAIS II

(Responde solamente a los ejercicios de una de las opciones. Puntuación máxima de los ejercicios de cada opción: ejercicio 1 = 3 puntos, ejercicio 2 = 3 puntos, ejercicio 3 = 2 puntos, ejercicio 4 = 2 puntos)

OPCIÓN A

1. Las ventas de tres productos P1, P2 y P3, relacionados entre sí, dan lugar al siguiente sistema de ecuaciones lineales $x + y + z = 6$; $x + y - z = 0$; $2x - y + z = 3$, siendo x, y, z las ventas de los productos P1, P2 y P3 respectivamente

a) Expresa el sistema en forma matricial $AX = B$. b) Calcula la matriz inversa de A, siendo A la matriz cuadrada de orden 3 de los coeficientes. c) Calcule las ventas x, y, z de esos tres productos.

2. Un nuevo producto tiene una demanda en miles de unidades que corresponde aproximadamente a la función $N(t) = 5 + 20t / (1 + t^2)$, $t \geq 0$ en meses.

a) Estudia el crecimiento y decrecimiento de la demanda. Calcula la demanda máxima y el momento en que se alcanza. b) Evalúa la tendencia a largo plazo y representa la función. c) Después del máximo, ¿la demanda bajaría de 11.000 unidades? ¿Cuándo?

3. En una empresa el 30% de los empleados son mujeres y el 70% restante son hombres. De las mujeres, el 80% tiene contrato indefinido, mientras que del grupo de hombres, sólo el 70% tiene ese tipo de contrato. a) Calcula el porcentaje de personas de dicha empresa que tienen contrato indefinido. b) Si un empleado tiene un contrato indefinido obtén la probabilidad de que sea mujer. c) ¿Son independientes los sucesos “ser hombre” y “tener contrato indefinido”?

4. En un estanque se desea estimar el porcentaje de peces dorados. Para ello se toma una muestra aleatoria de 700 peces y se descubre que exactamente 70 de ellos son dorados.

a) Encuentre, con un nivel de confianza del 99%, un intervalo para estimar la proporción de peces dorados en el estanque b) En el intervalo anterior, ¿cuánto vale el error de estimación? c) Considerando esta muestra, ¿qué pasaría con el error de estimación si aumentase el nivel de confianza? Justifica la respuesta.

OPCIÓN B

1. Un centro comercial tiene en stock 750 reproductores de DVD en el almacén A y otros 600 en el almacén B. Si se quiere tener al menos 900 reproductores en tienda y que los del almacén A no superen el triple de los del B:

a) Formule el problema y represente gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Se podrían enviar 400 unidades desde cada almacén? b) Si los costes unitarios de envío son 0,30 euros por unidad para el almacén A y 0,25 euros para unidad para el almacén B, ¿cuántas unidades deben enviarse desde cada almacén para minimizar el costo del transporte? ¿A cuánto ascendería ese costo?

2. Un gimnasio abre al público a principios de 2008, la función $G(t) = \begin{cases} 10(5t - t^2) & \text{si } 0 \leq t \leq 4 \\ 80 - 10t & \text{si } 4 < t \leq 10 \end{cases}$

indica cómo han evolucionado sus ingresos (en miles de euros) en función del tiempo t (en años) transcurrido desde su apertura, correspondiendo $t = 0$ a principios de 2008.

- a) Estudia en qué períodos se produjo un aumento y en cuáles hubo una disminución en sus ganancias
- b) ¿A cuánto ascendieron las ganancias máximas? ¿En qué año se obtuvieron?
- c) Representa la gráfica de la función $G(t)$. ¿En algún año posterior a su apertura no se obtuvieron ganancias? ¿A partir de algún año dejó de ser rentable el gimnasio? ¿cuándo?

3. En una población de cada 200 consumidores de una bebida isotónica, 60 consumen la marca A, 50 la marca B y el resto la marca C. Además, el 30% de los consumidores de A, el 20% de los consumidores de B y el 40% de los consumidores de C son jóvenes. a) Se selecciona al azar un consumidor de dicha bebida en esa población, ¿cuál es la probabilidad de que sea joven?

b) Si se seleccionó a un joven, encuentre la probabilidad de que consuma la marca B. c) ¿Son independientes los sucesos "ser joven" y "consumir la marca A"?

4. Una empresa quiere racionalizar el gasto en telefonía móvil de sus agentes comerciales. Para ello se hace un estudio sobre una muestra de dichos agentes y se obtiene: "con un 95% de confianza, el gasto medio mensual en telefonía móvil está entre 199,71 y 220,29 euros". Suponiendo que el gasto en telefonía móvil es una variable normal a) Calcule el gasto medio de la muestra y el error cometido en la estimación. b) Si la desviación estándar es 42 euros, ¿cuál es el tamaño de la muestra?

SOLUCIONES**OPCIÓN A**

1. Las ventas de tres productos P1, P2 y P3, relacionados entre sí, dan lugar al siguiente sistema de ecuaciones lineales $x + y + z = 6$; $x + y - z = 0$; $2x - y + z = 3$, siendo x , y , z las ventas de los productos P1, P2 y P3 respectivamente

a) Expresa el sistema en forma matricial $AX = B$. b) Calcula la matriz inversa de A , siendo A la matriz cuadrada de orden 3 de los coeficientes. c) Calcule las ventas x , y , z de esos tres productos.

a) El sistema es $\left. \begin{array}{l} x + y + z = 6 \\ x + y - z = 0 \\ 2x - y + z = 3 \end{array} \right\}$. Lo expresamos de forma matricial.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 6 \\ x + y - z = 0 \\ 2x - y + z = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow AX = B$$

Donde $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ es la matriz de los coeficientes, la matriz de las incógnitas es

$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ es la matriz de los términos independientes.

b) Comprobamos que la matriz A tiene inversa y la calculamos.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2 - 1 - 2 - 1 - 1 = -6 \neq 0$$

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^T)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}}{-6} = \frac{-1}{6} \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{-1}{6} \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ -3 & -1 & 2 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 1/3 \\ 1/2 & 1/6 & -1/3 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

c) $AX = B \Rightarrow X = A^{-1}B$. Hallamos la expresión de X .

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 1/3 \\ 1/2 & 1/6 & -1/3 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3-1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Las ventas del producto P1 es 1 unidad, de P2 son 2 unidades y de P3 son 3 unidades.

2. Un nuevo producto tiene una demanda en miles de unidades que corresponde aproximadamente a la función $N(t) = 5 + 20t / (1 + t^2)$, $t \geq 0$ en meses.

a) Estudia el crecimiento y decrecimiento de la demanda. Calcula la demanda máxima y el momento en que se alcanza. b) Evalúa la tendencia a largo plazo y representa la función. c) Después del máximo, ¿la demanda bajaría de 11.000 unidades? ¿Cuándo?

a) Utilizamos la derivada para obtener los puntos críticos de la función.

$$N(t) = 5 + \frac{20t}{1+t^2} \Rightarrow N'(t) = \frac{20(1+t^2) - 2t \cdot 20t}{(1+t^2)^2} = \frac{20 + 20t^2 - 40t^2}{(1+t^2)^2} = \frac{20 - 20t^2}{(1+t^2)^2}$$

$$N'(t) = 0 \Rightarrow \frac{20 - 20t^2}{(1+t^2)^2} = 0 \Rightarrow 20 - 20t^2 = 0 \Rightarrow 1 - t^2 = 0 \Rightarrow t^2 = 1 \Rightarrow t = \sqrt{1} = \pm 1$$

Solo tenemos en cuenta como punto crítico $t = 1$. Estudiamos el signo de la derivada antes y después de este valor.

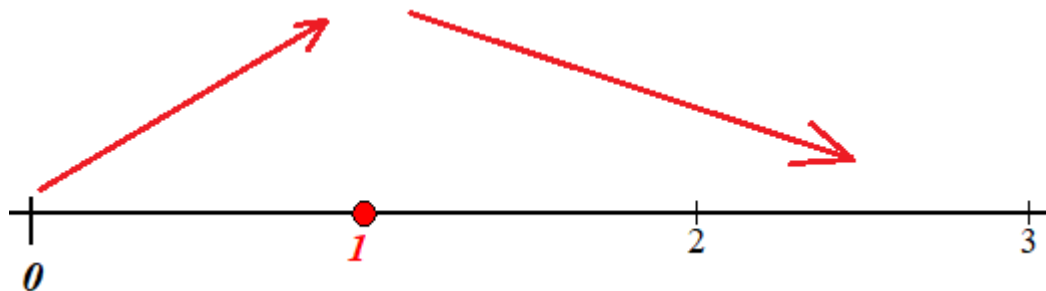
- En el intervalo $[0, 1)$ tomamos $t = 0.5$ y la derivada vale

$$N'(0.5) = \frac{20 - 20 \cdot 0.5^2}{(1 + 0.5^2)^2} = 9.6 > 0. \text{ La función crece en } [0, 1).$$

- En el intervalo $(1, +\infty)$ tomamos $t = 2$ y la derivada vale

$$N'(2) = \frac{20 - 20 \cdot 2^2}{(1 + 2^2)^2} = -2.4 < 0. \text{ La función decrece en } (1, +\infty).$$

La demanda crece durante el primer mes y decrece durante los siguientes meses.



La función demanda tiene un máximo en $t = 1$. Como $N(1) = 5 + 20 / (1 + 1^2) = 15$ podemos afirmar que la demanda máxima es de 15000 unidades y se produce el primer mes.

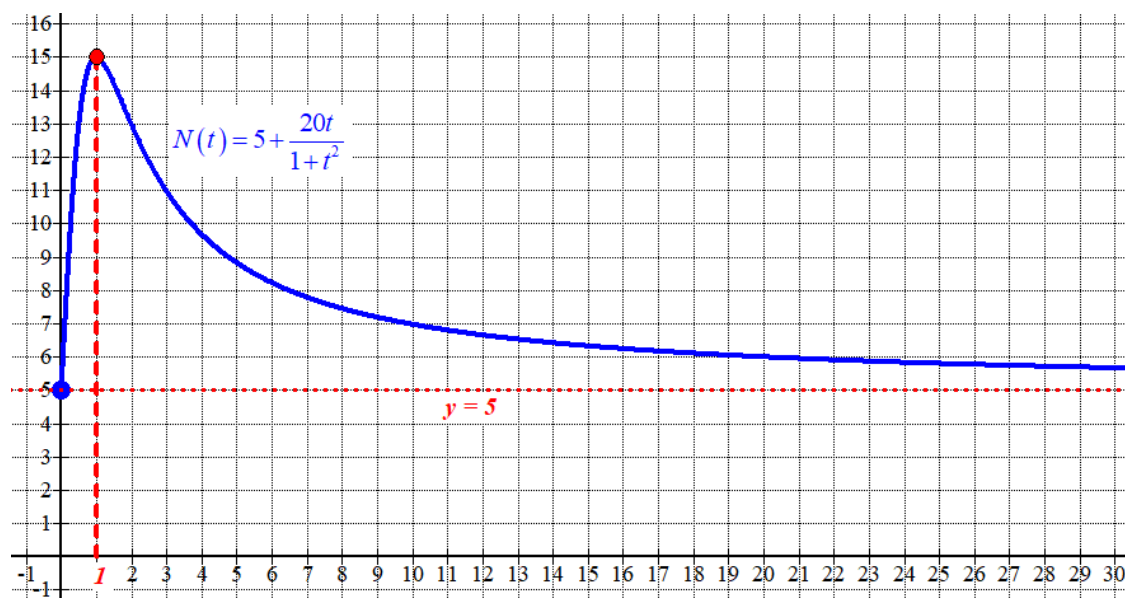
b) Calculamos el límite de la función cuando t tiende a $+\infty$.

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} N(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} 5 + \frac{20t}{1+t^2} = \lim_{t \rightarrow +\infty} 5 + \frac{\frac{20}{t}}{\frac{1}{t^2} + 1} = \lim_{t \rightarrow +\infty} 5 + \frac{\frac{20}{\frac{1}{t^2} + 1}}{\frac{1}{t^2} + 1} = 5 + \frac{\frac{20}{\frac{1}{\infty} + 1}}{\frac{1}{\infty} + 1} = 5 + \frac{0}{0+1} = 5$$

La tendencia de la demanda es de 5000 unidades.

Hacemos una tabla y dibujamos la gráfica de la función.

t	$N(t) = 5 + \frac{20t}{1+t^2}$
0	5
1	15
2	13
3	11



- c) Averiguamos en que momento la demanda alcanza el valor 11. Observando la gráfica, debe ser en $t = 3$. Lo comprobamos.

$$N(t) = 11 \Rightarrow 5 + \frac{20t}{1+t^2} = 11 \Rightarrow \frac{20t}{1+t^2} = 6 \Rightarrow 20t = 6 + 6t^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6t^2 - 20t + 6 = 0 \Rightarrow t = \frac{20 \pm \sqrt{(-20)^2 - 4 \cdot 6 \cdot 6}}{12} = \frac{20 \pm 16}{12} = \begin{cases} \frac{20+16}{12} = 3 = t \\ \frac{20-16}{12} = \frac{1}{3} = t \end{cases}$$

Después del máximo $t = 1$ la demanda alcanza el valor de 11000 unidades en el mes 3, a partir de ese momento la demanda va disminuyendo siendo menor de 11000 unidades.

3. En una empresa el 30% de los empleados son mujeres y el 70% restante son hombres. De las mujeres, el 80% tiene contrato indefinido, mientras que del grupo de hombres, sólo el 70% tiene ese tipo de contrato. a) Calcula el porcentaje de personas de dicha empresa que tienen contrato indefinido. b) Si un empleado tiene un contrato indefinido obtén la probabilidad de que sea mujer. c) ¿Son independientes los sucesos “ser hombre” y “tener contrato indefinido”?

Supongamos que hay 100 empleados en la empresa. Pasamos los datos porcentuales a valores absolutos.

Hay 30 mujeres y 70 hombres.

Hay 30 mujeres. El 80% de las mujeres tienen contrato indefinido, es decir, $0.8 \cdot 30 = 24$ mujeres tienen contrato indefinido y las 6 restantes no lo tienen.

Hay 70 hombres. El 70 % tiene contrato indefinido, es decir, $0.7 \cdot 70 = 49$ hombres tienen contrato indefinido y los 21 restantes no lo tienen.

Colocamos todos estos datos en una tabla de contingencia.

	Hombres	Mujeres	
Con contrato indefinido	49	24	
Sin contrato indefinido	21	6	
TOTALES	70	30	100

Completamos la tabla.

	Hombres	Mujeres	
Con contrato indefinido	49	24	73
Sin contrato indefinido	21	6	27
TOTALES	70	30	100

Utilizando los datos y aplicando la regla de Laplace respondemos a las preguntas del ejercicio.

- a) Contrato indefinido tienen $49 + 24 = 73$ empleados de los 100. Un 73 % de los empleados tienen contrato indefinido.
- b) Hay 73 empleados con contrato indefinido y de ellos 24 son mujeres. La probabilidad de que al elegir un empleado con contrato indefinido este sea mujer es de $\frac{24}{73} \approx 0.3288$.
- c) Llamamos H al suceso “ser hombre” y C al suceso “tener contrato indefinido”. Para que sean independientes debe cumplirse $P(H \cap C) = P(H)P(C)$.

$$\left. \begin{aligned} P(H \cap C) &= \frac{49}{100} = 0.49 \\ P(H)P(C) &= \frac{70}{100} \cdot \frac{73}{100} = 0.511 \end{aligned} \right\} \Rightarrow P(H \cap C) = 0.49 \neq 0.511 = P(H)P(C)$$

Al ser distintas las probabilidades los sucesos “ser hombre” y “tener contrato indefinido” no son independientes.

4. En un estanque se desea estimar el porcentaje de peces dorados. Para ello se toma una muestra aleatoria de 700 peces y se descubre que exactamente 70 de ellos son dorados.

a) Encuentre, con un nivel de confianza del 99%, un intervalo para estimar la proporción de peces dorados en el estanque b) En el intervalo anterior, ¿cuánto vale el error de estimación? c) Considerando esta muestra, ¿qué pasaría con el error de estimación si aumentase el nivel de confianza? Justifica la respuesta.

a) La proporción muestral es $p = \frac{70}{700} = 0.1$ y el tamaño de la muestra es $n = 700$.

Para un nivel de confianza del 99% determinamos el valor de $z_{\alpha/2}$.

$$1 - \alpha = 0.99 \rightarrow \alpha = 0.01 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.005 \rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.995 \rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{2.57 + 2.58}{2} = 2.575$$

Utilizamos la fórmula del error para obtener la amplitud del intervalo de confianza.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = 2.575 \cdot \sqrt{\frac{0.1 \cdot 0.9}{700}} \simeq 0.0292$$

El intervalo de confianza es:

$$(p - Error, p + Error) = (0.1 - 0.0292, 0.1 + 0.0292) = (0.0708, 0.1292)$$

Con un nivel de confianza del 99% el porcentaje de peces dorados en el estanque se sitúa entre el 7.08 % y el 12.92 %.

b) El error de estimación vale 0.0292. Es un error de estimación del 2.92 %.

c) Si aumentase el nivel de confianza aumenta el valor de $z_{\alpha/2}$. Y como consecuencia

$$\text{aumentaría el } Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}.$$

OPCIÓN B

1. Un centro comercial tiene en stock 750 reproductores de DVD en el almacén A y otros 600 en el almacén B. Si se quiere tener al menos 900 reproductores en tienda y que los del almacén A no superen el triple de los del B:

a) Formule el problema y represente gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Se podrían enviar 400 unidades desde cada almacén? b) Si los costes unitarios de envío son 0,30 euros por unidad para el almacén A y 0,25 euros para unidad para el almacén B, ¿cuántas unidades deben enviarse desde cada almacén para minimizar el costo del transporte? ¿A cuánto ascendería ese costo?

a) Llamemos x = número de reproductores que se envían desde el almacén A, y = número de reproductores que se envían desde el almacén B.

Establecemos las inecuaciones que representan las restricciones:

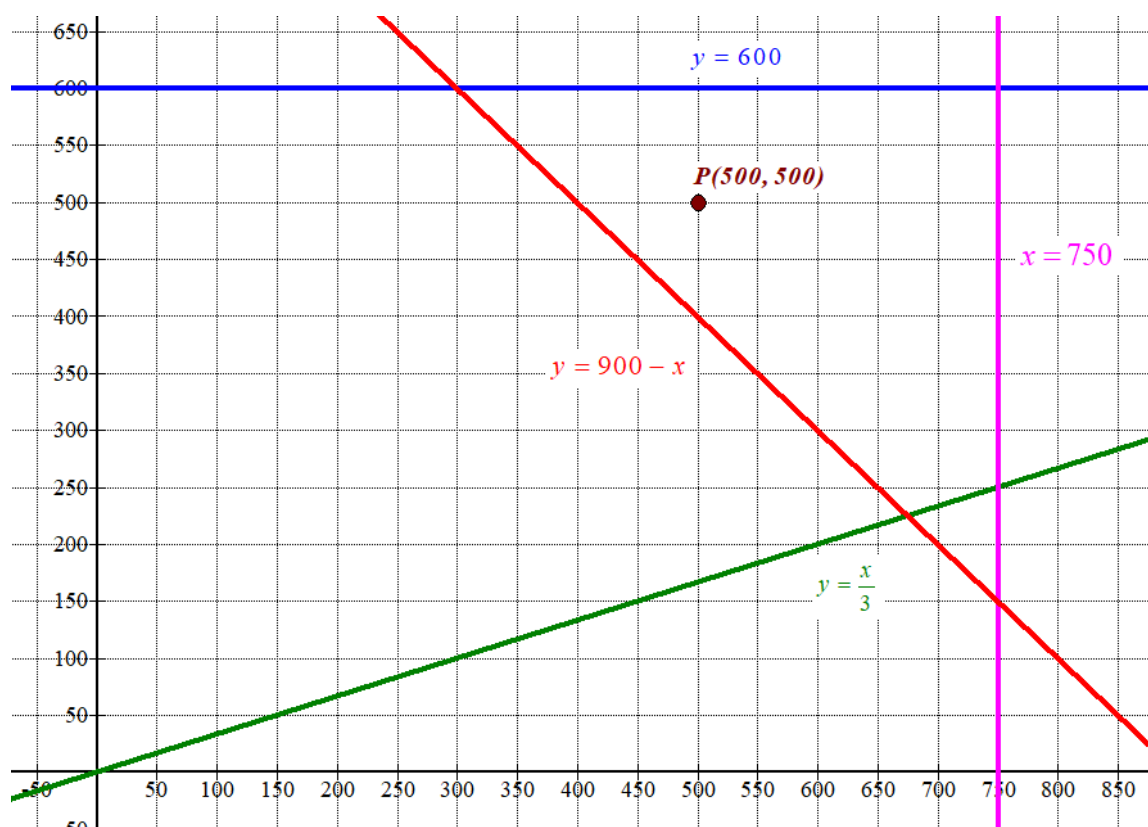
- Un centro comercial tiene en stock 750 reproductores de DVD en el almacén A y otros 600 en el almacén B $\rightarrow x \leq 750; y \leq 600$.
- Se quiere tener al menos 900 reproductores en tienda $\rightarrow x + y \geq 900$.
- Los reproductores del almacén A no superen el triple de los del B $\rightarrow x \leq 3y$.
- Las cantidades deben ser positivas $\rightarrow x \geq 0; y \geq 0$.

Reunimos las restricciones en un sistema de inecuaciones.

$$\left. \begin{array}{l} x \leq 750 \\ y \leq 600 \\ x + y \geq 900 \\ x \leq 3y \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

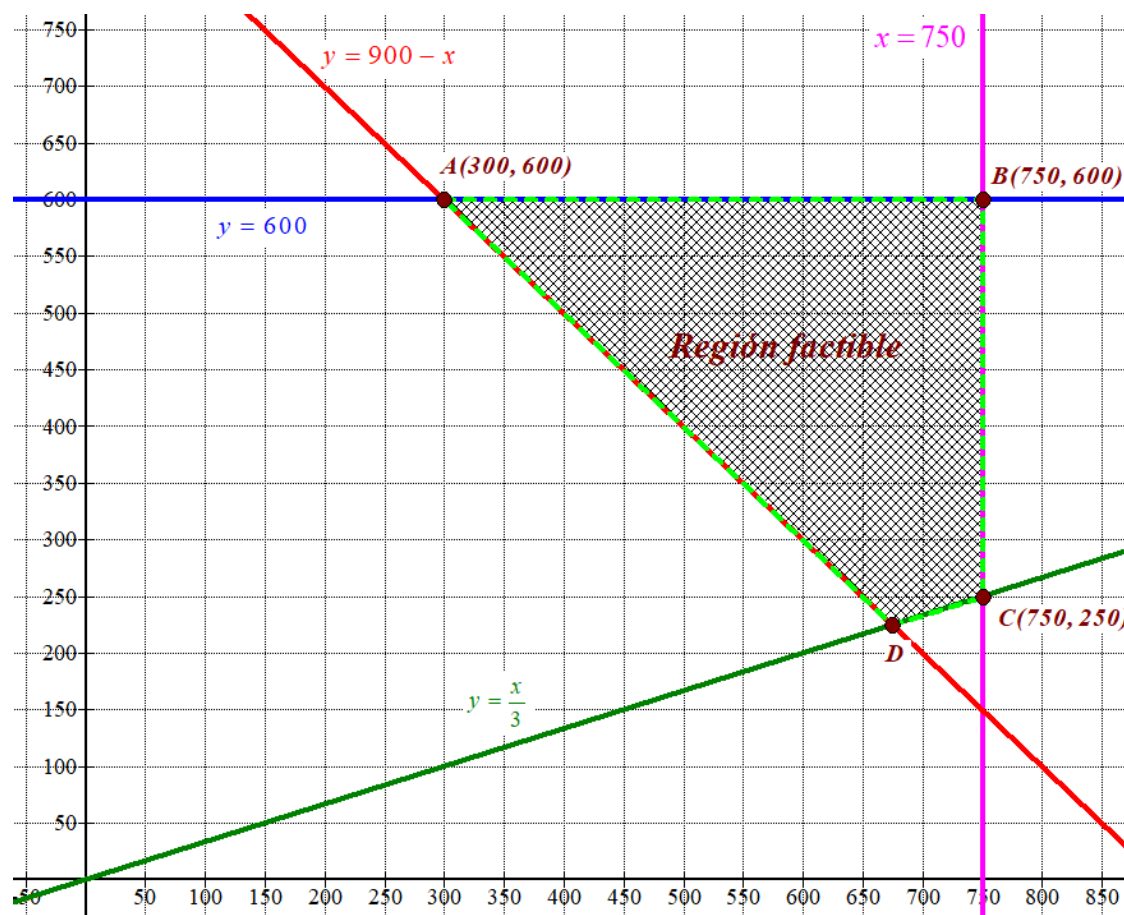
Dibujamos las rectas asociadas a las restricciones.

$x = 750$	y	x	$y = 600$	x	$y = 900 - x$	x	$y = \frac{x}{3}$
750	250	0	600	0	900	0	0
750	600	300	600	300	600	675	225
		750	600	675	225	750	250



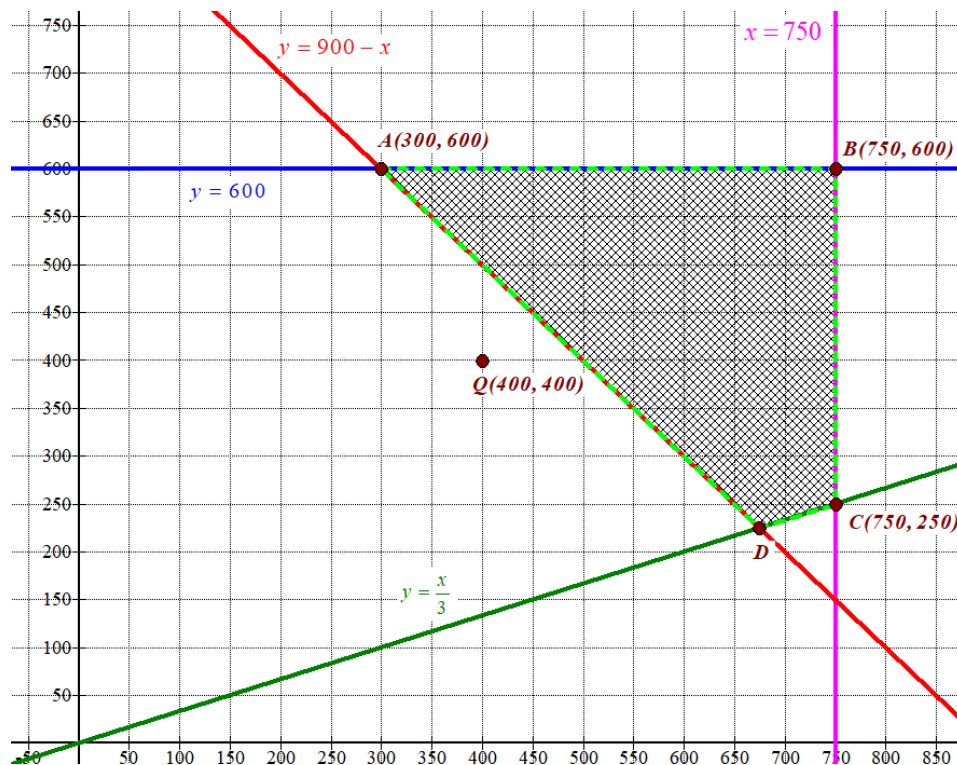
Comprobamos que el punto $P(500, 500)$ cumple todas las restricciones.

La región factible es la región sombreada del siguiente dibujo.



¿Se podrían enviar 400 unidades desde cada almacén?

No, el punto $Q(400, 400)$ no pertenece a la región factible y con esos envíos no se satisfacen todas las restricciones.



Visto de otra manera: con 400 y 400 no se consigue el mínimo de 900 reproductores que debe haber en la tienda.

- b) Si los costes unitarios de envío son 0,30 euros por unidad para el almacén A y 0,25 euros para unidad para el almacén B la función objetivo son los gastos de transporte que deseo minimizar tiene la expresión: $G(x, y) = 0.3x + 0.25y$.

Obtenemos las coordenadas del vértice D de la región factible.

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 900 \\ x = 3y \end{array} \right\} \Rightarrow 3y + y = 900 \Rightarrow 4y = 900 \Rightarrow y = \frac{900}{4} = 225 \Rightarrow x = 3 \cdot 225 = 675$$

El vértice D tiene coordenadas $D(675, 225)$.

Valoramos la función objetivo en cada vértice de la región factible en busca del valor mínimo.

$$A(300, 600) \rightarrow G(300, 600) = 0.3 \cdot 300 + 0.25 \cdot 600 = 240 \text{ ¡Mínimo!}$$

$$B(750, 600) \rightarrow G(750, 600) = 0.3 \cdot 750 + 0.25 \cdot 600 = 375$$

$$C(750, 250) \rightarrow G(750, 250) = 0.3 \cdot 750 + 0.25 \cdot 250 = 287.5$$

$$D(675, 225) \rightarrow G(675, 225) = 0.3 \cdot 675 + 0.25 \cdot 225 = 258.75$$

El gasto mínimo en transporte es de 240 € y se consigue con 300 reproductores del almacén A y 600 del B.

2. Un gimnasio abre al público a principios de 2008, la función $G(t) = \begin{cases} 10(5t - t^2) & \text{si } 0 \leq t \leq 4 \\ 80 - 10t & \text{si } 4 < t \leq 10 \end{cases}$ indica cómo han evolucionado sus ingresos (en miles de euros) en función del tiempo t (en años) transcurrido desde su apertura, correspondiendo $t = 0$ a principios de 2008.
- a) Estudia en qué períodos se produjo un aumento y en cuáles hubo una disminución en sus ganancias
- b) ¿A cuánto ascendieron las ganancias máximas? ¿En qué año se obtuvieron?
- c) Representa la gráfica de la función $G(t)$. ¿En algún año posterior a su apertura no se obtuvieron ganancias? ¿A partir de algún año dejó de ser rentable el gimnasio? ¿cuándo?

a) La función es continua en $t = 4$.

$$\left. \begin{aligned} G(4) &= 10(5 \cdot 4 - 4^2) = 40 \\ \lim_{t \rightarrow 4^-} G(t) &= \lim_{t \rightarrow 4^-} 10(5t - t^2) = 40 \\ \lim_{t \rightarrow 4^+} G(t) &= \lim_{t \rightarrow 4^+} 80 - 10t = 80 - 40 = 40 \end{aligned} \right\} \Rightarrow G(4) = \lim_{t \rightarrow 4^-} G(t) = \lim_{t \rightarrow 4^+} G(t) = 40$$

La función es derivable en $[0, 4) \cup (4, 10]$ siendo la derivada:

$$G'(t) = \begin{cases} 10(5 - 2t) & \text{si } 0 \leq t < 4 \\ -10 & \text{si } 4 < t \leq 10 \end{cases}$$

Averiguamos cuando se anula la derivada.

$$G'(t) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 10(5 - 2t) = 0 \rightarrow 5 - 2t = 0 \rightarrow 2t = 5 \rightarrow t = \frac{5}{2} = 2.5 \in [0, 4) \\ -10 = 0 \quad \text{¡Imposible!} \end{cases}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de $t = 2.5$ (punto crítico) y $t = 4$ (cambio de definición).

- En el intervalo $[0, 2.5)$ tomamos $t = 1$ y la derivada vale $G'(1) = 10(5 - 2) = 30 > 0$. La función crece en $[0, 2.5)$.
- En el intervalo $(2.5, 4)$ tomamos $t = 3$ y la derivada vale $G'(3) = 10(5 - 6) = -10 < 0$. La función decrece en $(2.5, 4)$.
- En el intervalo $(4, 10]$ tomamos $t = 5$ y la derivada vale $G'(5) = -10 < 0$. La función decrece en $(4, 10]$.

Los ingresos han aumentado entre el año 2008 y la mitad del año 2010 y han disminuido desde entonces hasta principios del año 2018.

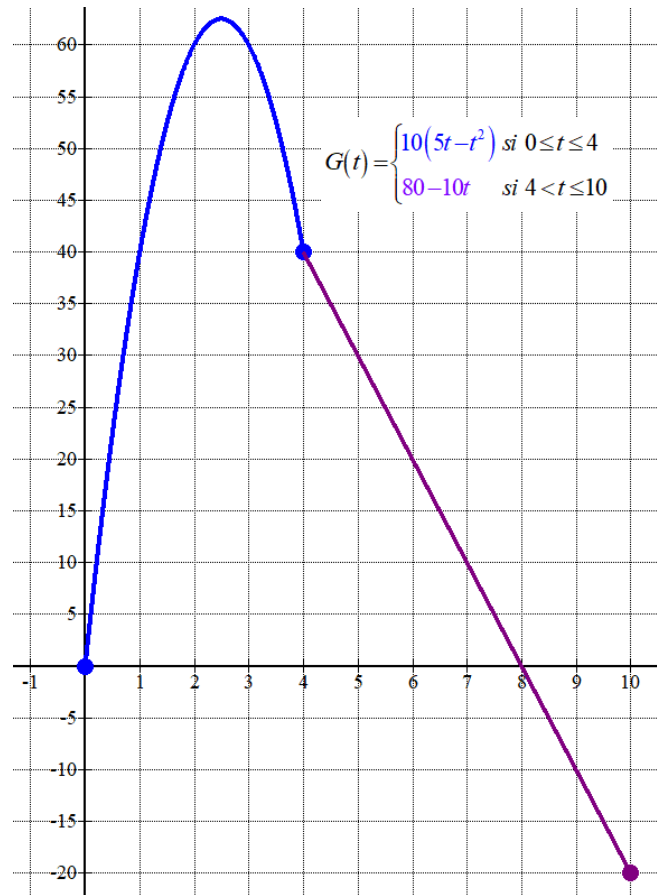
- b) Valoramos las ganancias en el año 0, el 2.5 (máximo relativo) y el año 10 para decidir el máximo absoluto.

$$G(0) = 0 \quad G(2.5) = 10(5 \cdot 2.5 - 2.5^2) = 62.5 \quad G(10) = -20$$

Las ganancias máximas son 62500 euros que se obtienen a mitad del año 2010.

c) Hacemos una tabla de valores y representamos la gráfica de la función.

t	$G(t)$
0	0
2.5	62.5
4	40
10	-20



En el año 8 después de la apertura (2016) no hubo ganancias. A partir de ese año hubo pérdidas y el negocio dejó de ser rentable.

3. En una población de cada 200 consumidores de una bebida isotónica, 60 consumen la marca A, 50 la marca B y el resto la marca C. Además, el 30% de los consumidores de A, el 20% de los consumidores de B y el 40% de los consumidores de C son jóvenes. a) Se selecciona al azar un consumidor de dicha bebida en esa población, ¿cuál es la probabilidad de que sea joven? b) Si se seleccionó a un joven, encuentre la probabilidad de que consuma la marca B. c) ¿Son independientes los sucesos "ser joven" y "consumir la marca A"?

60 personas consumen la marca A. Sabemos que el 30% de los consumidores de A son jóvenes, es decir $0.3 \cdot 60 = 18$ consumidores de la marca A son jóvenes, los $60 - 18 = 42$ restantes no son jóvenes.

50 personas consumen la marca B. Sabemos que el 20% de los consumidores de B son jóvenes, es decir $0.2 \cdot 50 = 10$ consumidores de la marca B son jóvenes, los $50 - 10 = 40$ restantes no son jóvenes.

$200 - 60 - 50 = 90$ personas consumen la marca C. Sabemos que el 40% de los consumidores de C son jóvenes, es decir $0.4 \cdot 90 = 36$ consumidores de la marca C son jóvenes, los $90 - 36 = 54$ restantes no son jóvenes.

Ponemos todos estos datos en una tabla.

	Jóvenes	No jóvenes	
Marca A	18	42	60
Marca B	10	40	50
Marca C	36	54	90
TOTALES			200

Completamos la tabla.

	Jóvenes	No jóvenes	
Marca A	18	42	60
Marca B	10	40	50
Marca C	36	54	90
TOTALES	64	136	200

Con los datos de la tabla y aplicando la regla de Laplace respondemos a las preguntas planteadas en el ejercicio.

a) De los 200 consumidores hay 64 que son jóvenes. La probabilidad de que al elegir un consumidor este sea joven es de $\frac{64}{200} = 0.32$.

b) De los 64 jóvenes hay 18 que consumen la marca A. La probabilidad de que al elegir un joven este consuma la marca B es de $\frac{10}{64} = 0.15625$.

c) Llamamos J al suceso "ser joven" y A a "consumir la marca A". Para que los sucesos A y J sean independientes debe cumplirse $P(A \cap J) = P(A)P(J)$.

$$\left. \begin{aligned} P(A \cap J) &= \frac{18}{200} = 0.09 \\ P(A)P(J) &= \frac{60}{200} \cdot \frac{64}{200} = \frac{12}{125} = 0.096 \end{aligned} \right\} \Rightarrow P(A \cap J) = 0.09 \neq 0.096 = P(A)P(J)$$

Al ser distintas las probabilidades los sucesos "ser joven" y "consumir la marca A" no son independientes.

4. Una empresa quiere racionalizar el gasto en telefonía móvil de sus agentes comerciales. Para ello se hace un estudio sobre una muestra de dichos agentes y se obtiene: "con un 95% de confianza, el gasto medio mensual en telefonía móvil está entre 199,71 y 220,29 euros". Suponiendo que el gasto en telefonía móvil es una variable normal a) Calcule el gasto medio de la muestra y el error cometido en la estimación. b) Si la desviación estándar es 42 euros, ¿cuál es el tamaño de la muestra?

a) X = El gasto en telefonía móvil de sus agentes comerciales.

$$X \approx N(\mu, \sigma)$$

El intervalo de confianza es (199.71, 220.29).

La media muestral es el valor central del intervalo de confianza.

$$\bar{x} = \frac{199.71 + 220.29}{2} = 210 \text{ euros}$$

El error de estimación es la mitad de la amplitud del intervalo de confianza.

$$Error = \frac{220.29 - 199.71}{2} = 10.29 \text{ euros}$$

El gasto medio de la muestra es de 210 euros y el error de estimación es de 10.29 euros.

b) Consideramos $X \approx N(\mu, 42)$.

Determinamos el valor de $z_{\alpha/2}$ para un nivel de confianza del 95 %.

$$1 - \alpha = 0,95 \rightarrow \alpha = 0,05 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,025 \rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,975 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Busco en la tabla} \\ \text{de la } N(0,1) \end{array} \right\} \rightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$$

Utilizamos la fórmula del error para despejar n en su expresión.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 10.29 = 1,96 \cdot \frac{42}{\sqrt{n}} \Rightarrow 10.29\sqrt{n} = 1.96 \cdot 42 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{n} = \frac{1.96 \cdot 42}{10.29} \Rightarrow n = \left(\frac{1.96 \cdot 42}{10.29} \right)^2 = 64$$

El tamaño de la muestra es de 64 agentes.