



**Proba de Avaliación do
Bacharelato
para o Acceso á Universidade
XUÑO 2017**

Código: 20

MATEMÁTICAS II

(Responde só os exercicios dunha das opcións. Puntuación máxima dos exercicios de cada opción:
exercicio 1 = 2 puntos, exercicio 2 = 3 puntos, exercicio 3 = 3 puntos, exercicio 4 = 2 puntos)

OPCIÓN A

1. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,

a) Determina, según los valores de k , el rango de la matriz $AA^t - \lambda I$, siendo A^t la matriz traspuesta de A e I la matriz unidad de orden 2.

b) Determina la matriz $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ que verifica la ecuación matricial $AA^t X = 6X$.

2. a) Calcula: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x - 3x^2}{e^{x^2} - \cos 2x}$

b) Se desea construir una caja de base cuadrada, con tapa y con capacidad de 80 dm^3 . Para la tapa y la superficie lateral se quiere utilizar un material que cuesta 2 €/dm^2 y para la base otro que cuesta 3 €/dm^2 . Calcula las dimensiones de la caja para que su coste sea mínimo.

c) Calcula $\int_0^1 x \ln(1+x) dx$.

3. Dados los planos $\pi_1 : x + y - z + 2 = 0$; $\pi_2 : \begin{cases} x = 2 + \lambda + \mu \\ y = \lambda + 3\mu \\ z = -1 - \lambda \end{cases}$

a) Estudia la posición relativa de π_1 y π_2 . Si se cortan, calcula el ángulo que forman.

b) Sea r la recta que pasa por el punto $P(1,1,1)$ y es perpendicular a π_1 . Calcula la intersección de r y π_1 .

c) Calcula el punto simétrico del punto $P(1,1,1)$ con respecto al plano π_1

4. a) En un experimento aleatorio, sean A y B dos eventos con $P(\bar{A}) = 0.4$; $P(B) = 0.7$. Si A y B son independientes, calcula $P(A \cup B)$ y $P(A - B)$. (Nota: $\bar{A}$ suceso contrario o complementario de A).

b) En un grupo de 100 personas hay 40 hombres y 60 mujeres. Se eligen 4 personas al azar del grupo, ¿cuál es la probabilidad de seleccionar más mujeres que hombres?

OPCIÓN B

1. a) Discute, según los valores del parámetro m , el sistema de ecuaciones
$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ x - z = m \\ x + y - z = 1 \end{cases}$$

b) Resuélvelo, si es posible, cuando $m = 1$.

2. a) Calcula los valores a, b para que la función $f(x) = \begin{cases} ax^2 + b & \text{si } x < 3 \\ \ln(x-2) & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$ sea derivable en

$x = 3$ y determina el punto en el que la tangente de $f(x)$ es paralela a la recta $x + 3y = 0$.

b) Si $P(x)$ es un polinomio de tercer grado, con punto de inflexión en el punto $(0, 5)$ y un extremo relativo en el punto $(1, 1)$, calcula $\int_0^1 P(x) dx$.

3. Sea r la recta que pasa por los puntos $P(1,0,5)$ y $Q(5,2,3)$

a) Calcula la distancia desde el punto $A(5, -1, 6)$ a la recta r .

b) Calcula la ecuación implícita o general del plano que es perpendicular a r y pasa por el punto $A(5, -1, 6)$.

c) Calcula el área del triángulo de los vértices de los puntos $P(1,0,5)$, $A(5, -1, 6)$ y el punto de intersección de la recta r con el plano $\pi; 2x + y - z - 3 = 0$.

4. En un estudio realizado en un centro de salud se observó que el 30% de los pacientes son fumadores y de estos, el 60% son hombres. Entre los pacientes que no son fumadores, el 70% son mujeres. Elegido un paciente al azar,

a) Calcular la probabilidad de que el paciente sea mujer.

b) Si el paciente elegido es hombre, ¿cuál es la probabilidad de que sea fumador?

SOLUCIONES**OPCIÓN A**

1. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,

a) Determina, según los valores de k , el rango de la matriz $AA^t - \lambda I$, siendo A^t la matriz traspuesta de A e I la matriz unidad de orden 2.

b) Determina la matriz $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ que verifica la ecuación matricial $AA^t X = 6X$.

a) Determinamos la expresión de la matriz $AA^t - \lambda I$.

$$AA^t - \lambda I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-\lambda & 3 \\ 3 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

Averiguamos cuando se anula su determinante.

$$|AA^t - \lambda I| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 3 \\ 3 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)^2 - 9 = 9 + \lambda^2 - 6\lambda - 9 = \lambda^2 - 6\lambda$$

$$|AA^t - \lambda I| = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 6\lambda = 0 \Rightarrow \lambda(\lambda - 6) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda = 6 \end{cases}$$

Analizamos las tres situaciones distintas que se nos plantean.

CASO 1. $\lambda \neq 0$ y $\lambda \neq 6$.

En este caso el determinante de $AA^t - \lambda I$ es no nulo y su rango es 2.

CASO 2. $\lambda = 0$.

En este caso el determinante de $AA^t - \lambda I$ es nulo y su rango no es 2. Su rango es 1.

CASO 3. $\lambda = 6$

En este caso el determinante de $AA^t - \lambda I$ es nulo y su rango no es 2. Su rango es 1.

Conclusión: Si $\lambda \neq 0$ y $\lambda \neq 6$ el rango de $AA^t - \lambda I$ es 2 y si $\lambda = 0$ o $\lambda = 6$ el rango es 1.

b) Obtenemos el sistema de ecuaciones correspondiente a la ecuación matricial y lo resolvemos.

$$AA^t X = 6X \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x \\ 6y \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 3x+3y \\ 3x+3y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x \\ 6y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 3x+3y=6x \\ 3x+3y=6y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=2x \\ x+y=2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=x \\ x=y \end{cases} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}$$

Las matrices solución de la ecuación matricial tienen la expresión $X = \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}$, siendo x cualquier número real.

2. a) Calcula: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x - 3x^2}{e^{x^2} - \cos 2x}$

b) Se desea construir una caja de base cuadrada, con tapa y con capacidad de 80 dm^3 . Para la tapa y la superficie lateral se quiere utilizar un material que cuesta 2 €/dm^2 y para la base otro que cuesta 3 €/dm^2 . Calcula las dimensiones de la caja para que su coste sea mínimo.

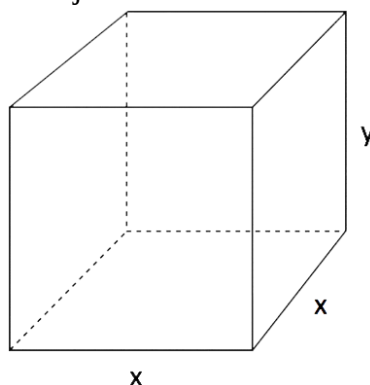
c) Calcula $\int_0^1 x \ln(1+x) dx$.

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x - 3x^2}{e^{x^2} - \cos 2x} = \frac{\sin^2 0 - 3 \cdot 0^2}{e^{0^2} - \cos(0)} = \frac{0-0}{1-1} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} =$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x \cos x - 6x}{2xe^{x^2} + 2 \sin 2x} = \frac{2 \sin 0 \cdot \cos 0 - 6 \cdot 0}{2 \cdot 0 e^{0^2} + 2 \sin(0)} = \frac{0-0}{0+0} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos x \cos x + 2 \sin x (-\sin x) - 6}{2e^{x^2} + 2x(2x)e^{x^2} + 4 \cos 2x} = \frac{2 \cos 0 \cdot \cos 0 + 2 \sin 0 (-\sin 0) - 6}{2e^{0^2} + 0(0)e^{0^2} + 4 \cos(0)} = \frac{2-6}{2+4} = \boxed{\frac{-2}{3}}$$

b) La caja tiene las dimensiones del dibujo inferior.



El volumen es el producto del área de la base por la altura: $V(x, y) = x^2 y$.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Volumen} = 80 \\ V(x, y) = x^2 y \end{array} \right\} \Rightarrow x^2 y = 80 \Rightarrow y = \frac{80}{x^2}.$$

Calculamos la superficie de la tapa superior más los laterales.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Superficie} = x^2 + 4xy \\ y = \frac{80}{x^2} \end{array} \right\} \Rightarrow S(x) = x^2 + 4x \frac{80}{x^2} = x^2 + \frac{320}{x}$$

El coste de esta superficie es $C_1(x) = 2 \cdot S(x) = 2 \left(x^2 + \frac{320}{x} \right) = 2x^2 + \frac{640}{x}$

El coste de la base es $C_2(x) = 3x^2$.

El coste total de la caja es $C(x) = C_1(x) + C_2(x) = 2x^2 + \frac{640}{x} + 3x^2 = 5x^2 + \frac{640}{x}$.

Derivamos esta función y buscamos su mínimo.

$$C(x) = 5x^2 + \frac{640}{x} = 5x^2 + 640x^{-1} \Rightarrow C'(x) = 10x - 640x^{-2} = 10x - \frac{640}{x^2}$$

Igualamos a cero.

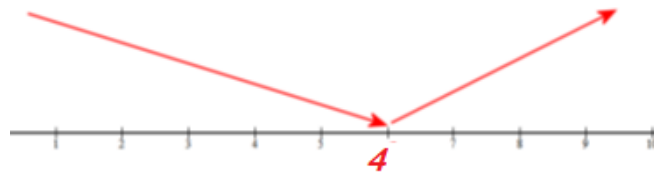
$$C'(x) = 0 \Rightarrow 10x - \frac{640}{x^2} = 0 \Rightarrow 10x = \frac{640}{x^2} \Rightarrow 10x^3 = 640 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^3 = \frac{640}{10} = 64 \Rightarrow \boxed{x = \sqrt[3]{64} = 4}$$

Comprobemos si $x = 4$ es un mínimo relativo.

- En $(0, 4)$ tomo $x = 1$ y la derivada vale $C'(1) = 10 - \frac{640}{1^2} = -630 < 0$. La función decrece en $(0, 4)$.
- En $(4, +\infty)$ tomo $x = 5$ y la derivada vale $C'(5) = 50 - \frac{640}{5^2} = 24.4 > 0$. La función crece en $(4, +\infty)$.

La función sigue el esquema siguiente.



La superficie tiene un mínimo en $x = 4 \rightarrow y = \frac{80}{4^2} = 5$.

La caja de base cuadrada de volumen 80 dm^3 con menor coste tiene 4 dm en el lado del cuadrado de la base y 5 dm de altura.

c) Calculamos primero la integral indefinida.

$$\int x \ln(x+1) dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ u = \ln(x+1) \rightarrow du = \frac{1}{x+1} dx \\ dv = x dx \rightarrow v = \int x dx = \frac{x^2}{2} \end{array} \right\} = \frac{x^2}{2} \ln(x+1) - \int \frac{x^2}{2} \frac{1}{x+1} dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} \ln(x+1) - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{x+1} dx = \boxed{\begin{array}{cc} x^2 & |x+1| \\ -x^2 - x & x-1 \\ \hline -x & \\ x+1 & \\ \hline 1 & \end{array}} = \frac{x^2}{2} \ln(x+1) - \frac{1}{2} \int x - 1 + \frac{1}{x+1} dx =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{x^2}{2} \ln(x+1) - \frac{1}{2} \left[\int x-1 dx + \int \frac{1}{x+1} dx \right] = \\
 &= \frac{x^2}{2} \ln(x+1) - \frac{1}{2} \left[\frac{x^2}{2} - x + \ln(x+1) \right] = \boxed{\frac{x^2}{2} \ln(x+1) - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \ln(x+1) + C}
 \end{aligned}$$

Calculamos la integral definida pedida.

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 x \ln(1+x) dx &= \left[\frac{x^2}{2} \ln(x+1) - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \ln(x+1) \right]_0^1 = \\
 &= \left[\frac{1^2}{2} \ln(1+1) - \frac{1^2}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln(1+1) \right] - \left[\frac{0^2}{2} \ln(0+1) - \frac{0^2}{4} + 0 - \ln(0+1) \right] = \\
 &= \frac{\ln 2}{2} + \frac{1}{4} - \frac{\ln 2}{2} = \boxed{\frac{1}{4}}
 \end{aligned}$$

$$3. \text{ Dados los planos } \pi_1 : x + y - z + 2 = 0; \pi_2 : \begin{cases} x = 2 + \lambda + \mu \\ y = \lambda + 3\mu \\ z = -1 - \lambda \end{cases}$$

- a) Estudia la posición relativa de π_1 y π_2 . Si se cortan, calcula el ángulo que forman.
 b) Sea r la recta que pasa por el punto $P(1,1,1)$ y es perpendicular a π_1 . Calcula la intersección de r y π_1 .
 c) Calcula el punto simétrico del punto $P(1,1,1)$ con respecto al plano π_1

a) Hallamos un vector normal de cada plano.

$$\pi_1 : x + y - z + 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \vec{n}_1 = (1, 1, -1) \\ P_1(0, 0, 2) \end{cases}$$

$$\pi_2 : \begin{cases} x = 2 + \lambda + \mu \\ y = \lambda + 3\mu \\ z = -1 - \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{u}_2 = (1, 1, -1) \\ \vec{v}_2 = (1, 3, -1) \\ Q_2(2, 0, -1) \end{cases} \Rightarrow \vec{n}_2 = \vec{u}_2 \times \vec{v}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= -i - j + 3k - k + j + 3i = 2i = (2, 0, 2)$$

Los vectores normales no tienen coordenadas proporcionales. Los planos no son ni paralelos ni coincidentes.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{n}_1 = (1, 1, -1) \\ \vec{n}_2 = (2, 0, 2) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{2} \neq \frac{1}{0} \neq \frac{-1}{2}$$

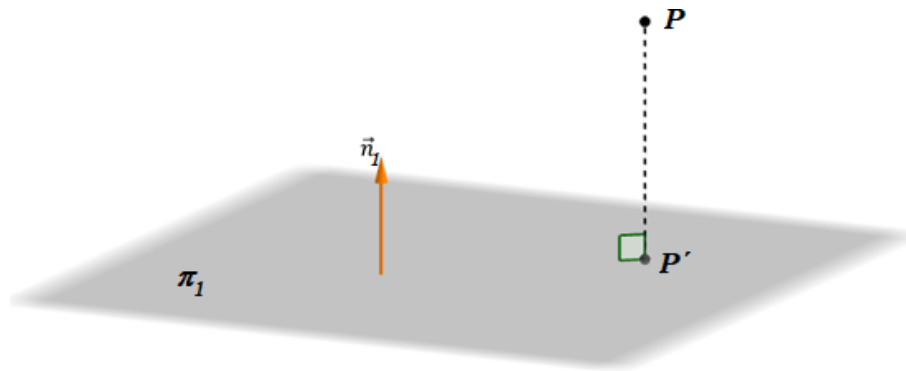
Los planos se cortan. Determinamos el ángulo que forman. Lo hallamos usando el producto escalar, aunque podemos afirmar que forman 90° pues $\vec{u}_2 = (1, 1, -1)$ es un vector director de π_2 y el vector normal del plano π_1 .

$$\left. \begin{array}{l} \vec{n}_1 = (1, 1, -1) \\ \vec{n}_2 = (2, 0, 2) \end{array} \right\} \Rightarrow \cos(\pi_1, \pi_2) = \cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} = \frac{(1, 1, -1)(2, 0, 2)}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2} \sqrt{2^2 + 0^2 + (-2)^2}} =$$

$$= \frac{2 - 2}{\sqrt{3}\sqrt{8}} = 0 \Rightarrow (\pi_1, \pi_2) = \cos^{-1}(0) = 90^\circ$$

Los planos π_1 y π_2 forman un ángulo de 90° .

b) Nos piden hallar el punto P' del dibujo.



Hallamos la recta perpendicular al plano que pasa por el punto P.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_r = \vec{n}_1 = (1, 1, -1) \\ P(1, 1, 1) \in r \end{array} \right\} \Rightarrow r : \begin{cases} x = 1 + \alpha \\ y = 1 + \alpha \\ z = 1 - \alpha \end{cases}$$

El punto P' es el punto de corte de r y π_1 .

$$\left. \begin{array}{l} r : \begin{cases} x = 1 + \alpha \\ y = 1 + \alpha \\ z = 1 - \alpha \end{cases} \\ \pi_1 : x + y - z + 2 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 1 + \alpha + 1 + \alpha - 1 + \alpha + 2 = 0 \Rightarrow 3\alpha = -3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{-3}{3} = -1 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - 1 = 0 \\ y = 1 - 1 = 0 \\ z = 1 + 1 = 2 \end{cases} \Rightarrow P'(0, 0, 2)$$

La intersección de r y π_1 es el punto $P'(0, 0, 2)$.

- c) El punto Q simétrico del punto $P(1, 1, 1)$ con respecto al plano π_1 se obtiene sumando al punto P' el vector $\overrightarrow{PP'}$.

$$\overrightarrow{PP'} = (0, 0, 2) - (1, 1, 1) = (-1, -1, 1)$$

$$Q = P' + \overrightarrow{PP'} = (0, 0, 2) + (-1, -1, 1) = (-1, -1, 3)$$

El punto Q simétrico del punto $P(1, 1, 1)$ con respecto al plano π_1 tiene coordenadas $Q(-1, -1, 3)$.

4. a) En un experimento aleatorio, sean A y B dos eventos con $P(\bar{A}) = 0.4$; $P(B) = 0.7$. Si A y B son independientes, calcula $P(A \cup B)$ y $P(A - B)$. (Nota: $\bar{A}$ suceso contrario o complementario de A).

b) En un grupo de 100 personas hay 40 hombres y 60 mujeres. Se eligen 4 personas al azar del grupo, ¿cuál es la probabilidad de seleccionar más mujeres que hombres?

a) Si $P(\bar{A}) = 0.4$ entonces $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - 0.4 = 0.6$.

Si A y B son independientes se cumple que $P(A \cap B) = P(A)P(B) = 0.6 \cdot 0.7 = 0.42$.

Calculamos $P(A \cup B)$.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.6 + 0.7 - 0.42 = \boxed{0.88}$$

Calculamos $P(A - B)$.

$$P(A - B) = P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B) = 0.6 - 0.42 = \boxed{0.18}$$

b) Llamamos X a la variable que cuenta el número de mujeres en un grupo de 4 personas.

Esta variable es una binomial donde $n = 4$ y $p = 60/100 = 0.6$. $X = B(4, 0.6)$.

Para que haya más mujeres que hombres deben ser 3 o 4 mujeres en el grupo de 4.

Nos piden calcular $P(X \geq 3)$.

$$P(X \geq 3) = P(X = 3) + P(X = 4) = \binom{4}{3} 0.6^3 \cdot 0.4^1 + \binom{4}{4} 0.6^4 \cdot 0.4^0 =$$

$$= 4 \cdot 0.6^3 \cdot 0.4 + 0.6^4 = \boxed{0.4752}$$

OPCIÓN B

1. a) Discute, según los valores del parámetro m , el sistema de ecuaciones
$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ x \quad \quad - z = m \\ x + y - z = 1 \end{cases}$$
- b) Resuélvelo, si es posible, cuando $m = 1$.

- a) Este sistema tiene la matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & m \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matriz A tiene las columnas primera y tercera proporcionales, por lo que su determinante es nulo y su rango es menor de 3.

Si consideramos el menor de orden 2 que resulta de quitar la fila y columna terceras $\rightarrow$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0. \text{ El rango de A siempre es 2, independientemente del valor de } m.$$

Estudiamos el rango de $A/B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & m \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Como tiene la columna primera y tercera

proporcionales consideramos el menor de orden 3 que resulta de quitar la columna tercera y averiguamos cuando se anula.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & m \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 + 2m + 1 - 0 - 2 - m = m - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{m = 1}$$

Analizamos dos situaciones diferentes.

CASO 1. $m \neq 1$.

En este caso el determinante del menor es no nulo y el rango de A/B es 3. A y A/B tiene rangos distintos y el sistema es **incompatible** (sin solución)

CASO 2. $m = 1$

En este caso el determinante del menor de orden 3 de A/B es nulo y su rango es menor de 3. El rango de A y de A/B son iguales a 2, y menores que el número de incógnitas (3).

El sistema es **compatible indeterminado** (infinitas soluciones).

Resumiendo: Para $m \neq 1$ el sistema es **incompatible** y para $m = 1$ el sistema es **compatible indeterminado**.

- b) Si $m = 1$ el sistema es compatible indeterminado. Lo resolvemos.

$$\begin{cases} x+2y-z=1 \\ x & -z=1 \\ x+y-z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2y-z=1 \\ x & =z+1 \\ x+y-z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z+1+2y-z=1 \\ z+1+y-z=1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2y=0 \\ \boxed{y=0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1+\alpha \\ y=0 \\ z=\alpha \end{cases} ; \alpha \in \mathbb{R}$$

Las soluciones del sistema son $x=1+\alpha$; $y=0$; $z=\alpha$, siendo $\alpha \in \mathbb{R}$.

2. a) Calcula los valores a, b para que la función $f(x) = \begin{cases} ax^2 + b & \text{si } x < 3 \\ \ln(x-2) & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$ sea derivable en $x=3$ y determina el punto en el que la tangente de $f(x)$ es paralela a la recta $x+3y=0$.
- b) Si $P(x)$ es un polinomio de tercer grado, con punto de inflexión en el punto $(0, 5)$ y un extremo relativo en el punto $(1, 1)$, calcula $\int_0^1 P(x) dx$.

a) Para que la función sea derivable en $x=3$ debe ser continua.

$$\left. \begin{aligned} f(3) &= \ln(3-2) = \ln 1 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3^-} ax^2 + b = 9a + b \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3^+} \ln(x-2) = 0 \\ f(3) &= \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) \end{aligned} \right\} \Rightarrow 9a + b = 0 \Rightarrow \boxed{b = -9a}$$

La derivada de la función en $\mathbb{R} - \{3\}$ es $f'(x) = \begin{cases} 2ax & \text{si } x < 3 \\ \frac{1}{x-2} & \text{si } x > 3 \end{cases}$.

Para que la función sea derivable en $x=3$ deben coincidir las derivadas laterales.

$$\left. \begin{aligned} f'(3^-) &= \lim_{x \rightarrow 3^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} 2ax = 6a \\ f'(3^+) &= \lim_{x \rightarrow 3^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{x-2} = 1 \\ f'(3^-) &= f'(3^+) \end{aligned} \right\} \Rightarrow 6a = 1 \Rightarrow \boxed{a = \frac{1}{6}}$$

Sustituimos este valor en la primera ecuación obtenida.

$$b = -9 \frac{1}{6} = -\frac{3}{2}$$

Los valores buscados son $a = \frac{1}{6}$; $b = -\frac{3}{2}$.

- b) Tenemos que $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, con punto de inflexión en el punto $(0, 5)$, lo que significa que $P(0) = 5$ y que $P''(0) = 0$.

$$\left. \begin{aligned} P(x) &= ax^3 + bx^2 + cx + d \\ P(0) &= 5 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 5 = a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 + d \Rightarrow \boxed{d = 5}$$

$$\left. \begin{aligned} P'(x) &= 3ax^2 + 2bx + c \Rightarrow P''(x) = 6ax + 2b \\ P''(0) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 0 = 6a \cdot 0 + 2b \Rightarrow 2b = 0 \Rightarrow \boxed{b = 0}$$

Nuestro polinomio queda $P(x) = ax^3 + cx + 5$. Tiene un extremo relativo en el punto (1, 1) lo que significa que $P(1) = 1$ y que $P'(1) = 0$.

$$\left. \begin{array}{l} P(x) = ax^3 + cx + 5 \\ P(1) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow 1 = a \cdot 1^3 + c \cdot 1 + 5 \Rightarrow \boxed{a + c = -4}$$

$$\left. \begin{array}{l} P(x) = ax^3 + cx + 5 \rightarrow P'(x) = 3ax^2 + c \\ P'(1) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 0 = 3a \cdot 1^2 + c \Rightarrow \boxed{3a + c = 0}$$

Reunimos las dos ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} a + c = -4 \\ 3a + c = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a + c = -4 \\ c = -3a \end{array} \right\} \Rightarrow a - 3a = -4 \Rightarrow -2a = -4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{a = \frac{-4}{-2} = 2} \Rightarrow \boxed{c = -3(2) = -6}$$

El polinomio queda $P(x) = 2x^3 - 6x + 5$.

Calculamos $\int_0^1 P(x) dx$.

$$\int_0^1 P(x) dx = \int_0^1 2x^3 - 6x + 5 dx = \left[2 \frac{x^4}{4} - 6 \frac{x^2}{2} + 5x \right]_0^1 = \left[\frac{x^4}{2} - 3x^2 + 5x \right]_0^1 =$$

$$= \left[\frac{1^4}{2} - 3 \cdot 1^2 + 5 \cdot 1 \right] - \left[\frac{0^4}{2} - 3 \cdot 0^2 + 5 \cdot 0 \right] = \frac{1}{2} - 3 + 5 = \boxed{\frac{5}{2}}$$

3. Sea r la recta que pasa por los puntos $P(1,0,5)$ y $Q(5,2,3)$

a) Calcula la distancia desde el punto $A(5, -1, 6)$ a la recta r .

b) Calcula la ecuación implícita o general del plano que es perpendicular a r y pasa por el punto $A(5, -1, 6)$.

c) Calcula el área del triángulo de los vértices de los puntos $P(1,0,5)$, $A(5, -1, 6)$ y el punto de intersección de la recta r con el plano $\pi: 2x + y - z - 3 = 0$.

a) La recta r tiene como vector director $\vec{v}_r = \overrightarrow{PQ}$.

Hallamos la ecuación de la recta r .

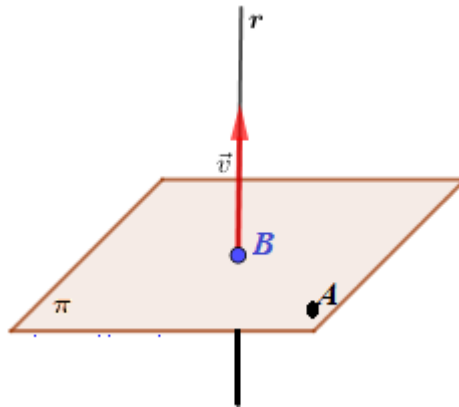
$$\overrightarrow{PQ} = (5, 2, 3) - (1, 0, 5) = (4, 2, -2)$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = \overrightarrow{PQ} = (4, 2, -2) \\ P(1, 0, 5) \in r \end{array} \right\} \Rightarrow r: \begin{cases} x = 1 + 4\lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 5 - 2\lambda \end{cases}$$

Hallamos la ecuación del plano perpendicular a r que pasa por el punto A . Este plano tiene como vector normal el vector director de la recta.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{n} = \vec{v}_r = (4, 2, -2) \\ A(5, -1, 6) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \pi: 4x + 2y - 2z + D = 0 \\ A(5, -1, 6) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow 20 - 2 - 12 + D = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D = -6 \Rightarrow \pi: 4x + 2y - 2z - 6 = 0 \Rightarrow \boxed{\pi: 2x + y - z - 3 = 0}$$



Hallamos el punto B de corte entre recta y plano.

$$\left. \begin{array}{l} \pi: 2x + y - z - 3 = 0 \\ r: \begin{cases} x = 1 + 4\lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 5 - 2\lambda \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow 2(1 + 4\lambda) + 2\lambda - (5 - 2\lambda) - 3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 + 8\lambda + 2\lambda - 5 + 2\lambda - 3 = 0 \Rightarrow 12\lambda = 6 \Rightarrow \lambda = \frac{6}{12} = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 + 4 \frac{1}{2} = 3 \\ y = 2 \frac{1}{2} = 1 \\ z = 5 - 2 \frac{1}{2} = 4 \end{cases} \Rightarrow B(3, 1, 4)$$

La distancia del punto A a la recta r es el módulo del vector $\overrightarrow{AB}$.

$$\overrightarrow{AB} = (3, 1, 4) - (5, -1, 6) = (-2, 2, -2)$$

$$d(A, r) = d(A, B) = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2 + (-2)^2} = \sqrt{12} = \boxed{2\sqrt{3}}$$

La distancia desde el punto $A(5, -1, 6)$ a la recta r tiene un valor de $2\sqrt{3}$ unidades.

b) Lo hemos hallado en el apartado anterior. El plano tiene ecuación $\pi: 2x + y - z - 3 = 0$.

c) El punto de intersección de la recta r con el plano $\pi: 2x + y - z - 3 = 0$ es el punto B calculado en el apartado a) y que tiene coordenadas $B(3, 1, 4)$.

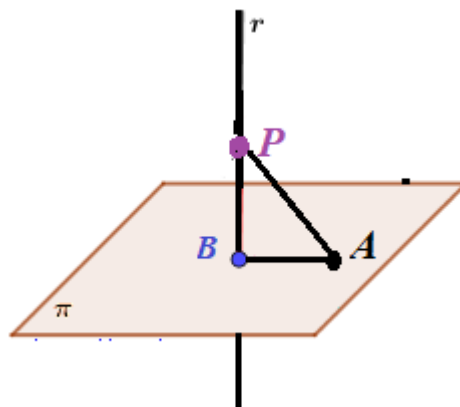
El triángulo PAB tiene un área que calculamos como la mitad del módulo del producto vectorial $\overrightarrow{PA} \times \overrightarrow{PB}$.

$$\left. \begin{aligned} \overrightarrow{PA} &= (5, -1, 6) - (1, 0, 5) = (4, -1, 1) \\ \overrightarrow{PB} &= (3, 1, 4) - (1, 0, 5) = (2, 1, -1) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{PA} \times \overrightarrow{PB} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 4 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= i + 2j + 4k + 2k + 4j - i = 6j + 6k = (0, 6, 6)$$

$$\text{Área } PAB = \frac{|\overrightarrow{PA} \times \overrightarrow{PB}|}{2} = \frac{\sqrt{0^2 + 6^2 + 6^2}}{2} = \frac{\sqrt{72}}{2} = \boxed{3\sqrt{2} \text{ u}^2}$$

OTRA FORMA DE RESOLVER EL APARTADO c)



Como el triángulo PAB es rectángulo en el vértice B podemos hallar el área como la mitad de la base ($\overline{AB}$) por la altura ($|\overline{PB}|$).

$$\left. \begin{array}{l} \overline{AB} = (3, 1, 4) - (5, -1, 6) = (-2, 2, -2) \\ \overline{PB} = (3, 1, 4) - (1, 0.5) = (2, 1, -1) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \text{Base} = |\overline{AB}| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2 + (-2)^2} = \sqrt{12} \\ \text{Altura} = |\overline{PB}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{6} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{Área PAB} = \frac{\sqrt{12} \cdot \sqrt{6}}{2} = \boxed{3\sqrt{2} \text{ u}^2}$$

4. En un estudio realizado en un centro de salud se observó que el 30% de los pacientes son fumadores y de estos, el 60% son hombres. Entre los pacientes que no son fumadores, el 70% son mujeres. Elegido un paciente al azar,
- a) Calcular la probabilidad de que el paciente sea mujer.
- b) Si el paciente elegido es hombre, ¿cuál es la probabilidad de que sea fumador?

Supongamos que hay 100 pacientes. Como el 30% de los pacientes son fumadores tenemos que 30 serían fumadores. De estos el 60 % son hombres, es decir, $0.6 \cdot 30 = 18$ de los fumadores son hombres. Por lo que $30 - 18 = 12$ de los fumadores son mujeres.

Entre los pacientes que no son fumadores ($100 - 30 = 70$ pacientes), el 70% son mujeres, es decir, $0.7 \cdot 70 = 49$ son mujeres no fumadoras. Por lo que $70 - 49 = 21$ son hombres no fumadores.

Reunimos todos estos datos en una tabla.

	Hombres	Mujeres	
Fumadores	18	12	30
No fumadores	21	49	70
TOTALES			100

Completamos la tabla.

	Hombres	Mujeres	
Fumadores	18	12	30
No fumadores	21	49	70
TOTALES	39	61	100

- a) De los 100 pacientes 61 son mujeres, por lo que aplicando la regla de Laplace la probabilidad de que el paciente elegido al azar sea mujer es de $\frac{61}{100} = 0.61$.

- b) De los 39 hombres hay 18 que son fumadores, por lo que aplicando la regla de Laplace tenemos que la probabilidad de que al elegir un hombre este sea fumador es de $\frac{18}{39} \approx 0.4615$.