



**Proba de Avaliación do
Bacharelato
para o Acceso á Universidade
SETEMBRO 2017**

Código: 20

MATEMÁTICAS II

(Responde só os exercicios dunha das opcións. Puntuación máxima dos exercicios de cada opción:
exercicio 1 = 2 puntos, exercicio 2 = 3 puntos, exercicio 3 = 3 puntos, exercicio 4 = 2 puntos)

OPCIÓN A

1. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$,

a) Determina, según los valores de k , el rango de las matrices AB y BA .

b) Para $k = 0$, determina las matrices X que verifican $ABX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

2. a) Calcula: i) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + 3e^{2x}}{x + e^{2x}}$; ii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + 3e^{2x}}{x + e^{2x}}$

b) La derivada de una función $f(x)$, que tiene por dominio $(0, \infty)$, y $f'(x) = 1 + \ln x$.

Determina la función $f(x)$ teniendo en cuenta que su gráfica pasa por el punto $(1, 4)$.

c) Determina, si existen, los máximos y mínimos relativos de $f(x)$.

3. Sea r la recta que pasa por los puntos $(0, 1, 3)$ y $(1, 1, 1)$ y $s: \begin{cases} x + y - 2z - 1 = 0 \\ y - 2z = 0 \end{cases}$

a) Estudia su posición relativa.

b) Es s paralela al plano YZ ? ¿Está contenida en dicho plano?

c) Calcula la distancia de la recta r al plano $\pi: 2x + z = 0$.

4. Sean A y B dos sucesos con $P(A) = 0.7$; $P(B) = 0.6$ y $P(A \cup B) = 0.9$

a) ¿Son A y B sucesos independientes? Justifica la respuesta.

b) Calcula $P(A - B)$ y $P(A/\bar{B})$. (Nota: $\bar{B}$ suceso contrario o complementario de B).

OPCIÓN B

1. a) Discute, según los valores del parámetro m , el sistema de ecuaciones
$$\begin{cases} 3x - 2y = 0 \\ x - y + z = m \\ x + my - 2z = m \end{cases}$$

b) Resuélvelo, si es posible, cuando $m = 0$.

2. Dada la función $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$

- a) Estudia, en $x = 0$, la continuidad y derivabilidad de $f(x)$.
 b) Determina los puntos de la gráfica de $f(x)$ donde la recta tangente es paralela a la recta $x - 4y = 0$ y determina las ecuaciones de dichas rectas tangentes.
 c) Calcula $\int_{-1}^0 f(x) dx$.

3. Dados los planos $\alpha: 2x - 2y + 4z - 7 = 0$; $\beta: \begin{cases} x = 1 - \lambda + 3\mu \\ y = 5 + \lambda + \mu \\ z = 4 + \lambda - \mu \end{cases}$ y la recta $r: \begin{cases} x + 2z - 3 = 0 \\ y - 5 = 0 \end{cases}$

- a) Estudia la posición relativa de los planos α y β . Calcula la distancia entre ellos.
 b) Calcula la ecuación implícita o general del plano que es perpendicular a α y contiene a la recta r .
 c) Sean P y Q los puntos de intersección de la recta r con los planos XY e YZ respectivamente. Calcula la distancia entre P y Q .

4. Las ventas totales diarias en un restaurante pequeño son una variable que sigue una distribución normal de media 1220 € al día y desviación típica 120 € al día.

- a) Calcula la probabilidad de que en un día elegido al azar las ventas superen los 1400€.
 b) Si el restaurante debe vender al menos 980 € al día para cubrir gastos, ¿cuál es la probabilidad de que en un día elegido al azar el restaurante no cubra gastos?

SOLUCIONES**OPCIÓN A**

1. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$,

a) Determina, según los valores de k , el rango de las matrices AB y BA .

b) Para $k = 0$, determina las matrices X que verifican $ABX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

a) Obtenemos la expresión de las matrices AB y BA .

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0 & 1+0 & -3+0 \\ k+3 & k+1 & -3k-1 \\ 1+3 & 1+1 & -3-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ k+3 & k+1 & -3k-1 \\ 4 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+k-3 & 0+1-3 \\ 3+k-1 & 0+1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k-2 & -2 \\ k+2 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculamos el determinante de la matriz AB y averiguamos cuando se anula.

$$|AB| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ k+3 & k+1 & -3k-1 \\ 4 & 2 & -4 \end{vmatrix} =$$

$$= -4k - 4 - 12k - 4 - 6k - 18 + 12k + 12 + 4k + 12 + 6k + 2 = 0$$

Como su determinante es nulo la matriz AB tiene rango 2 o 1. Consideramos el menor de orden 2 que surge de quitar la segunda fila y la tercera columna $\rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 4 = -2 \neq 0$.

Al ser no nulo el rango de la matriz AB es 2.

Calculamos el determinante de la matriz BA y averiguamos cuando se anula.

$$|BA| = \begin{vmatrix} k-2 & -2 \\ k+2 & 0 \end{vmatrix} = 2(k+2) = 0 \Rightarrow \boxed{k = -2}$$

Si k es distinto de -2 el rango de BA es 2, pero si $k = -2$ el determinante es nulo y su rango es 1.

b) Para $k = 0$ la matriz AB queda $AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & -4 \end{pmatrix}$.

El sistema de ecuaciones queda $ABX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + y - 3z = 0 \\ 3x + y - z = 0 \\ 4x + 2y - 4z = 0 \end{cases}$

Observamos que si sumamos la primera y la segunda ecuación obtenemos la tercera, por lo que el sistema se reduce a dos ecuaciones: $\begin{cases} x + y - 3z = 0 \\ 3x + y - z = 0 \end{cases}$. Lo resolvemos.

$$\begin{cases} x + y - 3z = 0 \\ 3x + y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 3z - x \\ 3x + y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow 3x + 3z - x - z = 0 \Rightarrow 2x + 2z = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x + z = 0 \Rightarrow \boxed{x = -z} \Rightarrow \boxed{y = 3z - (-z) = 4z} \Rightarrow \begin{cases} x = -\alpha \\ y = 4\alpha; \alpha \in \mathbb{R} \\ z = \alpha \end{cases}$$

Las matrices que cumplen lo pedido son $X = \begin{pmatrix} -\alpha \\ 4\alpha \\ \alpha \end{pmatrix}$, siendo α cualquier valor real.

2. a) Calcula: i) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+3e^{2x}}{x+e^{2x}}$; ii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+3e^{2x}}{x+e^{2x}}$

b) La derivada de una función $f(x)$, que tiene por dominio $(0, \infty)$, y $f'(x) = 1 + \ln x$.

Determina la función $f(x)$ teniendo en cuenta que su gráfica pasa por el punto $(1, 4)$.

c) Determina, si existen, los máximos y mínimos relativos de $f(x)$.

a) i)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+3e^{2x}}{x+e^{2x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + \frac{3}{e^{-2x}}}{x + \frac{1}{e^{-2x}}} = \frac{-\infty + \frac{3}{+\infty}}{-\infty + \frac{1}{+\infty}} = \frac{-\infty + 0}{-\infty + 0} = \frac{\infty}{\infty} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1+6e^{2x}}{1+2e^{2x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1+\frac{6}{e^{-2x}}}{1+\frac{2}{e^{-2x}}} = \frac{1+\frac{6}{+\infty}}{1+\frac{2}{+\infty}} = \frac{1+0}{1+0} = \boxed{1}$$

ii)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+3e^{2x}}{x+e^{2x}} = \frac{+\infty + \infty}{+\infty + \infty} = \frac{\infty}{\infty} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+6e^{2x}}{1+2e^{2x}} = \frac{1+\infty}{1+\infty} = \frac{\infty}{\infty} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{12e^{2x}}{4e^{2x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 3 = \boxed{3}$$

b) La función $f(x)$ es la primitiva de $f'(x) = 1 + \ln x$ que pasa por $(1, 4)$.

Calculamos la integral de la derivada.

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int 1 + \ln x dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ 1 + \ln x = u \rightarrow \frac{1}{x} dx = du \\ dx = dv \rightarrow v = \int dx = x \end{array} \right\} = x(1 + \ln x) - \int x \frac{1}{x} dx =$$

$$= x + x \ln x - \int dx = x + x \ln x - x = x \ln x + C$$

La función es $f(x) = x \ln x + C$. Como debe pasar por el punto $(1, 4)$ debe cumplirse que $f(1) = 4$.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = x \ln x + C \\ f(1) = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow 1 \cdot \ln 1 + C = 4 \Rightarrow C = 4$$

La función tiene la expresión $f(x) = x \ln x + 4$.

c) Buscamos los puntos críticos de la función $f(x) = x \ln x + 4$.

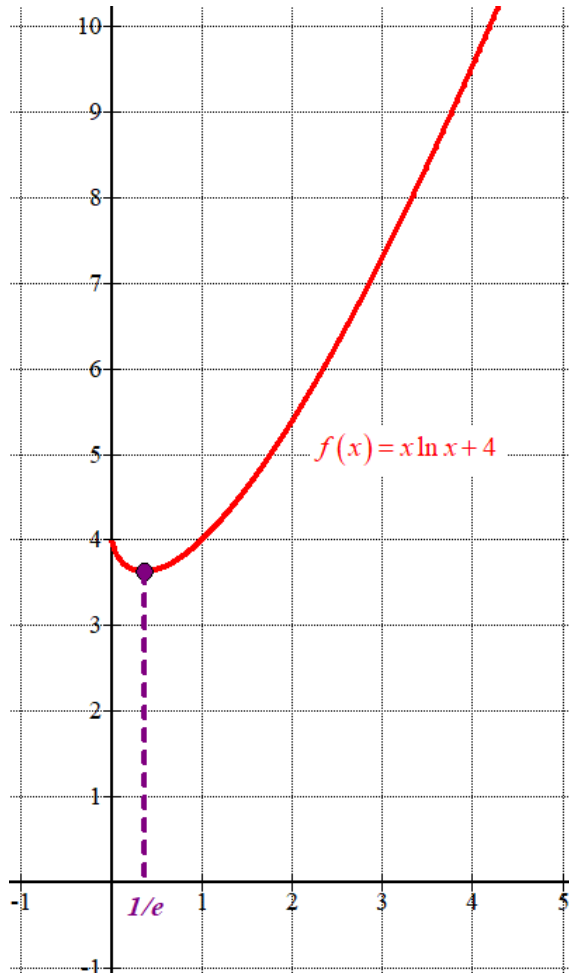
$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = \ln x + x \frac{1}{x} = 1 + \ln x \\ f'(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 1 + \ln x = 0 \Rightarrow \ln x = -1 \Rightarrow \boxed{x = e^{-1} = \frac{1}{e}}$$

Sustituimos este valor en la segunda derivada.

$$f'(x) = 1 + \ln x \Rightarrow f''(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f''\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{\frac{1}{e}} = e > 0$$

Al ser positiva la segunda derivada la función presenta un mínimo relativo en $x = \frac{1}{e}$.

Como $f\left(e^{-1}\right) = e^{-1} \ln e^{-1} + 4 = e^{-1}(-1) + 4 = 4 - \frac{1}{e}$ las coordenadas del mínimo relativo de la función son $\left(\frac{1}{e}, 4 - \frac{1}{e}\right)$.



3. Sea r la recta que pasa por los puntos $(0, 1, 3)$ y $(1, 1, 1)$ y $s: \begin{cases} x + y - 2z - 1 = 0 \\ y - 2z = 0 \end{cases}$

- a) Estudia su posición relativa.
 b) Es s paralela al plano YZ ? ¿Está contenida en dicho plano?
 c) Calcula la distancia de la recta r al plano $\pi: 2x + z = 0$.

a) Hallamos un vector director y la ecuación de la recta r .

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = (1, 1, 1) - (0, 1, 3) = (1, 0, -2) \\ P_r(1, 1, 1) \in r \end{array} \right\} \Rightarrow r: \begin{cases} x = 1 + \alpha \\ y = 1 \\ z = 1 - 2\alpha \end{cases}; \alpha \in \mathbb{R}$$

Hallamos un vector director de la recta s .

$$\begin{aligned} s: \begin{cases} x + y - 2z - 1 = 0 \\ y - 2z = 0 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} x + y - 2z - 1 = 0 \\ y = 2z \end{cases} \Rightarrow x + 2z - 2z - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow s: \begin{cases} x = 1 \\ y = 2\lambda; \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{u}_s = (0, 2, 1) \\ Q_s(1, 0, 0) \in s \end{cases} \end{aligned}$$

Las coordenadas de los vectores directores de ambas rectas no son proporcionales, por lo que las rectas no son ni paralelas ni coincidentes.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_s = (0, 2, 1) \\ \vec{v}_r = (1, 0, -2) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{0}{1} \neq \frac{2}{0} \neq \frac{1}{-2}$$

Las rectas se cortan o cruzan. Hallamos el valor del producto mixto $[\vec{u}_s, \vec{v}_r, \overrightarrow{P_r Q_s}]$.

$$\overrightarrow{P_r Q_s} = (1, 0, 0) - (1, 1, 1) = (0, -1, -1)$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_s = (0, 2, 1) \\ \vec{v}_r = (1, 0, -2) \\ \overrightarrow{P_r Q_s} = (0, -1, -1) \end{array} \right\} \Rightarrow [\vec{u}_s, \vec{v}_r, \overrightarrow{P_r Q_s}] = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0 + 0 - 1 - 0 + 2 - 0 = 1 \neq 0$$

Como el producto mixto es no nulo las rectas se cruzan.

b) El plano YZ tiene ecuación $x = 0$. Tiene como vector normal $\vec{n} = (1, 0, 0)$.

Para que la recta s sea paralela al plano YZ el vector director de la recta y el normal del plano deben ser perpendiculares, es decir, su producto escalar debe ser nulo.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{n} = (1, 0, 0) \\ \vec{u}_s = (0, 2, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{n} \cdot \vec{u}_s = (1, 0, 0)(0, 2, 1) = 0 + 0 + 0 = 0$$

La primera condición se cumple, pero falta comprobar si el punto $Q_s(1, 0, 0)$ de la recta pertenece al plano o no.

$$¿Q_s(1, 0, 0) \in YZ? \Rightarrow \{Plano YZ : x = 0\} \Rightarrow \textcolor{red}{1=0?}$$

No es cierta la igualdad y el punto Q_s no pertenece al plano YZ , por lo que la recta s es paralela al plano.

La recta s no está contenida en el plano.

- c) Comprobamos que la recta r es paralela al plano y que tiene sentido hallar la distancia.
Comprobamos que el vector director de la recta y el normal del plano son perpendiculares.

$$\left. \begin{array}{l} \pi : 2x + z = 0 \Rightarrow \vec{n} = (2, 0, 1) \\ \vec{v}_r = (1, 0, -2) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{n} \cdot \vec{v}_r = (2, 0, 1)(1, 0, -2) = 2 - 2 = 0$$

La recta r es paralela al plano y la distancia de la recta al plano es el valor de la distancia de cualquier punto de la recta, por ejemplo, $P_r(1, 1, 1)$ al plano.

$$\left. \begin{array}{l} P_r(1, 1, 1) \in r \\ \pi : 2x + z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow d(r, \pi) = d(P_r, \pi) = \frac{|2+1|}{\sqrt{2^2+0^2+1^2}} = \frac{3}{\sqrt{5}}$$

La distancia de la recta r al plano $\pi : 2x + z = 0$ tiene un valor de $\frac{3}{\sqrt{5}}$ unidades.

4. Sean A y B dos sucesos con $P(A) = 0.7$; $P(B) = 0.6$ y $P(A \cup B) = 0.9$

a) ¿Son A y B sucesos independientes? Justifica la respuesta.

b) Calcula $P(A - B)$ y $P(A/\bar{B})$. (Nota: $\bar{B}$ suceso contrario o complementario de B).

a) Calculamos la probabilidad de la intersección de A y B.

$$\left. \begin{array}{l} P(A) = 0.7 \\ P(B) = 0.6 \\ P(A \cup B) = 0.9 \\ P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \end{array} \right\} \Rightarrow 0.9 = 0.7 + 0.6 - P(A \cap B) \Rightarrow \boxed{P(A \cap B) = 0.4}$$

Para que A y B sean sucesos independientes debe cumplirse: $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

$$\left. \begin{array}{l} P(A \cap B) = 0.4 \\ P(A)P(B) = 0.7 \cdot 0.6 = 0.42 \end{array} \right\} \Rightarrow P(A \cap B) = 0.4 \neq 0.42 = P(A)P(B)$$

Los sucesos A y B no son independientes.

b) Calculamos $P(A - B) = P(A \cap \bar{B})$.

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}) \Rightarrow 0.7 = 0.4 + P(A \cap \bar{B}) \Rightarrow P(A \cap \bar{B}) = 0.3$$

Hemos comprobado que $P(A - B) = P(A \cap \bar{B}) = 0.3$.

Calculamos $P(A/\bar{B})$. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(A/\bar{B}) = \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{P(A \cap \bar{B})}{1 - P(B)} = \frac{0.3}{1 - 0.6} = 0.75$$

Hemos comprobado que $P(A/\bar{B}) = 0.75$.

OPCIÓN B

1. a) Discute, según los valores del parámetro m , el sistema de ecuaciones
$$\begin{cases} 3x - 2y = 0 \\ x - y + z = m \\ x + my - 2z = m \end{cases}$$
- b) Resuélvelo, si es posible, cuando $m = 0$.

a) Este sistema tiene la matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & m & -2 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada

$$A/B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & m \\ 1 & m & -2 & m \end{pmatrix}.$$

Comprobamos cuando se anula el determinante de A.

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & m & -2 \end{vmatrix} = 6 - 2 + 0 - 0 - 4 - 3m = -3m$$

$$|A| = 0 \Rightarrow -3m = 0 \Rightarrow \boxed{m = 0}$$

Analizamos dos situaciones diferentes.

CASO 1. $m \neq 0$.

En este caso el determinante de la matriz A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de la matriz A/B y el número de incógnitas. Es sistema es compatible determinado (una única solución).

CASO 2. $m = 0$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango es menor de 3.

Triangulamos la matriz ampliada usando el método de Gauss para estudiar el rango de A y A/B con más facilidad.

$$A/B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 2^a \\ 1 \quad 0 \quad -2 \quad 0 \\ -1 \quad 1 \quad -1 \quad 0 \\ \hline 0 \quad 1 \quad -3 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva fila } 3^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 3 \cdot \text{Fila } 2^a - \text{Fila } 1^a \\ 3 \quad -3 \quad 3 \quad 0 \\ -3 \quad 2 \quad 0 \quad 0 \\ \hline 0 \quad -1 \quad 3 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva fila } 2^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a + \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad 1 \quad -3 \quad 0 \\ 0 \quad -1 \quad 3 \quad 0 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc} & \overbrace{3 \quad -2 \quad 0 \quad 0}^{A/B} & & \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ \underbrace{0 \quad 0 \quad 0 \quad 0}_A & & & \end{array} \right)$$

Los rangos de la matriz A y de la matriz A/B son iguales a 2. Los rangos son iguales, pero menores que el número de incógnitas (3). El sistema es **compatible indeterminado** (infinitas soluciones).

Resumiendo: Para $m \neq 0$ el sistema es **compatible determinado** y para $m = 0$ el sistema es **compatible indeterminado**.

b) Si $m = 0$ el sistema es compatible indeterminado.

Buscamos las soluciones a partir del sistema equivalente obtenido en el apartado anterior.

$$\left(\begin{array}{cccc} & \overbrace{3 \quad -2 \quad 0 \quad 0}^{A/B} & & \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ \underbrace{0 \quad 0 \quad 0 \quad 0}_A & & & \end{array} \right) \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3x - 2y = 0 \\ -y + 3z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3x - 2y = 0 \\ 3z = y \end{array} \right\} \Rightarrow 3x - 2(3z) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x = 6z \Rightarrow x = 2z \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 3\lambda; \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{cases}}$$

Las soluciones del sistema son $x = 2\lambda$; $y = 3\lambda$; $z = \lambda$, siendo $\lambda \in \mathbb{R}$.

2. Dada la función $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$

- a) Estudia, en $x=0$, la continuidad y derivabilidad de $f(x)$.
 b) Determina los puntos de la gráfica de $f(x)$ donde la recta tangente es paralela a la recta $x-4y=0$ y determina las ecuaciones de dichas rectas tangentes.
 c) Calcula $\int_{-1}^0 f(x) dx$.

a) Obtenemos la expresión de la función como una función a trozos.

$$f(x) = \frac{x}{1+|x|} = \begin{cases} \frac{x}{1-x} & \text{si } x < 0 \\ \frac{x}{1+x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Estudiamos la continuidad de la función en $x=0$.

$$\left. \begin{aligned} f(0) &= \frac{0}{1+0} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{1+x} = \frac{0}{1+0} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{1-x} = \frac{0}{1-0} = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0) = 0$$

La función es continua en $x=0$.

Estudiamos la derivabilidad en $x=0$.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1-x} & \text{si } x < 0 \\ \frac{x}{1+x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} \frac{1 \cdot (1-x) - (-1) \cdot x}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2} & \text{si } x < 0 \\ \frac{1 \cdot (1+x) - 1 \cdot x}{(1+x)^2} = \frac{1}{(1+x)^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} f'(0^+) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{(1+x)^2} = 1 \\ f'(0^-) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{(1-x)^2} = 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f'(0^+) = f'(0^-) = 1$$

La función es derivable en $x=0$.

b) Averiguamos la pendiente de la recta $x-4y=0$.

$$x-4y=0 \Rightarrow 4y=x \Rightarrow y = \frac{1}{4}x \Rightarrow \text{pendiente} = \frac{1}{4}$$

Como la pendiente de la recta tangente en $x = a$ es el valor de $f'(a)$, debemos buscar un valor “a” para el que se cumpla $f'(a) = \frac{1}{4}$.

$$f'(a) = \frac{1}{4} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{(1-a)^2} = \frac{1}{4} \rightarrow (1-a)^2 = 4 \rightarrow \begin{cases} 1-a = 2 \rightarrow \boxed{a = -1} \\ 1-a = -2 \rightarrow a = 3 \notin (-\infty, 0) \end{cases} \\ \frac{1}{(1+a)^2} = \frac{1}{4} \rightarrow (1+a)^2 = 4 \rightarrow \begin{cases} 1+a = 2 \rightarrow \boxed{a = 1} \\ 1+a = -2 \rightarrow a = -3 \notin (0, +\infty) \end{cases} \end{cases}$$

Determinamos la recta tangente en $x = -1$.

$$\left. \begin{aligned} f(-1) &= \frac{-1}{1+1} = \frac{-1}{2} \\ f'(-1) &= \frac{1}{4} \\ y - f(-1) &= f'(-1)(x+1) \end{aligned} \right\} \Rightarrow y + \frac{1}{2} = \frac{1}{4}(x+1) \Rightarrow y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{y = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}}$$

Determinamos la recta tangente en $x = 1$.

$$\left. \begin{aligned} f(1) &= \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} \\ f'(1) &= \frac{1}{4} \\ y - f(1) &= f'(1)(x-1) \end{aligned} \right\} \Rightarrow y - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}(x-1) \Rightarrow y = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}}$$

c) La función entre -1 y 0 tiene la expresión $f(x) = \frac{x}{1-x}$.

Calculamos primero la integral indefinida.

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= \int \frac{x}{1-x} dx = \int \frac{x-1+1}{1-x} dx = \int \frac{x-1}{1-x} dx + \int \frac{1}{1-x} dx = \\ &= -\int \frac{1-x}{1-x} dx - \int \frac{-1}{1-x} dx = -\int dx - \int \frac{-1}{1-x} dx = -x - \ln(1-x) + C \end{aligned}$$

Calculamos la integral definida.

$$\begin{aligned} \int_{-1}^0 f(x) dx &= \int_{-1}^0 \frac{x}{1-x} dx = \left[-x - \ln(1-x) \right]_{-1}^0 = \\ &= \left[-0 - \ln(1-0) \right] - \left[-(-1) - \ln(1-(-1)) \right] = \boxed{-1 + \ln 2} \end{aligned}$$

3. Dados los planos $\alpha: 2x - 2y + 4z - 7 = 0$; $\beta: \begin{cases} x = 1 - \lambda + 3\mu \\ y = 5 + \lambda + \mu \\ z = 4 + \lambda - \mu \end{cases}$ y la recta $r: \begin{cases} x + 2z - 3 = 0 \\ y - 5 = 0 \end{cases}$

- a) Estudia la posición relativa de los planos α y β . Calcula la distancia entre ellos.
 b) Calcula la ecuación implícita o general del plano que es perpendicular a α y contiene a la recta r .
 c) Sean P y Q los puntos de intersección de la recta r con los planos XY e YZ respectivamente. Calcula la distancia entre P y Q .

- a) Obtenemos el vector normal de cada uno de los planos.

$$\alpha: 2x - 2y + 4z - 7 = 0 \Rightarrow \vec{n} = (2, -2, 4)$$

$$\beta: \begin{cases} x = 1 - \lambda + 3\mu \\ y = 5 + \lambda + \mu \\ z = 4 + \lambda - \mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{u} = (-1, 1, 1) \\ \vec{v} = (3, 1, -1) \end{cases} \Rightarrow \vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= -i + 3j - k - 3k - j - i = -2i + 2j - 4k = (-2, 2, -4)$$

Los vectores normales tienen coordenadas proporcionales y los planos son paralelos o coincidentes.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{n} = (2, -2, 4) \\ \vec{n} = (-2, 2, -4) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{2}{-2} = \frac{-2}{2} = \frac{4}{-4}$$

Hallamos un punto del plano β y comprobamos si pertenece al plano α .

$$\beta: \begin{cases} x = 1 - \lambda + 3\mu \\ y = 5 + \lambda + \mu \\ z = 4 + \lambda - \mu \end{cases} \Rightarrow P(1, 5, 4) \in \beta$$

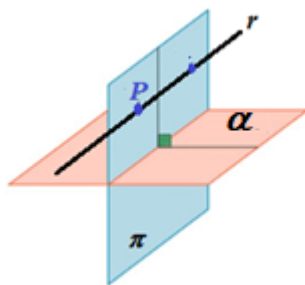
$$\left. \begin{array}{l} \alpha: 2x - 2y + 4z - 7 = 0 \\ \text{¿} P(1, 5, 4) \in \alpha? \end{array} \right\} \Rightarrow \text{¿} 2 \cdot 1 - 2 \cdot 5 + 4 \cdot 4 - 7 = 0? \Rightarrow \text{¿} 2 - 10 + 16 - 7 = 1 \neq 0? \text{¿}$$

La igualdad no es cierta y los planos α y β son paralelos.

La distancia entre los planos paralelos es la distancia de un punto del plano β , por ejemplo $P(1, 5, 4)$ al plano α .

$$\left. \begin{array}{l} P(1, 5, 4) \in \beta \\ \alpha: 2x - 2y + 4z - 7 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow d(\alpha, \beta) = d(P, \alpha) = \frac{|2 - 2 \cdot 5 + 4 \cdot 4 - 7|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 4^2}} = \frac{1}{\sqrt{24}} = \boxed{\frac{\sqrt{6}}{12} \text{ unidades}}$$

- b) El plano π perpendicular a α y que contiene a r contiene un punto P de la recta y tiene como vectores directores el vector director de la recta y el normal del plano.



Hallamos un punto y un vector director de la recta r .

$$r: \begin{cases} x+2z-3=0 \\ y-5=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3-2z \\ y=5 \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} x=3-2\lambda \\ y=5 \\ z=\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P(3,5,0) \in r \\ \vec{v}_r = (-2,0,1) \end{cases}$$

Determinamos la ecuación del plano π .

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} = \vec{n} = (2, -2, 4) \\ \vec{v} = \vec{v}_r = (-2, 0, 1) \\ P(3, 5, 0) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \pi': \begin{vmatrix} x-3 & y-5 & z \\ 2 & -2 & 4 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -2x+6-8y+40-4z-2y+10=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2x-10y-4z+56=0 \Rightarrow \boxed{\pi: x+5y+2z-28=0}$$

El plano buscado tiene ecuación $\pi: x+5y+2z-28=0$.

c) Hallamos los puntos P y Q intersección de la recta r con los planos XY e YZ .

$$r: \begin{cases} x+2z-3=0 \\ y-5=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-3=0 \\ y-5=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=5 \end{cases} \Rightarrow P(3,5,0)$$

Plano $XY \rightarrow z=0$

$$r: \begin{cases} x+2z-3=0 \\ y-5=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2z-3=0 \\ y-5=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=\frac{3}{2} \\ y=5 \end{cases} \Rightarrow Q\left(0,5,\frac{3}{2}\right)$$

Plano $YZ \rightarrow x=0$

Los puntos tienen coordenadas $P(3,5,0)$ y $Q\left(0,5,\frac{3}{2}\right)$.

La distancia entre ellos es el módulo del vector $\overrightarrow{PQ}$.

$$\overrightarrow{PQ} = \left(0,5,\frac{3}{2}\right) - (3,5,0) = \left(-3,0,\frac{3}{2}\right)$$

$$d(P,Q) = |\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{(-3)^2 + 0^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \boxed{\frac{3\sqrt{5}}{2} \text{ unidades}}$$

4. Las ventas totales diarias en un restaurante pequeño son una variable que sigue una distribución normal de media 1220 € al día y desviación típica 120 € al día.
- a) Calcula la probabilidad de que en un día elegido al azar las ventas superen los 1400€.
- b) Si el restaurante debe vender al menos 980 € al día para cubrir gastos, ¿cuál es la probabilidad de que en un día elegido al azar el restaurante no cubra gastos?

X = ventas totales diarias en un restaurante pequeño. $X = N(1220, 120)$

a) Nos piden calcular $P(X > 1400)$.

$$P(X > 1400) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(Z > \frac{1400 - 1220}{120}\right) = P(Z > 1.5) =$$

$$= 1 - P(Z \leq 1.5) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = 1 - 0.9332 = \boxed{0.0668}$$

La probabilidad de que en un día elegido al azar las ventas superen los 1400€ tiene un valor de 0.0668.

b) Debemos hallar $P(X < 980)$.

$$P(X < 980) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(Z < \frac{980 - 1220}{120}\right) = P(Z < -2) =$$

$$= P(Z > 2) = 1 - P(Z \leq 2) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = 1 - 0.9772 = \boxed{0.0228}$$

La probabilidad de que en un día elegido al azar el restaurante no cubra gastos es de 0.0228.