



**Proba de Avaliación do Bacharelato
para o Acceso á Universidade
XUÑO 2018**

Código: 20

MATEMÁTICAS II

(Responde só os exercicios dunha das opcións. Puntuación máxima dos exercicios de cada opción: exercicio 1 = 2 puntos, exercicio 2 = 3 puntos, exercicio 3 = 3 puntos, exercicio 4 = 2 puntos)

OPCIÓN A

1. a) Dada la matriz $M = \begin{pmatrix} m & m+4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, calcule los valores de m para que la matriz inversa de M sea $\frac{1}{4}M$.
- b) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$, calcule la matriz X que verifica: $B^t \cdot A \cdot X + C^t = X$, siendo B^t y C^t las transpuestas B y C respectivamente..
2. a) Calcula: los intervalos de crecimiento y decrecimiento y máximos y mínimos relativos de $f(x) = \frac{x-1}{x^2}$
- b) Dibuja y calcula el área de la región limitada por la parábola $y = x^2 - 4x$ y la recta $y = x - 4$. (Para el dibujo de la parábola, indica: puntos de corte con los ejes, el vértice y la concavidad y convexidad)
3. a) Determina el valor de λ para que los puntos $A(3, 0, -1)$, $B(2, 2, -1)$, $C(1, -2, -5)$ y $D(\lambda, 6, -1)$ sean coplanarios y calcula la ecuación implícita o general del plano que los contiene.
- b) Determina la posición relativa de plano $\pi: 4x + 2y - 3z - 15 = 0$ y la recta r que pasa por los puntos $P(-4, 4, 2)$ y $Q(4, 8, -4)$. Si se cortan, calcula el punto de corte.
- c) Calcula el punto simétrico del punto $P(-4, 4, 2)$ respecto del plano $\pi: 4x + 2y - 3z - 15 = 0$.
4. En las rebajas de unos grandes almacenes están mezcladas para la venta 200 bufandas de la marca A, 150 de la marca B y 50 de la marca C. La probabilidad de que una bufanda de la marca A sea defectuosa es 0,01; 0,02 es el de la marca B y 0,04 si es de la marca C. Una persona elige una bufanda al azar
 - a) Calcula la probabilidad de que la bufanda elegida sea de la marca A o defectuosa.
 - b) Calcula la probabilidad de que la bufanda elegida no sea defectuosa ni de la marca C.
 - c) Si la bufanda elegida no es defectuosa, cual es la probabilidad de que sea de la marca B.

OPCIÓN B

1. a) Discute, según los valores del parámetro m , el sistema de ecuaciones
$$\begin{cases} 3x - 6y + mz = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ x + y = m \end{cases}$$
- b) Resuélvelo, si es posible, cuando $m = 3$.
2. a) Calcula a y b para que la función $f(x) = \begin{cases} e^{2x} + ax + b & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{2} \cdot (x^2 + 2) & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ sea continua y derivable en $x = 0$.
- b) Calcula los vértices del rectángulo de área máxima que se puede construir, si uno de los vértices es $O(0,0)$, otro está sobre el eje X , otro sobre el eje Y y el otro sobre la recta $2x + 3y = 8$.
- c) Calcula $\int_0^3 x\sqrt{x+1}dx$
3. a) Dado el plano $\pi : 2x - y - 2z - 3 = 0$, calcula el valor de a para que la recta r que pasa por los puntos $P(a, a, a)$ y $Q(1, 3, 0)$ sea paralela al plano π .
- b) Para $a = 1$, calcula la distancia de r a π .
- c) Para $a = 1$, calcula la ecuación implícita o general del plano que es perpendicular a π y contiene a r .
4. a) Un examen tipo test consta de 10 preguntas, cada una con 4 respuestas de las cuales solo una es correcta. Si se contesta al azar, ¿cuál es la probabilidad de contestar bien por lo menos dos preguntas?
- b) La duración de un cierto tipo de pilas eléctricas es una variable que sigue una distribución normal de media 50 horas y desviación típica 5 horas. Calcula la probabilidad de que una pila eléctrica de este tipo, elegida al azar, dure menos de 42 horas.

SOLUCIONES**OPCIÓN A**

1. a) Dada la matriz $M = \begin{pmatrix} m & m+4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, calcule los valores de m para que la matriz inversa de M sea $\frac{1}{4}M$.
- b) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$, calcule la matriz X que verifica: $B^t \cdot A \cdot X + C^t = X$, siendo B^t y C^t las transpuestas B y C respectivamente..

a) Si la matriz inversa de M es $\frac{1}{4}M$ debe cumplirse que $\frac{1}{4}M \cdot M = I$.

$$\frac{1}{4}M \cdot M = I \Rightarrow \frac{1}{4} \begin{pmatrix} m & m+4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m & m+4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} m^2 + m + 4 & m^2 + 4m + m + 4 \\ m + 1 & m + 4 + 1 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} m^2 + m + 4 & m^2 + 5m + 4 \\ m + 1 & m + 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m^2 + m + 4 = 4 \rightarrow m^2 + m = 0 \rightarrow m(m+1) = 0 \rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = -1 \end{cases} \\ m^2 + 5m + 4 = 0 \rightarrow m = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 16}}{2} = \frac{-5 \pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{-5+3}{2} = -1 = m \\ \frac{-5-3}{2} = -4 \end{cases} \\ m + 1 = 0 \rightarrow m = -1 \\ m + 5 = 4 \rightarrow m = -1 \end{cases}$$

El único valor de m para el que la inversa de la matriz M es $\frac{1}{4}M$ es $m = -1$.

b) Despejamos X en la ecuación matricial.

$$B^t \cdot A \cdot X + C^t = X \Rightarrow B^t \cdot A \cdot X - X = -C^t \Rightarrow (B^t \cdot A - I) \cdot X = -C^t \Rightarrow X = -(B^t A - I)^{-1} C^t$$

Comprobamos que la matriz $B^t A - I$ tiene inversa y la calculamos.

$$B^t A - I = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|B^t A - I| = \begin{vmatrix} -4 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 0 - 3 - 0 - 0 = -3 \neq 0 \rightarrow \text{Existe la inversa}$$

$$(B^t A - I)^{-1} = \frac{\text{Adj}(B^t A - I)^t}{|B^t A - I|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} -4 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}}{-3} = \frac{-1}{3} \left(\begin{array}{ccc} + \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} -4 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} -4 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \end{array} \right)$$

$$(B^t A - I)^{-1} = \frac{-1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1/3 & 0 & -4/3 \end{pmatrix}$$

Calculamos la expresión de la matriz X.

$$X = -(B^t A - I)^{-1} C^t = - \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1/3 & 0 & -4/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -4/3 \end{pmatrix}$$

La matriz X solución de la ecuación matricial $B^t \cdot A \cdot X + C^t = X$ es $X = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -4/3 \end{pmatrix}$.

2. a) Calcula: los intervalos de crecimiento y decrecimiento y máximos y mínimos relativos de

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2}$$

b) Dibuja y calcula el área de la región limitada por la parábola $y = x^2 - 4x$ y la recta $y = x - 4$.
(Para el dibujo de la parábola, indica: puntos de corte con los ejes, el vértice y la concavidad y convexidad)

a) El dominio de la función son todos los números reales menos los que anulan el denominador.

$$\text{Dominio} = \mathbb{R} - \{0\}.$$

Averiguamos cuando se anula la derivada de la función (puntos críticos).

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{1 \cdot x^2 - 2x(x-1)}{x^4} = \frac{x^2 - 2x^2 + 2x}{x^4} = \frac{-x^2 + 2x}{x^4} = \frac{-x+2}{x^3}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-x+2}{x^3} = 0 \Rightarrow -x+2 = 0 \Rightarrow \boxed{x=2}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de $x=0$ (excluido del dominio) y $x=2$ (punto crítico).

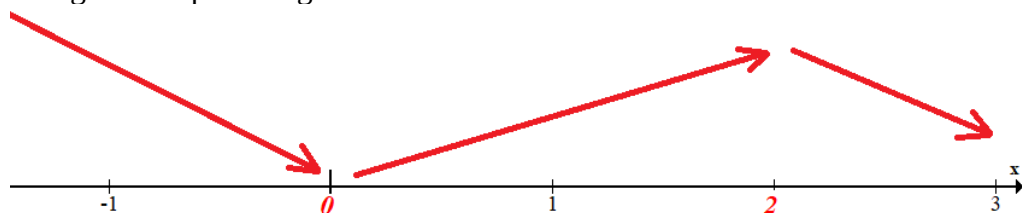
- En el intervalo $(-\infty, 0)$ tomamos $x=-1$ y la derivada vale

$$f'(-1) = \frac{-(-1)+2}{(-1)^3} = -3 < 0. \text{ La función decrece en } (-\infty, 0).$$

- En el intervalo $(0, 2)$ tomamos $x=1$ y la derivada vale $f'(1) = \frac{-1+2}{1^3} = 1 > 0$. La función crece en $(0, 2)$.

- En el intervalo $(2, +\infty)$ tomamos $x=3$ y la derivada vale $f'(3) = \frac{-3+2}{3^3} = \frac{-1}{27} < 0$. La función decrece en $(2, +\infty)$.

La función sigue el esquema siguiente.



La función decrece en $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ y crece en $(0, 2)$.

La función tiene un máximo relativo en $x=2$. La función no tiene mínimo relativo.

b) Puntos de corte con los ejes.

$$\left. \begin{array}{l} y = x^2 - 4x \\ \text{Eje } OX \rightarrow y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x^2 - 4x = 0 \Rightarrow x(x-4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \rightarrow A(0,0) \\ x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4 \rightarrow B(4,0) \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} y = x^2 - 4x \\ \text{Eje } OY \rightarrow x = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow y = 0^2 - 4 \cdot 0 = 0 \Rightarrow A(0,0)$$

Vértice

$$\left. \begin{array}{l} y' = 2x - 4 \\ y' = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 2x - 4 = 0 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = \frac{4}{2} = 2 \Rightarrow y = 2^2 - 4 \cdot 2 = -4 \Rightarrow V(2, -4)$$

Concavidad y convexidad.

$$y' = 2x - 4 \Rightarrow y'' = 2 > 0$$

Al ser la segunda derivada positiva la parábola es convexa (U).

Hallamos los puntos de corte de la parábola y la recta.

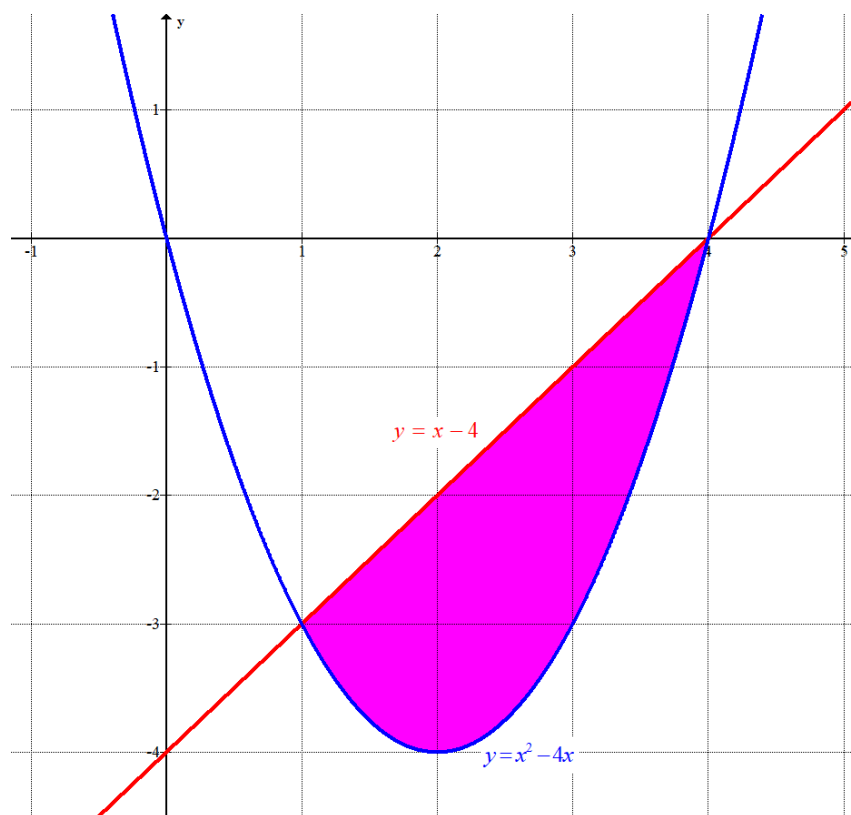
$$\left. \begin{array}{l} y = x^2 - 4x \\ y = x - 4 \end{array} \right\} \Rightarrow x^2 - 4x = x - 4 \Rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 16}}{2} =$$

$$= \frac{5 \pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{5+3}{2} = 4 = x \\ \frac{5-3}{2} = 1 = x \end{cases}$$

Hacemos una tabla de valores, dibujamos las gráficas y la región del plano encerrada entre ellas.

x	$y = x^2 - 4x$
1	-3
2	-4
3	-3
4	0

x	$y = x - 4$
1	-3
4	0



Contando cuadraditos de 1 unidad cuadrada de área podemos decir que el área de la región del plano encerrada entre las dos gráficas tiene un valor entre 4 y 5 unidades cuadradas. Calculamos su valor exacto usando el cálculo integral.

$$\text{Área} = \int_1^4 x - 4 - (x^2 - 4x) dx = \int_1^4 x - 4 - x^2 + 4x dx = \int_1^4 -x^2 + 5x - 4 dx =$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} + 5\frac{x^2}{2} - 4x \right]_1^4 = \left[-\frac{4^3}{3} + 5\frac{4^2}{2} - 4 \cdot 4 \right] - \left[-\frac{1^3}{3} + 5\frac{1^2}{2} - 4 \cdot 1 \right] =$$

$$= -\frac{64}{3} + 40 - 16 + \frac{1}{3} - \frac{5}{2} + 4 = -21 + 40 - 16 + 4 - 2.5 = \boxed{4.5u^2}$$

3. a) Determina el valor de λ para que los puntos $A(3, 0, -1)$, $B(2, 2, -1)$, $C(1, -2, -5)$ y $D(\lambda, 6, -1)$ sean coplanarios y calcula la ecuación implícita o general del plano que los contiene.
- b) Determina la posición relativa de plano $\pi: 4x + 2y - 3z - 15 = 0$ y la recta r que pasa por los puntos $P(-4, 4, 2)$ y $Q(4, 8, -4)$. Si se cortan, calcula el punto de corte.
- c) Calcula el punto simétrico del punto $P(-4, 4, 2)$ respecto del plano $\pi: 4x + 2y - 3z - 15 = 0$.

a) Hallamos la ecuación del plano que contiene los puntos A, B y C.

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (2, 2, -1) - (3, 0, -1) = (-1, 2, 0) \\ \overrightarrow{AC} = (1, -2, -5) - (3, 0, -1) = (-2, -2, -4) \\ A(3, 0, -1) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \pi: \begin{vmatrix} x-3 & y & z+1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & -4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -8(x-3) + 0 + 2(z+1) + 4(z+1) - 4y - 0 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -8x + 24 + 2z + 2 + 4z + 4 - 4y = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -8x - 4y + 6z + 30 = 0 \Rightarrow \boxed{\pi: 4x + 2y - 3z - 15 = 0}$$

Para que los puntos A, B, C y D sean coplanarios el punto D debe pertenecer al plano π .

$$\left. \begin{array}{l} \pi: 4x + 2y - 3z - 15 = 0 \\ D(\lambda, 6, -1) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow 4\lambda + 12 + 3 - 15 = 0 \Rightarrow 4\lambda = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda = 0}$$

Para $\lambda = 0$ los cuatro puntos son coplanarios.

El plano que contiene a los cuatro puntos es $\pi: 4x + 2y - 3z - 15 = 0$.

b) Hallamos la ecuación de la recta que pasa por los puntos P y Q.

$$\overrightarrow{PQ} = (4, 8, -4) - (-4, 4, 2) = (8, 4, -6)$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = \frac{1}{2} \overrightarrow{PQ} = (4, 2, -3) \\ P(-4, 4, 2) \in r \end{array} \right\} \Rightarrow r: \begin{cases} x = -4 + 4\lambda \\ y = 4 + 2\lambda \\ z = 2 - 3\lambda \end{cases}$$

Planteamos el sistema formado por la ecuación del plano y la ecuación de la recta. Si la solución es única entonces plano y recta se cortan, si tiene soluciones infinitas entonces la recta está contenida en el plano y si no tiene solución la recta es paralela al plano.

$$\left. \begin{array}{l} \pi: 4x + 2y - 3z - 15 = 0 \\ r: \begin{cases} x = -4 + 4\lambda \\ y = 4 + 2\lambda \\ z = 2 - 3\lambda \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow 4(-4 + 4\lambda) + 2(4 + 2\lambda) - 3(2 - 3\lambda) - 15 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -16 + 16\lambda + 8 + 4\lambda - 6 + 9\lambda - 15 = 0 \Rightarrow 29\lambda = 29 \Rightarrow \lambda = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = -4 + 4 = 0 \\ y = 4 + 2 = 6 \\ z = 2 - 3 = -1 \end{cases}$$

La solución del sistema es única y la recta corta al plano en el punto $A(0, 6, -1)$.

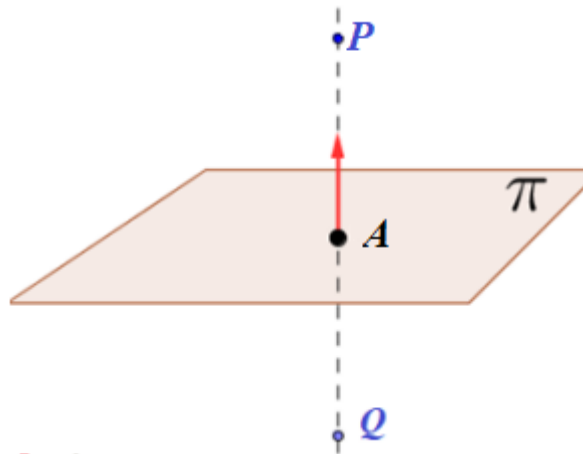
- c) El punto de corte de la recta que pasa por P y Q y el plano es el punto A que resulta ser el punto medio del segmento PQ, por lo que el punto simétrico de P respecto del plano es el punto Q.

Comprobamos que la recta que pasa por P y Q corta perpendicularmente al plano.

$$\left. \begin{array}{l} \pi : 4x + 2y - 3z - 15 = 0 \Rightarrow \vec{n} = (4, 2, -3) \\ \overrightarrow{PQ} = (8, 4, -6) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{4}{8} = \frac{2}{4} = \frac{-3}{-6} \Rightarrow \vec{n} \parallel \overrightarrow{PQ} \Rightarrow r \perp \pi$$

Comprobamos que el punto A es el punto medio del segmento PQ.

$$\frac{(-4, 4, 2) + (4, 8, -4)}{2} = (0, 6, -1)$$



Hemos comprobado que el punto simétrico de $P(-4, 4, 2)$ respecto del plano $\pi : 4x + 2y - 3z - 15 = 0$ es el punto $Q(4, 8, -4)$.

4. En las rebajas de unos grandes almacenes están mezcladas para la venta 200 bufandas de la marca A, 150 de la marca B y 50 de la marca C. La probabilidad de que una bufanda de la marca A sea defectuosa es 0,01; 0,02 es el de la marca B y 0,04 si es de la marca C. Una persona elige una bufanda al azar
- Calcula la probabilidad de que la bufanda elegida sea de la marca A o defectuosa.
 - Calcula la probabilidad de que la bufanda elegida no sea defectuosa ni de la marca C.
 - Si la bufanda elegida no es defectuosa, cual es la probabilidad de que sea de la marca B.

Sabemos que hay un total de $200 + 150 + 50 = 400$ bufandas.

En el montón de bufandas habrá un 1 % de bufandas de la marca A defectuosas: $0.01 \cdot 200 = 2$ bufandas A defectuosas.

En el montón de bufandas habrá un 2 % de bufandas de la marca B defectuosas: $0.02 \cdot 150 = 3$ bufandas B defectuosas.

En el montón de bufandas habrá un 4 % de bufandas de la marca C defectuosas: $0.04 \cdot 50 = 2$ bufandas C defectuosas.

En el montón de 400 bufandas hay un total de $2 + 3 + 2 = 7$ bufandas defectuosas.

- a) De un total de 400 bufandas hay 200 bufandas de la marca A, 3 bufandas de la marca B defectuosas y 2 bufandas de la marca C defectuosas. Aplicamos la regla de Laplace y

tenemos que la probabilidad pedida es $\frac{200+3+2}{400} = \frac{205}{400} = \frac{41}{80} = 0.5125$.

- b) Si la bufanda elegida no debe ser defectuosa ni de la marca C entonces debe ser no defectuosa de la marca A o no defectuosa de la marca B.

De un total de 400 bufandas hay $200 - 2 = 198$ bufandas no defectuosas de la marca A y $150 - 3 = 147$ bufandas no defectuosas de la marca B. Aplicamos la regla de Laplace y la

probabilidad pedida es $\frac{198+147}{400} = \frac{345}{400} = 0.8625$.

- c) Hay un total de 393 bufandas no defectuosas y de ellas 147 son de la marca B. Aplicando la

regla de Laplace tenemos que la probabilidad pedida es $\frac{147}{393} \approx 0.374$.

OPCIÓN B

1. a) Discute, según los valores del parámetro m , el sistema de ecuaciones $\begin{cases} 3x - 6y + mz = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ x + y = m \end{cases}$
- b) Resuélvelo, si es posible, cuando $m = 3$.

Este sistema tiene la matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} 3 & -6 & m \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada

$$A/B = \begin{pmatrix} 3 & -6 & m & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & m \end{pmatrix}.$$

Estudiamos el rango de la matriz de coeficientes y la matriz ampliada en función del valor de m . Triangulamos la matriz ampliada usando el método de Gauss.

$$\begin{aligned} A/B &= \begin{pmatrix} 3 & -6 & m & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & m \end{pmatrix} \Rightarrow \{ \text{Fila } 2^a \leftrightarrow \text{Fila } 1^a \} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & -6 & m & 0 \\ 1 & 1 & 0 & m \end{pmatrix} \Rightarrow \\ &\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 1^a \\ 1 \quad 1 \quad 0 \quad m \\ -1 \quad 2 \quad -1 \quad 0 \\ \hline 0 \quad 3 \quad -1 \quad m \rightarrow \text{Nueva fila } 3^a \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - 3 \cdot \text{Fila } 1^a \\ 3 \quad -6 \quad m \quad 0 \\ -3 \quad 6 \quad -3 \quad 0 \\ \hline 0 \quad 0 \quad m-3 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva fila } 2^a \end{array} \right\} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & m-3 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & m \end{pmatrix} \Rightarrow \{ \text{Fila } 2^a \leftrightarrow \text{Fila } 3^a \} \Rightarrow \begin{pmatrix} \overbrace{1 \quad -2 \quad 1 \quad 0}^{A/B} \\ 0 \quad 3 \quad -1 \quad m \\ \underbrace{0 \quad 0 \quad m-3 \quad 0}_A \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Estudiamos cuando se anula el determinante de la matriz A .

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & m-3 \end{vmatrix} = 3(m-3) = 0 \Rightarrow \boxed{m=3}$$

Estudiamos dos casos diferentes.

CASO 1. $m \neq 3$

En este caso el rango de las matrices A y A/B es 3 igual que el número de incógnitas (3). El sistema es **compatible determinado** (solución única).

CASO 2. $m = 3$

En este caso la matriz equivalente a la matriz ampliada A/B queda

$$\left(\begin{array}{cccc} \overbrace{1 & -2 & 1}^{A/B} & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 3 \\ \underbrace{0 & 0 & 0}_A & 0 \end{array} \right).$$

El rango de la matriz A y el de la matriz A/B es 2. Los rangos son iguales, pero menores que el número de incógnitas (3). El sistema es **compatible indeterminado** (infinitas soluciones).

Resumiendo: Para $m \neq 3$ el sistema es **compatible determinado** y para $m = 3$ el sistema es **compatible indeterminado**.

a) Si $m = 3$ el sistema es compatible indeterminado.

Buscamos las soluciones a partir del sistema equivalente obtenido en el apartado anterior.

$$\left(\begin{array}{cccc} \overbrace{1 & -2 & 1}^{A/B} & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 3 \\ \underbrace{0 & 0 & 0}_A & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x - 2y + z = 0 \\ 3y - z = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x - 2y + z = 0 \\ 3y - 3 = z \end{array} \right\} \Rightarrow x - 2y + 3y - 3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 3 - y \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x = 3 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = -3 + 3\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}}$$

Las soluciones del sistema son $x = 3 - \lambda$; $y = \lambda$; $z = -3 + 3\lambda$, siendo $\lambda \in \mathbb{R}$.

2. a) Calcula a y b para que la función $f(x) = \begin{cases} e^{2x} + ax + b & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{2} \cdot (x^2 + 2) & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ sea continua y derivable en $x = 0$.
- b) Calcula los vértices del rectángulo de área máxima que se puede construir, si uno de los vértices es $O(0,0)$, otro está sobre el eje X , otro sobre el eje Y y el otro sobre la recta $2x + 3y = 8$.
- c) Calcula $\int_0^3 x\sqrt{x+1}dx$

a) Para que la función sea continua en $x = 0$ debe cumplirse que $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.

$$\left. \begin{aligned} f(0) &= \frac{1}{2} \cdot (0^2 + 2) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{2x} + ax + b = e^0 + a \cdot 0 + b = b + 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{2} \cdot (x^2 + 2) = 1 \\ f(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \end{aligned} \right\} \Rightarrow b + 1 = 1 \Rightarrow \boxed{b = 0}$$

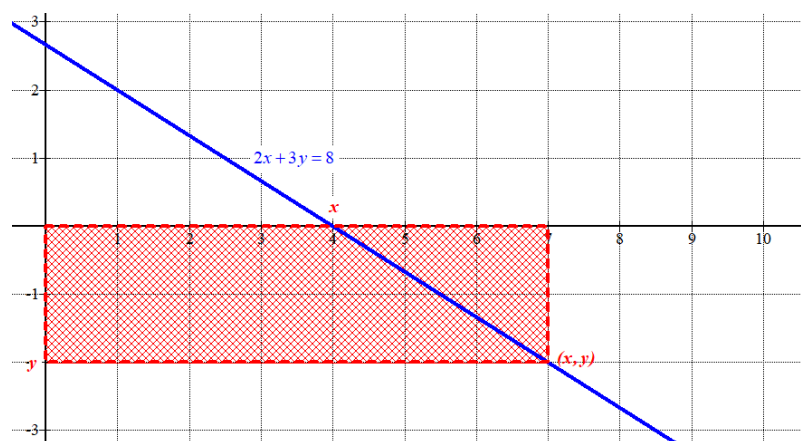
La derivada de la función en $\mathbb{R} - \{0\}$ es $f'(x) = \begin{cases} 2e^{2x} + a & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{2} \cdot (2x) = x & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

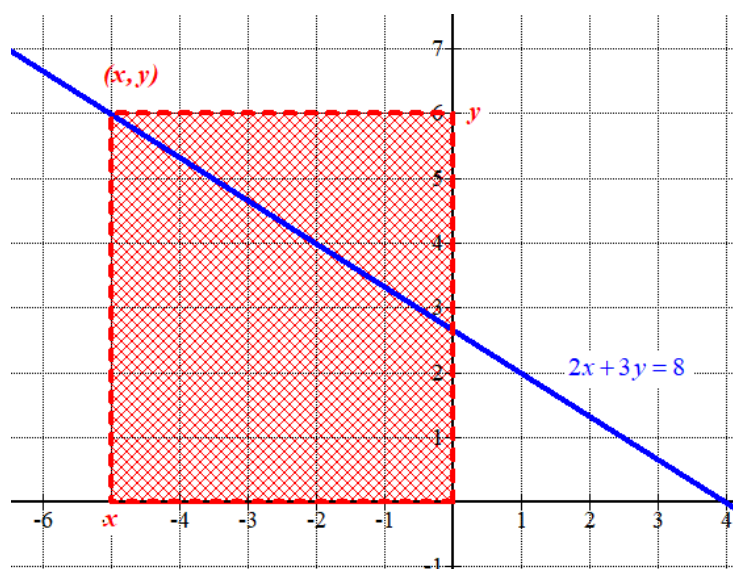
Para que la función sea derivable en $x = 0$ deben coincidir las derivadas laterales.

$$\left. \begin{aligned} f'(0^-) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 2e^{2x} + a = 2e^0 + a = a + 2 \\ f'(0^+) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0 \\ f'(0^-) &= f'(0^+) \end{aligned} \right\} \Rightarrow a + 2 = 0 \Rightarrow \boxed{a = -2}$$

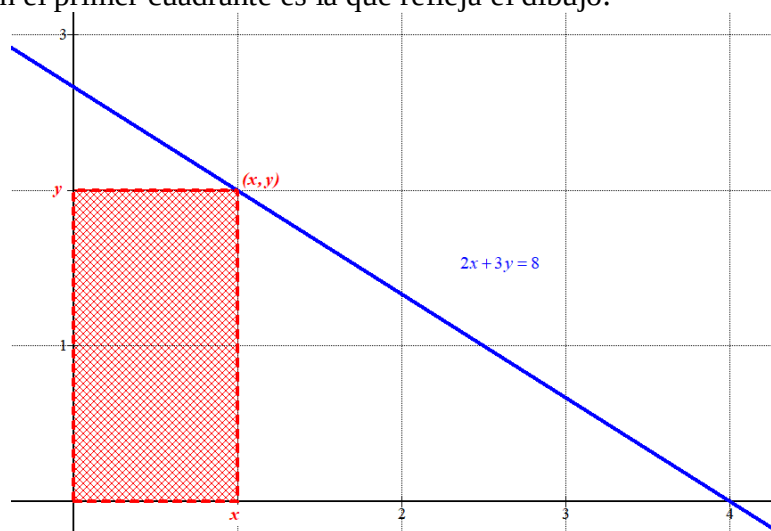
Los valores a y b para que la función sea continua y derivable en $x = 0$ son $a = -2$ y $b = 0$.

- b) Consideramos que el rectángulo se sitúa en el primer cuadrante. Pues en el segundo y cuarto cuadrante el área del rectángulo puede ser tan grande como se quiera, no existiría un rectángulo de área máxima.





La situación en el primer cuadrante es la que refleja el dibujo.



El área del rectángulo es $A(x, y) = xy$. Como uno de los vértices está sobre la recta se cumple $2x + 3y = 8 \Rightarrow y = \frac{8 - 2x}{3}$. Lo aplicamos en la expresión de la función área.

$$\left. \begin{array}{l} A(x, y) = xy \\ y = \frac{8 - 2x}{3} \end{array} \right\} \Rightarrow A(x) = x \frac{8 - 2x}{3} = \frac{8x - 2x^2}{3}$$

La expresión de la función área es $A(x) = \frac{8x - 2x^2}{3}$; siendo $0 \leq x \leq 4$.

Buscamos los puntos críticos de la función.

$$\left. \begin{array}{l} A(x) = \frac{8x - 2x^2}{3} \Rightarrow A'(x) = \frac{8 - 4x}{3} \\ A'(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{8 - 4x}{3} = 0 \Rightarrow 8 - 4x = 0 \Rightarrow \boxed{x = 2}$$

Sustituimos $x = 2$ en la segunda derivada.

$$A'(x) = \frac{8-4x}{3} \Rightarrow A''(x) = \frac{-4}{3} \Rightarrow A''(2) = \frac{-4}{3} < 0$$

Al ser la segunda derivada negativa la función tiene un máximo relativo en $x = 2$.

Para este valor de x tenemos que $y = \frac{8-2 \cdot 2}{3} = \frac{4}{3}$.

El rectángulo de área máxima cumpliendo lo pedido en el ejercicio tiene sus vértices en $O(0, 0)$, $A(2, 0)$, $B\left(2, \frac{4}{3}\right)$ y $C\left(0, \frac{4}{3}\right)$.

c) Calculamos primero la integral indefinida.

$$\begin{aligned} \int x\sqrt{x+1}dx &= \left\{ \begin{array}{l} \text{Cambio de variable} \\ x+1=t \Rightarrow dx=dt \\ x=t-1 \end{array} \right\} = \int (t-1)\sqrt{t}dt = \int t\sqrt{t}dt - \int \sqrt{t}dt = \\ &= \int t \cdot t^{1/2}dt - \int t^{1/2}dt = \int t^{3/2}dt - \int t^{1/2}dt = \frac{t^{1+3/2}}{1+3/2} - \frac{t^{1+1/2}}{1+1/2} = \frac{2}{5}t^{5/2} - \frac{2}{3}t^{3/2} = \\ &= \left\{ \begin{array}{l} \text{Cambio de variable} \\ x+1=t \end{array} \right\} = \frac{2}{5}\sqrt{(x+1)^5} - \frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3} + K \end{aligned}$$

Usamos lo obtenido para determinar el valor de la integral definida.

$$\begin{aligned} \int_0^3 x\sqrt{x+1}dx &= \left[\frac{2}{5}\sqrt{(x+1)^5} - \frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3} \right]_0^3 = \\ &= \left[\frac{2}{5}\sqrt{(3+1)^5} - \frac{2}{3}\sqrt{(3+1)^3} \right] - \left[\frac{2}{5}\sqrt{(0+1)^5} - \frac{2}{3}\sqrt{(0+1)^3} \right] = \\ &= \frac{2}{5}\sqrt{4^5} - \frac{2}{3}\sqrt{4^3} - \frac{2}{5} + \frac{2}{3} = \boxed{\frac{116}{15}} \end{aligned}$$

3. a) Dado el plano $\pi: 2x - y - 2z - 3 = 0$, calcula el valor de a para que la recta r que pasa por los puntos $P(a, a, a)$ y $Q(1, 3, 0)$ sea paralela al plano π .
- b) Para $a = 1$, calcula la distancia de r a π .
- c) Para $a = 1$, calcula la ecuación implícita o general del plano que es perpendicular a π y contiene a r .

a) Hallamos la ecuación de la recta r que pasa por los puntos P y Q .

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = \overrightarrow{PQ} = (1, 3, 0) - (a, a, a) = (1-a, 3-a, -a) \\ Q(1, 3, 0) \in r \end{array} \right\} \Rightarrow r: \begin{cases} x = 1 + (1-a)\lambda \\ y = 3 + (3-a)\lambda \\ z = -a\lambda \end{cases}$$

Para que la recta sea paralela al plano el vector normal del plano y el vector director de la recta deben ser perpendiculares, es decir, su producto escalar debe ser nulo.

$$\left. \begin{array}{l} \pi: 2x - y - 2z - 3 = 0 \rightarrow \vec{n} = (2, -1, -2) \\ \vec{v}_r = (1-a, 3-a, -a) \\ \vec{n} \perp \vec{v}_r \rightarrow \vec{n} \cdot \vec{v}_r = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow (2, -1, -2)(1-a, 3-a, -a) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 - 2a - 3 + a + 2a = 0 \Rightarrow \boxed{a = 1}$$

Sabemos que para $a = 1$ la recta y el plano son paralelos o la recta está contenida en el plano. Comprobamos que el punto $Q(1, 3, 0)$ perteneciente a la recta no está en el plano, con lo que recta y plano serían paralelos.

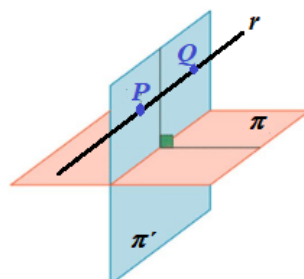
$$\left. \begin{array}{l} \pi: 2x - y - 2z - 3 = 0 \\ \text{¿} Q(1, 3, 0) \in \pi? \end{array} \right\} \Rightarrow \text{¿} 2 \cdot 1 - 3 - 2 \cdot 0 - 3 = 0? \Rightarrow \text{¡} 2 - 3 - 3 \neq 0! \text{¡}$$

Para $a = 1$ la recta y el plano son paralelos.

- b) Calculamos la distancia de la recta al plano como la distancia del punto Q perteneciente a la recta al plano.

$$\left. \begin{array}{l} \pi: 2x - y - 2z - 3 = 0 \\ Q(1, 3, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow d(r, \pi) = d(Q, \pi) = \frac{|2 \cdot 1 - 3 - 2 \cdot 0 - 3|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2}} = \frac{4}{3} \text{ unidades}$$

- c) El plano π' perpendicular a π y que contiene a r contiene al punto Q de la recta y tiene como vectores directores el vector director de la recta y el normal del plano.



$$\pi: 2x - y - 2z - 3 = 0 \rightarrow \vec{n} = (2, -1, -2)$$

$$\vec{v}_r = (1-1, 3-1, -1) = (0, 2, -1)$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} = \vec{n} = (2, -1, -2) \\ \vec{v} = \vec{v}_r = (0, 2, -1) \\ Q(1, 3, 0) \in \pi' \end{array} \right\} \Rightarrow \pi': \begin{vmatrix} x-1 & y-3 & z \\ 2 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x - 1 + 4z + 2y - 6 + 4x - 4 = 0 \Rightarrow \boxed{\pi': 5x + 2y + 4z - 11 = 0}$$

El plano buscado tiene ecuación $\pi': 5x + 2y + 4z - 11 = 0$.

4. a) Un examen tipo test consta de 10 preguntas, cada una con 4 respuestas de las cuales solo una es correcta. Si se contesta al azar, ¿cuál es la probabilidad de contestar bien por lo menos dos preguntas?
- b) La duración de un cierto tipo de pilas eléctricas es una variable que sigue una distribución normal de media 50 horas y desviación típica 5 horas. Calcula la probabilidad de que una pila eléctrica de este tipo, elegida al azar, dure menos de 42 horas.

- a) Llamamos X a la variable aleatoria que cuenta el número de respuestas correctas a un test de 10 preguntas. Esta variable es una binomial, pues las respuestas son al azar, siendo la probabilidad de acertar una pregunta de $p = 1/4$ y $n = 10$. $X = B(10, 0.25)$.
Nos piden calcular $P(X \geq 2)$.

$$\begin{aligned}
 P(X \geq 2) &= 1 - P(X < 2) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1)] = \\
 &= 1 - \left[\binom{10}{0} 0.25^0 \cdot 0.75^{10} + \binom{10}{1} 0.25^1 \cdot 0.75^9 \right] = 1 - [0.75^{10} + 10 \cdot 0.25 \cdot 0.75^9] \approx \boxed{0.756}
 \end{aligned}$$

La probabilidad de que una persona que responde al azar a un test de 10 preguntas conteste bien por lo menos dos preguntas tiene un valor aproximado de 0.756.

- b) X = La duración de un cierto tipo de pilas eléctricas (en horas). $X = N(50, 5)$

Nos piden calcular $P(X < 42)$. 42 es menor que la media (50) menos la desviación típica (5), por lo que la probabilidad debe tener un valor pequeño.

$$\begin{aligned}
 P(X < 42) &= \{ \text{Tipificamos} \} = P\left(Z < \frac{42 - 50}{5}\right) = P(Z < -1.6) = \\
 &= P(Z > 1.6) = 1 - P(Z \leq 1.6) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0,1) \end{array} \right\} = 1 - 0.9452 = \boxed{0.0548}
 \end{aligned}$$