



Universidad de Oviedo
Universidá d'Uviéu
University of Oviedo

Prueba de evaluación de Bachillerato para el
acceso a la Universidad (EBAU)
Curso 2018-2019

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

El examen presenta dos opciones: A y B. Elige una de ellas y responde razonadamente a los cuatro ejercicios de que consta dicha opción.

OPCIÓN A

1. Una persona ha obtenido 4000 euros de beneficio el último año por invertir en dos empresas A y B. La cantidad de dinero invertida en A fue m veces lo invertido en B, y los beneficios fueron el 10% en A y el 20% en B.

- a) [1 punto] Plantea un sistema de ecuaciones (en función de m) donde las incógnitas x e y sean las cantidades invertidas en ambas empresas, respectivamente.
- b) [2 puntos] ¿Para qué valores de m el sistema anterior tiene solución? En caso de existir, ¿es siempre única? ¿Es posible que en la empresa A se haya invertido el doble que en B? En caso afirmativo, ¿cuánto se invirtió en A?

2. Dos fuentes de energía A y B producen electricidad a la vez durante 6 horas. Si dado un instante de tiempo x en el intervalo $[0,6]$ se tiene que $f(x) = -x^2 + 6x + 3$ representa la electricidad producida por la fuente A y $g(x) = x + 9$ representa la electricidad producida por la fuente B, se pide:

- a) [1 punto] Determinar en qué momentos están produciendo la misma cantidad de electricidad ambas fuentes. ¿A cuánto asciende la producción de electricidad de cualquiera de las dos fuentes en esos momentos?
- b) [1 punto] Determinar en qué momentos la producción de la fuente A decrece.
- c) [1 punto] Obtener el instante de tiempo en el que la producción conjunta de las dos fuentes es máxima.

3. De los estudiantes de secundaria que fueron al viaje de estudios, se determina que tres quintas partes de ellos han consumido alcohol y que un cuarto de ellos han fumado. Además, se sabe que el veinte por ciento de ellos han consumido alcohol y fumado.

- a) [1 punto] Si un estudiante elegido al azar ha fumado, ¿cuál es la probabilidad de que haya consumido alcohol?
- b) [1 punto] Si se elige un estudiante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que no haya fumado y no haya bebido alcohol?

4. a) [1 punto] ¿Cuál sería el tamaño muestral mínimo necesario para que pueda estimarse la verdadera proporción de turistas asiáticos en Asturias a partir de la proporción muestral con un error de estimación máximo de 0,05 y un nivel de confianza del 95%?

- b) [1 punto] En una muestra aleatoria de 800 turistas que visitan Asturias se obtuvo que solo 80 de ellos son asiáticos. En función de esta muestra obtén, con un nivel de confianza del 95%, un intervalo para estimar la proporción de turistas asiáticos en Asturias (Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1: $F(1,28) = 0,90$; $F(1,64) = 0,95$; $F(1,96) = 0,975$; $F(2,33) = 0,99$; $F(2,58) = 0,995$.)



Universidad de Oviedo
Universidá d'Uviéu
University of Oviedo

Prueba de evaluación de Bachillerato para el
acceso a la Universidad (EBAU)
Curso 2018-2019

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

El examen presenta dos opciones: A y B. Elige una de ellas y responde razonadamente a los cuatro ejercicios de que consta dicha opción.

OPCIÓN B

1. Una empresa construye dos tipos de motocicletas eléctricas A y B. Cada jornada dispone de 3600 euros para la fabricación de estas motocicletas, siendo el coste de manufactura de 200 euros para la motocicleta tipo A y de 400 euros para la motocicleta tipo B. Además, las condiciones de mercado exigen que el número total de motocicletas fabricadas por jornada no sea mayor de 12. Por otro lado, debido a la organización de la producción en esa empresa, cada jornada no puede fabricar más de 8 motocicletas de tipo B.

- a) [2 puntos] ¿Cuántas motocicletas de cada tipo puede fabricar una jornada para cumplir todos los requisitos anteriores? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Se podrían fabricar 4 motocicletas de tipo A y el doble de tipo B?
- b) [1 punto] Sabiendo que el beneficio obtenido en la venta de una motocicleta de tipo A es de 200 euros y en la de tipo B es de 320 euros y suponiendo que se vende todo lo que se fabrica, ¿cuántas motocicletas de cada tipo deben fabricar en una jornada para que el beneficio sea máximo? ¿y para maximizar el número de motocicletas de tipo A fabricadas?

2. Dada la función $f(x) = \frac{9}{x} - \frac{18}{x^2} - 1$, se pide:

- a) [0,75 puntos] Encontrar la primitiva F de f verificando que $F(1) = 20$.
- b) [2,25 puntos] Estudiar y representar gráficamente la función f en todo su dominio. Calcular el área limitada por la curva y el eje X entre $x = 1$ y $x = 12$.

3. En una agencia de viajes online se ha observado que el 80% de los clientes compra un billete de avión, el 60% compra un bono de hotel y el 50% compra las dos cosas. Elegido un cliente al azar de esa agencia, se pide:

- a) [1 punto] Calcular la probabilidad de que compre un billete de avión o un bono de hotel.
- b) [1 punto] Calcular la probabilidad de que compre un bono de hotel si se sabe que compró un billete de avión.

4. Con el objetivo de estudiar los ingresos anuales de los ejecutivos de multinacionales, se seleccionó una muestra aleatoria de 576 ejecutivos, cuyos ingresos totales (suma de los ingresos de los 576 ejecutivos) el último año ascendieron a 28,8 millones de euros. Se supone además que los ingresos anuales de este tipo de ejecutivos sigue una distribución normal con desviación típica 3000 euros.

- a) [1 punto] Construye un intervalo de confianza para los ingresos medios anuales de este colectivo, al 99% de confianza.
- b) [1 punto] ¿Cuál sería el tamaño muestral mínimo necesario para estimar los verdaderos ingresos medios anuales a partir de la media muestral con un error de estimación máximo de 500 euros y un nivel de confianza del 99%?

(Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1: $F(1,28) = 0,90$; $F(1,64) = 0,95$; $F(1,96) = 0,975$; $F(2,33) = 0,99$; $F(2,58) = 0,995$.)

SOLUCIONES**OPCIÓN A**

1. Una persona ha obtenido 4000 euros de beneficio el último año por invertir en dos empresas A y B. La cantidad de dinero invertida en A fue m veces lo invertido en B, y los beneficios fueron el 10% en A y el 20% en B.

- a) [1 punto] Plantea un sistema de ecuaciones (en función de m) donde las incógnitas x e y sean las cantidades invertidas en ambas empresas, respectivamente.
- b) [2 puntos] ¿Para qué valores de m el sistema anterior tiene solución? En caso de existir, ¿es siempre única? ¿Es posible que en la empresa A se haya invertido el doble que en B? En caso afirmativo, ¿cuánto se invirtió en A?

a) Llamamos “ x ” al dinero invertido en A e “ y ” a lo invertido en B.

La cantidad de dinero invertida en A fue m veces lo invertido en B $\rightarrow x = my$.

Una persona ha obtenido 4000 euros de beneficio el último año por invertir en dos empresas A y B. Los beneficios fueron el 10% en A y el 20% en B $\rightarrow$

$$0.10 \cdot x + 0.20 \cdot y = 4000.$$

Reunimos las dos ecuaciones en un sistema.

$$\left. \begin{array}{l} x = my \\ 0.10 \cdot x + 0.20 \cdot y = 4000 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = my \\ x + 2y = 40000 \end{array} \right\}$$

b) Intentamos resolver el sistema.

$$\left. \begin{array}{l} x = my \\ x + 2y = 40000 \end{array} \right\} \Rightarrow my + 2y = 40000 \Rightarrow (m + 2)y = 40000$$

Nos surgen dos situaciones distintas: $m + 2 = 0$ o $m + 2 \neq 0$.

Si $m + 2 = 0$ la ecuación queda como una igualdad imposible: $0 = 40000$.

La situación no tiene solución si $m + 2 = 0 \rightarrow m = -2$.

Si $m + 2 \neq 0$ podemos continuar la resolución del sistema, pues puedo despejar la incógnita “ y ”.

$$(m + 2)y = 40000 \Rightarrow y = \frac{40000}{m + 2} \Rightarrow x = m \frac{40000}{m + 2} = \frac{40000m}{m + 2}$$

La situación tiene solución única si $m \neq -2$.

Aunque realmente podemos afirmar que el problema tiene solución, que además es única para cualquier valor de m positivo. Un valor de m negativo no tiene sentido. Por ejemplo si $m = -2$ no puede invertir 1000 € en la empresa B y -2000 en A, pues es una cantidad negativa.

¿Nos preguntan si es posible el valor $m = 2$?

Si es posible pues es un valor distinto de -2 . Sustituimos este valor en lo obtenido con

anterioridad y lo invertido en A es $x = \frac{40000m}{m + 2} = \frac{80000}{4} = 20000$ €.

2. Dos fuentes de energía A y B producen electricidad a la vez durante 6 horas. Si dado un instante de tiempo x en el intervalo $[0,6]$ se tiene que $f(x) = -x^2 + 6x + 3$ representa la electricidad producida por la fuente A y $g(x) = x + 9$ representa la electricidad producida por la fuente B, se pide:

- a) [1 punto] Determinar en qué momentos están produciendo la misma cantidad de electricidad ambas fuentes. ¿A cuánto asciende la producción de electricidad de cualquiera de las dos fuentes en esos momentos?
- b) [1 punto] Determinar en qué momentos la producción de la fuente A decrece.
- c) [1 punto] Obtener el instante de tiempo en el que la producción conjunta de las dos fuentes es máxima.

a) Hallamos el momento donde coinciden ambas funciones.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = -x^2 + 6x + 3 \\ g(x) = x + 9 \\ f(x) = g(x) \end{array} \right\} \Rightarrow -x^2 + 6x + 3 = x + 9 \Rightarrow -x^2 + 5x - 6 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4(-1)(-6)}}{2(-1)} = \frac{-5 \pm 1}{-2} = \begin{cases} \frac{-5+1}{-2} = \boxed{2=x} \\ \frac{-5-1}{-2} = \boxed{3=x} \end{cases}$$

En $x = 2$ y en $x = 3$ la producción de ambas fuentes coincide.

En $x = 2$ la producción es $g(2) = 2 + 9 = 11$ y en $x = 3$ la producción es $g(3) = 3 + 9 = 12$.

La producción a las 2 horas de cualquiera de las dos empresas es de 11 unidades y a las 3 horas es de 12 unidades.

b) La producción de la fuente A es $f(x) = -x^2 + 6x + 3$. Hallamos los puntos críticos de esta función.

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = -2x + 6 \\ f'(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow -2x + 6 = 0 \Rightarrow 2x = 6 \Rightarrow \boxed{x = 3}$$

Sustituimos este valor en la segunda derivada y comprobamos su signo.

$$f''(x) = -2 \Rightarrow f''(3) = -2 < 0$$

La producción de electricidad es máxima para $x = 3$.

Por tanto, la producción de electricidad de la fuente A decrece a partir de la hora 3.

c) La producción conjunta es la suma de ambas. Obtenemos su expresión y determinamos sus puntos críticos.

$$P(x) = f(x) + g(x) = -x^2 + 6x + 3 + x + 9 = -x^2 + 7x + 12$$

$$\left. \begin{array}{l} P'(x) = -2x + 7 \\ P'(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow -2x + 7 = 0 \Rightarrow 2x = 7 \Rightarrow \boxed{x = \frac{7}{2} = 3.5}$$

Sustituimos este valor en la segunda derivada y obtenemos el signo.

$$P'(x) = -2x + 7 \Rightarrow P''(x) = -2 \Rightarrow P''(3.5) = -2 < 0$$

Como el signo es negativo la producción conjunta presenta un máximo a las 3 horas y media.

3. De los estudiantes de secundaria que fueron al viaje de estudios, se determina que tres quintas partes de ellos han consumido alcohol y que un cuarto de ellos han fumado. Además, se sabe que el veinte por ciento de ellos han consumido alcohol y fumado.

- a) [1 punto] Si un estudiante elegido al azar ha fumado, ¿cuál es la probabilidad de que haya consumido alcohol?
- b) [1 punto] Si se elige un estudiante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que no haya fumado y no haya bebido alcohol?

Si denotamos por A el suceso “el estudiante ha consumido alcohol” y por F el suceso “el estudiante ha fumado”, los datos del enunciado se traducen en:

De los estudiantes de secundaria que fueron al viaje de estudios, se determina que tres quintas partes de ellos han consumido alcohol y que un cuarto de ellos ha fumado $\rightarrow P(A) = \frac{3}{5} = 0.6$;

$$P(F) = \frac{1}{4} = 0.25.$$

El veinte por ciento de ellos ha consumido alcohol y fumado $\rightarrow P(A \cap F) = 0.20$.

- a) Nos piden calcular $P(A/F)$. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(A/F) = \frac{P(A \cap F)}{P(F)} = \frac{0.2}{0.25} = \boxed{0.8}$$

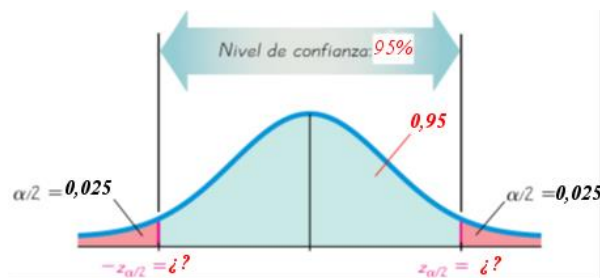
- b) Nos piden calcular $P(\overline{F} \cap \overline{A})$. Aplicamos una de las leyes de Morgan y la fórmula de la probabilidad de la unión de dos sucesos.

$$\begin{aligned} P(\overline{F} \cap \overline{A}) &= P(\overline{F \cup A}) = 1 - P(F \cup A) = \\ &= 1 - [P(F) + P(A) - P(A \cap F)] = 1 - [0.25 + 0.6 - 0.2] = \boxed{0.35} \end{aligned}$$

4. a) [1 punto] ¿Cuál sería el tamaño muestral mínimo necesario para que pueda estimarse la verdadera proporción de turistas asiáticos en Asturias a partir de la proporción muestral con un error de estimación máximo de 0,05 y un nivel de confianza del 95%?
- b) [1 punto] En una muestra aleatoria de 800 turistas que visitan Asturias se obtuvo que solo 80 de ellos son asiáticos. En función de esta muestra obtén, con un nivel de confianza del 95%, un intervalo para estimar la proporción de turistas asiáticos en Asturias (Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1: $F(1,28) = 0,90$; $F(1,64) = 0,95$; $F(1,96) = 0,975$; $F(2,33) = 0,99$; $F(2,58) = 0,995$.)

a) Sea X = Número de de turistas asiáticos en Asturias.

Para un nivel de confianza del 95% obtenemos el valor de $z_{\alpha/2}$.



$$1 - \alpha = 0,95 \rightarrow \alpha = 0,05 \rightarrow \alpha/2 = 0,025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,975 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1.96$$

Como no tenemos una proporción muestral consideramos dicha proporción con el valor más desfavorable: $p = 0.5$.

Igualamos el error a 0.05.

$$\begin{aligned} \text{Error} &= z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \Rightarrow 0.05 = 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.5 \cdot 0.5}{n}} \Rightarrow \frac{0.05}{1.96} = \sqrt{\frac{0.25}{n}} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left(\frac{0.05}{1.96}\right)^2 = \frac{0.25}{n} \Rightarrow n = \frac{0.25}{\left(\frac{0.05}{1.96}\right)^2} = \boxed{384.16} \end{aligned}$$

El tamaño mínimo de la muestra es de 385 turistas.

b) Sea X = Número de de turistas asiáticos en Asturias.

En la muestra de 800 turistas la proporción de asiáticos es $p = \frac{80}{800} = 0.1$.

El tamaño de la muestra es $n = 800$.

Para un nivel de confianza del 95% tenemos que $z_{\alpha/2} = 1.96$.

El error viene dado por la fórmula:

$$\text{Error} = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.1 \cdot 0.9}{800}} \approx 0.0208$$

, por lo que el intervalo de confianza es:

$$(p - \text{Error}, p + \text{Error}) = (0.1 - 0.0208, 0.1 + 0.0208) = (0.0792, 0.1208)$$

OPCIÓN B

1. Una empresa construye dos tipos de motocicletas eléctricas A y B. Cada jornada dispone de 3600 euros para la fabricación de estas motocicletas, siendo el coste de manufactura de 200 euros para la motocicleta tipo A y de 400 euros para la motocicleta tipo B. Además, las condiciones de mercado exigen que el número total de motocicletas fabricadas por jornada no sea mayor de 12. Por otro lado, debido a la organización de la producción en esa empresa, cada jornada no puede fabricar más de 8 motocicletas de tipo B.

a) [2 puntos] ¿Cuántas motocicletas de cada tipo puede fabricar una jornada para cumplir todos los requisitos anteriores? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Se podrían fabricar 4 motocicletas de tipo A y el doble de tipo B?

b) [1 punto] Sabiendo que el beneficio obtenido en la venta de una motocicleta de tipo A es de 200 euros y en la de tipo B es de 320 euros y suponiendo que se vende todo lo que se fabrica, ¿cuántas motocicletas de cada tipo deben fabricar en una jornada para que el beneficio sea máximo? ¿y para maximizar el número de motocicletas de tipo A fabricadas?

a) Si denominamos por “x” e “y” el número de motocicletas eléctricas de tipo A y de tipo B, respectivamente, que se fabrican por jornada, las condiciones impuestas llevan a obtener las ecuaciones:

“Cada jornada dispone de 3600 euros para la fabricación de estas motocicletas, siendo el coste de manufactura de 200 euros para la motocicleta tipo A y de 400 euros para la motocicleta tipo B.” $\rightarrow 200x + 400y \leq 3600$

“El número total de motocicletas fabricadas por jornada no sea mayor de 12” $\rightarrow x + y \leq 12$

“Cada jornada no puede fabricar más de 8 motocicletas de tipo B” $\rightarrow y \leq 8$

Además, estos valores son enteros y positivos $\rightarrow x \geq 0 \quad y \geq 0$

Reunimos estas inecuaciones en un sistema:

$$\left. \begin{array}{l} 200x + 400y \leq 3600 \\ x + y \leq 12 \\ y \leq 8 \\ x \geq 0 \quad y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 2y \leq 18 \\ x + y \leq 12 \\ y \leq 8 \\ x \geq 0 \quad y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Dibujamos las rectas asociadas a cada inecuación y localizamos la región factible o región del plano cuyos puntos cumplen todas estas inecuaciones.

$$x + 2y = 18$$

x	y = $\frac{18-x}{2}$
0	9
2	8
6	6

$$x + y = 12$$

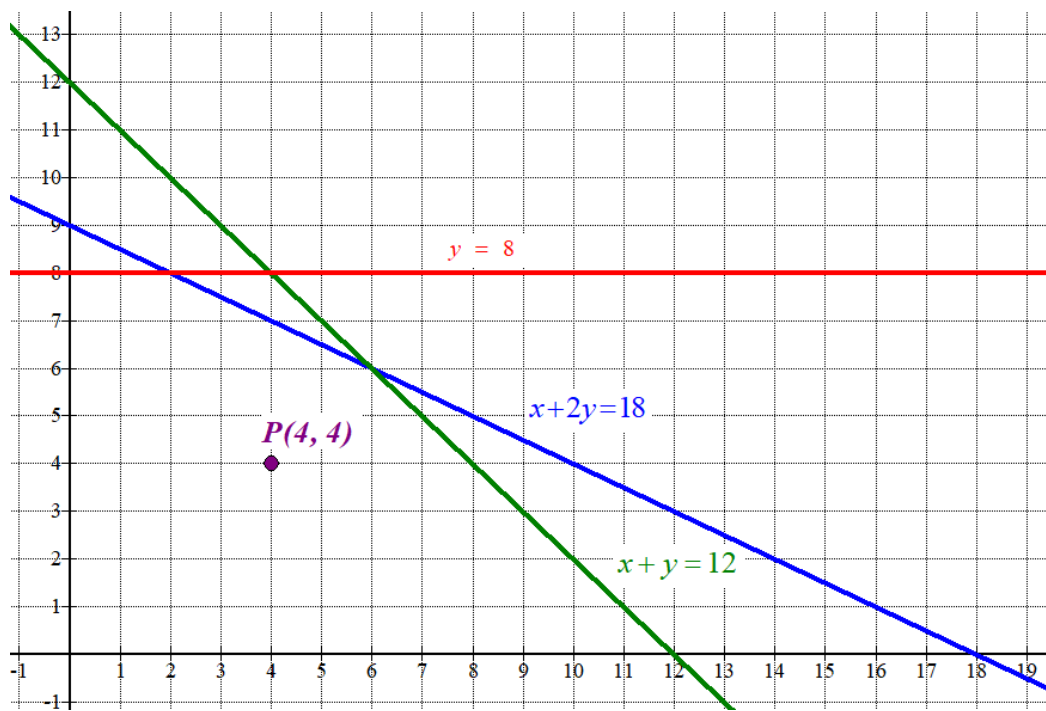
x	y = 12 - x
0	12
6	6
12	0

$$y = 8$$

x	y = 8
0	8
2	8

$$x \geq 0 \quad y \geq 0$$

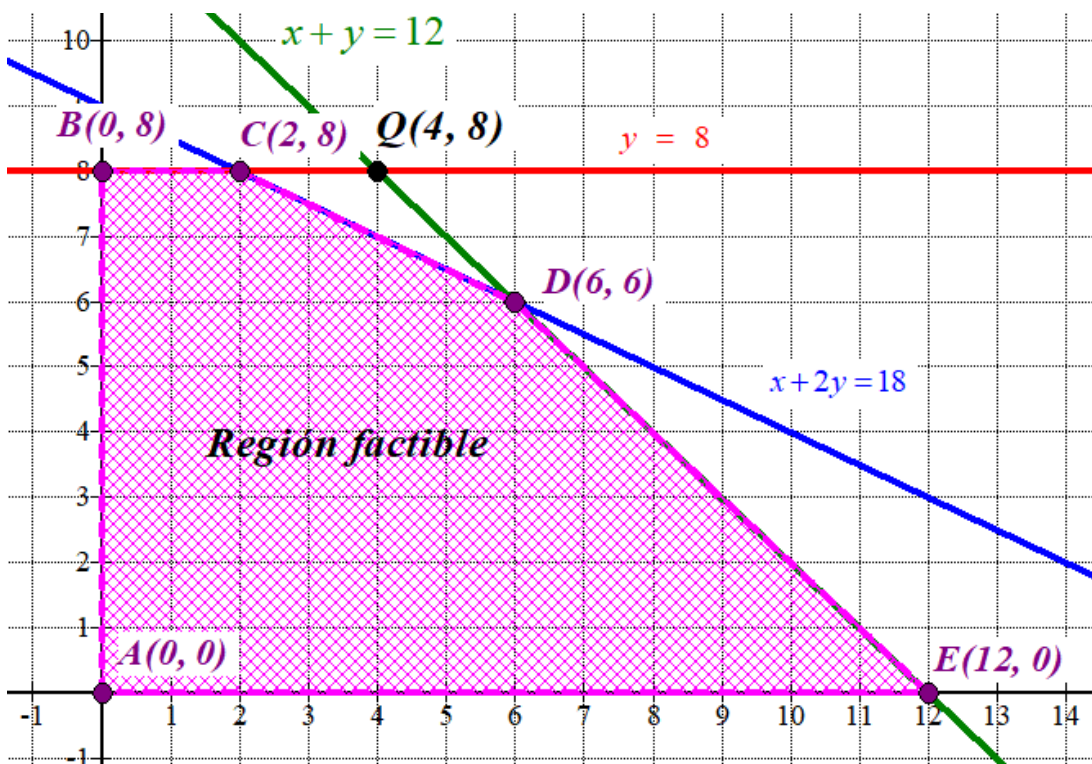
Primer cuadrante



Probamos si el punto $P(4, 4)$ cumple todos los condicionantes.

$$\left. \begin{array}{l} 4 + 2 \cdot 4 \leq 18 \\ 4 + 4 \leq 12 \\ 4 \leq 8 \\ 4 \geq 0 \quad 4 \geq 0 \end{array} \right\}$$

Se cumplen todas las inecuaciones, la región factible es la zona rayada.



Observamos que el punto $Q(4, 8)$ no pertenece a la región factible y fabricar 4 motocicletas de tipo A y el doble de tipo B (8) no cumple con las restricciones del problema.

b) La función beneficio es $B(x, y) = 200x + 320y$.

Valoramos el beneficio en cada uno de los vértices de la región factible en busca del máximo beneficio.

Los vértices son A(0, 0), B(0, 8), C(2, 8), D(6, 6) y E(12, 0).

$$A(0, 0) \rightarrow B(0, 0) = 0$$

$$B(0, 8) \rightarrow B(0, 8) = 200 \cdot 0 + 320 \cdot 8 = 2560$$

$$C(2, 8) \rightarrow B(2, 8) = 200 \cdot 2 + 320 \cdot 8 = 2960$$

$$D(6, 6) \rightarrow B(6, 6) = 200 \cdot 6 + 320 \cdot 6 = 3120 \text{ ¡Máximo!}$$

$$E(12, 0) \rightarrow B(12, 0) = 200 \cdot 12 + 320 \cdot 0 = 2400$$

El beneficio máximo que se puede obtener es de 3120 € con la fabricación diaria de 6 motocicletas de cada tipo.

¿y para maximizar el número de motocicletas de tipo A fabricadas?

En este caso queremos maximizar el valor de “x”.

Observando el dibujo el valor más alto de “x” se obtiene en el vértice C(12, 0) donde tenemos que $x = 12$.

El máximo número de motocicletas del tipo A fabricadas se consigue fabricando 12 motocicletas del tipo A y ninguna del tipo B.

2. Dada la función $f(x) = \frac{9}{x} - \frac{18}{x^2} - 1$, se pide:

- a) [0,75 puntos] Encontrar la primitiva F de f verificando que $F(1) = 20$.
 b) [2,25 puntos] Estudiar y representar gráficamente la función f en todo su dominio. Calcular el área limitada por la curva y el eje X entre $x = 1$ y $x = 12$.

a) Calculamos la integral de la función.

$$\begin{aligned} F(x) &= \int f(x) dx = \int \left(\frac{9}{x} - \frac{18}{x^2} - 1 \right) dx = 9 \int \frac{1}{x} dx - 18 \int x^{-2} dx - \int dx = \\ &= 9 \ln x - 18 \frac{x^{-1}}{-1} - x = 9 \ln x + \frac{18}{x} - x + C \end{aligned}$$

Determinamos el valor de C sabiendo que $F(1) = 20$.

$$\left. \begin{array}{l} F(x) = 9 \ln x + \frac{18}{x} - x + C \\ F(1) = 20 \end{array} \right\} \Rightarrow 9 \ln 1 + \frac{18}{1} - 1 + C = 20 \Rightarrow C = 20 - 18 + 1 = 3$$

La primitiva buscada es $F(x) = 9 \ln x + \frac{18}{x} - x + 3$.

- b) El dominio de la función $f(x) = \frac{9}{x} - \frac{18}{x^2} - 1$ son todos los números reales menos los que anulan el denominador. El dominio es $\mathbb{R} - \{0\}$.

La función tiene una asíntota vertical: $x = 0$.

Tenemos que $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{9}{x} - \frac{18}{x^2} - 1 \right) = \frac{9}{\infty} - \frac{18}{\infty} - 1 = -1$ la función tiene una asíntota horizontal: $y = -1$.

Al tener asíntota horizontal no tiene asíntota oblicua.

Calculamos la derivada de la función y estudiamos su monotonía.

$$f(x) = \frac{9}{x} - \frac{18}{x^2} - 1 = 9x^{-1} - 18x^{-2} - 1 \Rightarrow f'(x) = -9x^{-2} + 36x^{-3} = -\frac{9}{x^2} + \frac{36}{x^3}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -\frac{9}{x^2} + \frac{36}{x^3} = 0 \Rightarrow \frac{9}{x^2} = \frac{36}{x^3} \Rightarrow 9x^3 = 36x^2 \Rightarrow 9x^3 - 36x^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9x^2(x - 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de los valores $x = 0$ y $x = 4$.

- En el intervalo $(-\infty, 0)$ consideramos $x = -1$ y la derivada vale

$$f'(-1) = -\frac{9}{(-1)^2} + \frac{36}{(-1)^3} = -27 < 0. \text{ La función decrece en } (-\infty, 0).$$

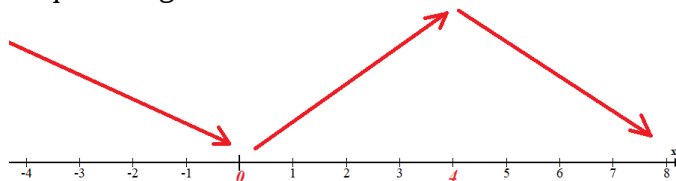
- En el intervalo $(0, 4)$ consideramos $x=1$ y la derivada vale

$$f'(1) = -\frac{9}{1^2} + \frac{36}{1^3} = 27 > 0. \text{ La función crece en } (0, 4).$$

- En el intervalo $(4, +\infty)$ consideramos $x=5$ y la derivada vale

$$f'(5) = -\frac{9}{5^2} + \frac{36}{5^3} = -0.072 < 0. \text{ La función decrece en } (4, +\infty).$$

La función sigue el esquema siguiente.



La función tiene un máximo relativo en $x=4$.

Puntos de corte con el eje X.

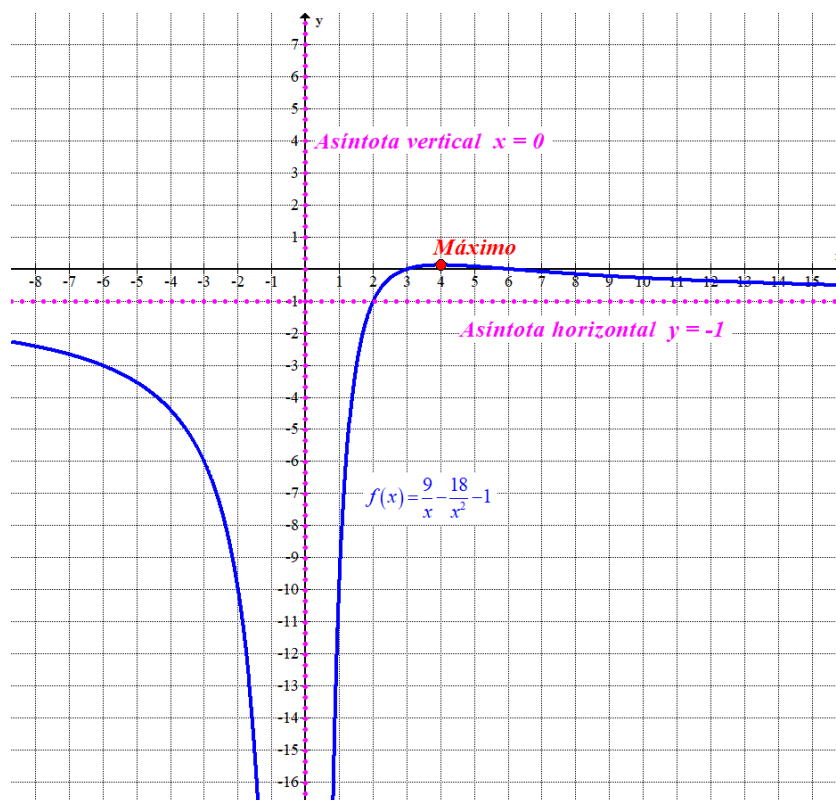
$$f(x) = \frac{9}{x} - \frac{18}{x^2} - 1 \quad \left\{ \begin{array}{l} \Rightarrow \frac{9}{x} - \frac{18}{x^2} - 1 = 0 \Rightarrow \frac{9x - 18 - x^2}{x^2} = 0 \Rightarrow 9x - 18 - x^2 = 0 \Rightarrow \\ y = 0 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow x^2 - 9x + 18 = 0 \Rightarrow x = \frac{9 \pm \sqrt{(-9)^2 - 72}}{2} = \frac{9 \pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{9+3}{2} = \boxed{6=x} \\ \frac{9-3}{2} = \boxed{3=x} \end{cases}$$

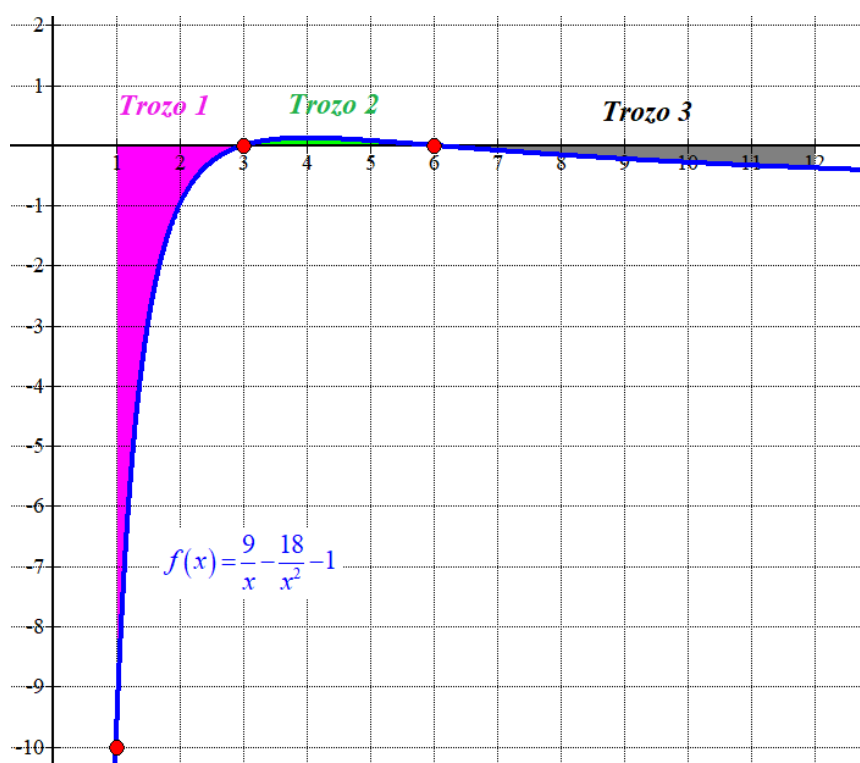
Los puntos de corte con el eje de abscisas son $(3, 0)$ y $(6, 0)$.

Hacemos una tabla de valores y esbozamos la gráfica de la función.

x	$f(x) = \frac{9}{x} - \frac{18}{x^2} - 1$
-2	-10
-1	-28
1	-10
2	-1
4	0.125
5	0.08
10	-0.28



La región del plano limitada por la curva y el eje X entre $x = 1$ y $x = 12$ la dividimos en tres partes: Una entre 1 y 3, otra entre 3 y 6, la tercera entre 6 y 12.



$$\text{Área 1} = \left| \int_1^3 \frac{9}{x} - \frac{18}{x^2} - 1 dx \right| = \left| \left[9 \ln x + \frac{18}{x} - x \right]_1^3 \right| =$$

$$= \left| \left[9 \ln 3 + \frac{18}{3} - 3 \right] - \left[9 \ln 1 + \frac{18}{1} - 1 \right] \right| = |9 \ln 3 + 6 - 3 - 18 + 1| = \boxed{14 - 9 \ln 3 \approx 4.112 u^2}$$

$$\text{Área 2} = \int_3^6 \frac{9}{x} - \frac{18}{x^2} - 1 dx = \left[9 \ln x + \frac{18}{x} - x \right]_3^6 = \left[9 \ln 6 + \frac{18}{6} - 6 \right] - \left[9 \ln 3 + \frac{18}{3} - 3 \right]$$

$$= 9 \ln 6 - 9 \ln 3 - 6 = \boxed{9 \ln 2 - 6 \approx 0.238 u^2}$$

$$\text{Área 3} = \left| \int_6^{12} \frac{9}{x} - \frac{18}{x^2} - 1 dx \right| = \left| \left[9 \ln x + \frac{18}{x} - x \right]_6^{12} \right| = \left| \left[9 \ln 12 + \frac{18}{12} - 12 \right] - \left[9 \ln 6 + \frac{18}{6} - 6 \right] \right| =$$

$$= |9 \ln 12 - 9 \ln 6 - 7.5| = \boxed{7.5 - 9 \ln 2 \approx 1.262 u^2}$$

El área de la región del plano limitada por la curva y el eje X entre $x = 1$ y $x = 12$ es la suma de las tres áreas obtenidas:

$$\text{Área} = 14 - 9 \ln 3 + 9 \ln 2 - 6 + 7.5 - 9 \ln 2 = \boxed{15.5 - 9 \ln 3 \approx 5.612 u^2}$$

3. En una agencia de viajes online se ha observado que el 80% de los clientes compra un billete de avión, el 60% compra un bono de hotel y el 50% compra las dos cosas. Elegido un cliente al azar de esa agencia, se pide:

- a) [1 punto] Calcular la probabilidad de que compre un billete de avión o un bono de hotel.
b) [1 punto] Calcular la probabilidad de que compre un bono de hotel si se sabe que compró un billete de avión.

Llamamos A al suceso “comprar billete de avión” y B a “comprar bono de hotel”.

Con los datos del ejercicio sabemos que $P(A) = 0.80$; $P(B) = 0.60$ y $P(A \cap B) = 0.5$.

- a) Nos piden calcular $P(A \cup B)$.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.8 + 0.6 - 0.5 = \boxed{0.9}$$

- b) Nos piden calcular $P(B/A)$. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(B/A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{0.5}{0.8} = \boxed{0.625}$$

4. Con el objetivo de estudiar los ingresos anuales de los ejecutivos de multinacionales, se seleccionó una muestra aleatoria de 576 ejecutivos, cuyos ingresos totales (suma de los ingresos de los 576 ejecutivos) el último año ascendieron a 28,8 millones de euros. Se supone además que los ingresos anuales de este tipo de ejecutivos sigue una distribución normal con desviación típica 3000 euros.

- a) [1 punto] Construye un intervalo de confianza para los ingresos medios anuales de este colectivo, al 99% de confianza.
- b) [1 punto] ¿Cuál sería el tamaño muestral mínimo necesario para estimar los verdaderos ingresos medios anuales a partir de la media muestral con un error de estimación máximo de 500 euros y un nivel de confianza del 99%?

(Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1: $F(1,28) = 0,90$; $F(1,64) = 0,95$; $F(1,96) = 0,975$; $F(2,33) = 0,99$; $F(2,58) = 0,995$.)

X = Ingresos anuales de un ejecutivo. $X = N(\mu, 3000)$

- a) La media muestral es $\bar{x} = \frac{28800000}{576} = 50000$ € y el tamaño de la muestra es $n = 576$.

Para un nivel de confianza del 99% determinamos el valor de $z_{\alpha/2}$.



$$1 - \alpha = 0,99 \rightarrow \alpha = 0,01 \rightarrow \alpha/2 = 0,005 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,995 \rightarrow z_{\alpha/2} = 2,58$$

El error del intervalo de confianza es

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow E = 2,58 \cdot \frac{3000}{\sqrt{576}} = 322,5 \text{ €}$$

El intervalo de confianza para la media de la población es:

$$(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error) = (50000 - 322,5, 50000 + 322,5)$$

El intervalo de confianza es (49677.02, 50322.5)

- b) Con el mismo nivel de confianza tenemos que $z_{\alpha/2} = 2,58$

El error del intervalo de confianza debe ser 500 euros por lo que:

$$Error = 500 \Rightarrow z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 500 \Rightarrow 2,58 \cdot \frac{3000}{\sqrt{n}} = 500 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2,58 \cdot \frac{3000}{500} = \sqrt{n} \Rightarrow n = \left(2,58 \cdot \frac{3000}{500} \right)^2 = 239,63$$

A partir de una muestra de 240 ejecutivos el error del intervalo de confianza es menor de 500 €.