



Universidad de Oviedo
Universidá d'Uviéu
University of Oviedo

Prueba de evaluación de Bachillerato para
el acceso a la Universidad (EBAU)

Curso 2016-2017

MATEMÁTICAS II

El examen presenta dos opciones: A y B. Elige una de ellas y responde razonadamente a los cuatro ejercicios de que consta dicha opción.

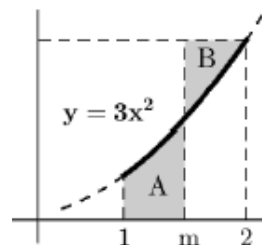
OPCIÓN A

1. Determina los valores de a para los que el sistema de ecuaciones tiene solución. Calcula las soluciones en los casos posibles.

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + ay = 2 \\ 5x + (3a-1)y = 6-a \end{cases}$$

2. Sea la gráfica de la parábola $y = 3x^2$ en el intervalo $[1, 2]$ y m un valor de dicho intervalo.

- a) Halla, en función de m , el área de cada una de las partes sombreadas A y B. (1.5 puntos)
b) ¿Cuál es el valor de m que hace mínima la suma de esas áreas? (1 punto)



3. Sea el punto $A(1, 2, 0)$ perteneciente a un plano π . Calcula:

- a) La ecuación del plano π sabiendo que $P(0, 0, -2)$ pertenece a la recta perpendicular a π que pasa por el punto A. (1 punto)
b) La ecuación de un plano paralelo a π y que esté a distancia 3 unidades del mismo. (1 punto)
c) Un punto B perteneciente a π y al plano $\pi': 2x - y = 0$ y que está a distancia $\sqrt{45}$ de A. (Observación: $A \in \pi'$) (0.5 puntos)

4. En una cierta enfermedad el 60% de los pacientes son hombres y el resto mujeres. Con el tratamiento que se aplica se sabe que se curan un 70% de los hombres y un 80% de las mujeres. Se elige un paciente al azar.

- a) Calcula la probabilidad de que se cure de la enfermedad. (1.25 puntos)
b) Si un paciente no se ha curado, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer? (1.25 puntos)

**OPCIÓN B**

1. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & x & 3 \\ 4 & 1 & -x \end{pmatrix}$ donde x es un número real. Halla:

- a) Los valores de x para los que la matriz A posea inversa. (1 punto)
- b) La inversa de A para $x = 2$. (1 punto)
- c) Con $x = 5$, el valor de $b \in \mathbb{R}$ para que la matriz $b \cdot A$ tenga determinante 1. (0.5 puntos)

2. Dada la función $f(x) = \frac{x^2}{x-4}$

- a) Estudia su dominio de definición y calcula sus asíntotas. (1 punto)
- b) Halla, si existen, los máximos, mínimos y puntos de inflexión. Intervalos de crecimiento y decrecimiento, concavidad y convexidad. (1 punto)
- c) Haz un esbozo de su gráfica. (0.5 puntos)

3. Dada la recta $r: \begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ 2x + y - 5z = 2 \end{cases}$ y el plano $\pi: ax - y + z + 1 = 0$

- a) Halla el valor de a para que sean paralelos. (1.5 puntos)
- b) Para $a = 2$, calcula la ecuación del plano π' que contiene a r y es perpendicular a π . (1 punto)

4. De una baraja española Daniel y Olga extraen 8 cartas: los cuatro ases y los cuatro reyes. Con esas 8 cartas Olga da dos cartas a Daniel y posteriormente una para ella. Calcula:

- a) La probabilidad de que Daniel tenga dos ases. (0.75 puntos)
- b) La probabilidad de que Daniel tenga un as y un rey. (0.75 puntos)
- c) La probabilidad de que Olga tenga un as y Daniel no tenga dos reyes. (1 punto)

SOLUCIONES**OPCIÓN A**

1. Determina los valores de a para los que el sistema de ecuaciones tiene solución. Calcula las soluciones en los casos posibles.

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + ay = 2 \\ 5x + (3a-1)y = 6-a \end{cases}$$

Obtenemos un sistema equivalente más sencillo de estudiar aplicando el método de Gauss.

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + ay = 2 \\ 5x + (3a-1)y = 6-a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{Ecuación } 2^a - 2 \cdot \text{Ecuación } 1^a \\ 2x + ay = 2 \\ -2x - 2y = -2 \\ \hline (a-2)y = 0 \rightarrow \text{Nueva ecuación } 2^a \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{Ecuación } 3^a - 5 \cdot \text{Ecuación } 1^a \\ 5x + (3a-1)y = 6-a \\ -5x - 5y = -5 \\ \hline (3a-6)y = 1-a \rightarrow \text{Nueva ecuación } 3^a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ (a-2)y = 0 \\ 3(a-2)y = 1-a \end{cases}$$

Nos planteamos dos situaciones diferentes.

CASO 1. $a \neq 2$

En este caso podemos despejar en las ecuaciones 2^a y 3^a .

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ (a-2)y = 0 \\ 3(a-2)y = 1-a \end{cases} \Rightarrow \{a-2 \neq 0\} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ y = \frac{0}{a-2} = 0 \\ y = \frac{1-a}{3(a-2)} \end{cases}$$

Vuelven a surgir dos situaciones distintas, en función del valor de a .

CASO 1.1. $a \neq 2$ y $a \neq 1$

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ y = 0 \\ y = \frac{1-a}{3(a-2)} \neq 0 \end{cases}$$

El sistema es incompatible pues obtenemos dos soluciones distintas para la incógnita “ y ”.

CASO 1.2. $a \neq 2$ y $a = 1$

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ y = 0 \\ y = \frac{1-a}{3(a-2)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ 1-a = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ y = 0 \Rightarrow x + 0 = 1 \Rightarrow \boxed{x=1} \\ \boxed{y=0} \end{cases}$$

El sistema es compatible determinado, siendo su solución: $x=1$ e $y=0$.

CASO 2. $a=2$

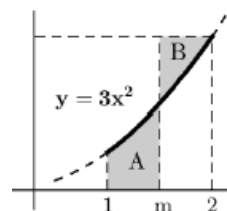
$$\begin{cases} x + y = 1 \\ (a-2)y = 0 \\ 3(a-2)y = 1-a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ a-2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ 0 = 0 \\ \textcolor{red}{0 = -1} \end{cases}$$

Tenemos una igualdad imposible. El sistema es incompatible.

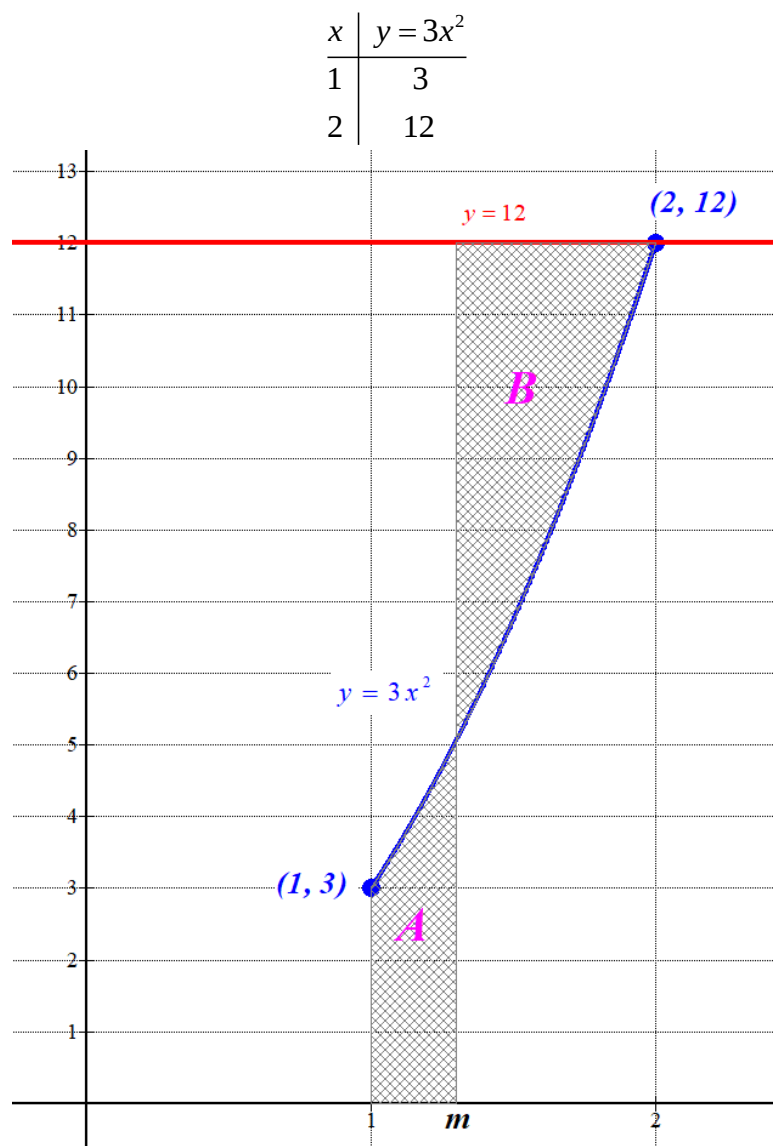
Resumiendo: Si $a=1$ el sistema es compatible determinado, siendo su solución: $x=1$ e $y=0$.
Y si $a \neq 1$ el sistema es incompatible.

2. Sea la gráfica de la parábola $y = 3x^2$ en el intervalo $[1, 2]$ y m un valor de dicho intervalo.

- a) Halla, en función de m , el área de cada una de las partes sombreadas A y B. (1.5 puntos)
 b) ¿Cuál es el valor de m que hace mínima la suma de esas áreas? (1 punto)



a) Añadimos un poco de información a la imagen proporcionada.



El área de la zona A es el valor de la integral definida entre 1 y m de la función $y = 3x^2$.

$$\text{Área A} = \int_1^m 3x^2 dx = \left[x^3 \right]_1^m = m^3 - 1^3 = m^3 - 1$$

El área de la zona B es el valor de la integral definida entre m y 2 de la diferencia entre las funciones $y = 12$ e $y = 3x^2$.

$$\text{Área B} = \int_m^2 (12 - 3x^2) dx = \left[12x - x^3 \right]_m^2 = [12 \cdot 2 - 2^3] - [12 \cdot m - m^3] = 16 - 12m + m^3$$

b) La suma de las áreas tiene la expresión: $f(m) = m^3 - 1 + 16 - 12m + m^3 = 2m^3 - 12m + 15$.

Buscamos los puntos críticos de esta función.

$$f(m) = 2m^3 - 12m + 15 \Rightarrow f'(m) = 6m^2 - 12$$

$$f'(m) = 0 \Rightarrow 6m^2 - 12 = 0 \Rightarrow m^2 - 2 = 0 \Rightarrow m^2 = 2 \Rightarrow \boxed{m = +\sqrt{2}}$$

Sustituimos este valor en la segunda derivada para comprobar si es máximo o mínimo.

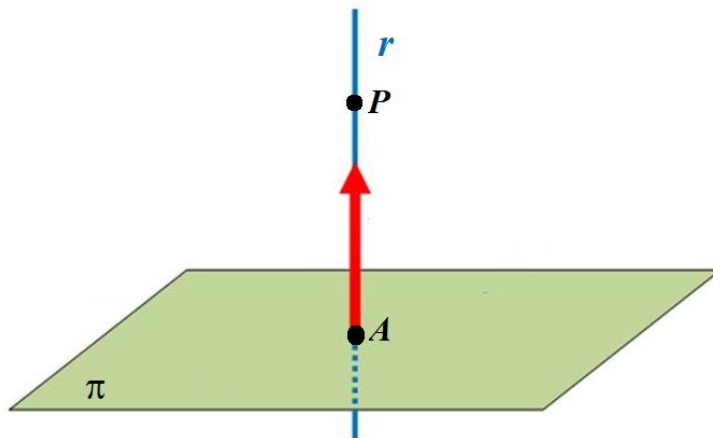
$$f'(m) = 6m^2 - 12 \Rightarrow f''(m) = 12m \Rightarrow f''(\sqrt{2}) = 12\sqrt{2} > 0$$

Para $m = +\sqrt{2}$ la segunda derivada es positiva y la suma de las áreas es mínima para dicho valor $m = +\sqrt{2} \approx 1.4142$.

3. Sea el punto $A(1, 2, 0)$ perteneciente a un plano π . Calcula:

- a) La ecuación del plano π sabiendo que $P(0, 0, -2)$ pertenece a la recta perpendicular a π que pasa por el punto A. (1 punto)
 b) La ecuación de un plano paralelo a π y que esté a distancia 3 unidades del mismo. (1 punto)
 c) Un punto B perteneciente a π y al plano $\pi': 2x - y = 0$ y que está a distancia $\sqrt{45}$ de A. (Observación: $A \in \pi'$) (0.5 puntos)

a) La situación planteada es la del dibujo.



Por tanto, un vector normal del plano es el vector $\overrightarrow{AP}$.

Hallamos la ecuación del plano π que pasa por el punto A y tiene como vector normal $\overrightarrow{PA}$.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{n} = \overrightarrow{PA} = (1, 2, 0) - (0, 0, -2) = (1, 2, 2) \\ A(1, 2, 0) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \pi: x + 2y + 2z + D = 0 \\ A(1, 2, 0) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 + 4 + 0 + D = 0 \Rightarrow D = -5 \Rightarrow \boxed{\pi: x + 2y + 2z - 5 = 0}$$

El plano buscado tiene ecuación $\pi: x + 2y + 2z - 5 = 0$.

b) Un plano π' paralelo a $\pi: x + 2y + 2z - 5 = 0$ tiene ecuación $\pi': x + 2y + 2z + D = 0$.

Como debe estar a distancia 3 unidades del plano π debe estar a distancia 3 unidades del punto A perteneciente al plano π .

$$\left. \begin{array}{l} \pi': x + 2y + 2z + D = 0 \\ A(1, 2, 0) \\ d(A, \pi') = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{|1 + 4 + 0 + D|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = 3 \Rightarrow \frac{|5 + D|}{3} = 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |5 + D| = 9 \Rightarrow \begin{cases} 5 + D = 9 \rightarrow D = 4 \rightarrow \boxed{\pi': x + 2y + 2z + 4 = 0} \\ 5 + D = -9 \rightarrow D = -14 \rightarrow \boxed{\pi'': x + 2y + 2z - 14 = 0} \end{cases}$$

Existen dos planos que cumplen lo pedido: $\pi': x + 2y + 2z + 4 = 0$ y $\pi'': x + 2y + 2z - 14 = 0$.

c) Un punto $B(a, b, c)$ perteneciente a $\pi: x + 2y + 2z - 5 = 0$ debe cumplir su ecuación.

$$a + 2b + 2c - 5 = 0$$

El punto B también pertenece al plano π' : $2x - y = 0 \rightarrow 2a - b = 0 \rightarrow b = 2a$.

Reunimos las dos condiciones obtenidas y obtenemos la expresión del punto B.

$$\left. \begin{array}{l} a + 2b + 2c - 5 = 0 \\ b = 2a \end{array} \right\} \Rightarrow a + 4a + 2c - 5 = 0 \Rightarrow 2c = 5 - 5a \Rightarrow c = \frac{5}{2} - \frac{5}{2}a$$

El punto B tiene coordenadas $B\left(a, 2a, \frac{5}{2} - \frac{5}{2}a\right)$.

Este punto B está a distancia $\sqrt{45}$ de A, por lo que el módulo del vector $\overrightarrow{AB}$ debe ser $\sqrt{45}$.

$$\overrightarrow{AB} = \left(a, 2a, \frac{5}{2} - \frac{5}{2}a\right) - (1, 2, 0) = \left(a - 1, 2a - 2, \frac{5}{2} - \frac{5}{2}a\right)$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{45} \Rightarrow \sqrt{(a-1)^2 + (2a-2)^2 + \left(\frac{5}{2} - \frac{5}{2}a\right)^2} = \sqrt{45} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a-1)^2 + (2a-2)^2 + \left(\frac{5}{2} - \frac{5}{2}a\right)^2 = 45 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 + 1^2 - 2a + 4a^2 + 4 - 8a + \frac{25}{4} + \frac{25}{4}a^2 - \frac{25}{2}a = 45 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4a^2 + 4 - 8a + 16a^2 + 16 - 32a + 25 + 25a^2 - 50a = 180 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 45a^2 - 90a + 45 = 180 \Rightarrow a^2 - 2a + 1 = 4 \Rightarrow a^2 - 2a - 3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(-3)}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} = \begin{cases} \frac{2+4}{2} = \boxed{3=a} \\ \frac{2-4}{2} = \boxed{-1=a} \end{cases}$$

Existen dos puntos que cumplen lo pedido:

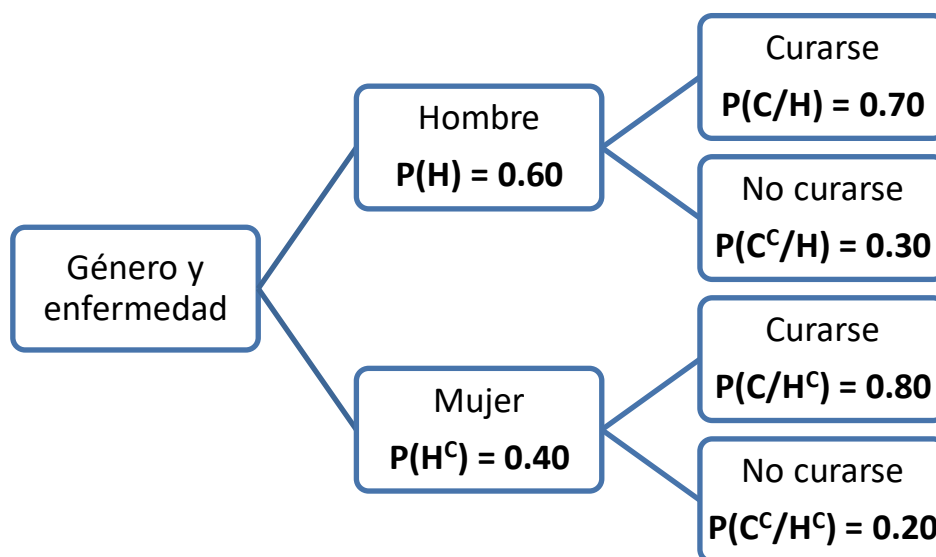
$$\left. \begin{array}{l} a = -1 \\ B\left(a, 2a, \frac{5}{2} - \frac{5}{2}a\right) \end{array} \right\} \rightarrow \boxed{B_1(-1, -2, 5)}$$

$$\left. \begin{array}{l} a = 3 \\ B\left(a, 2a, \frac{5}{2} - \frac{5}{2}a\right) \end{array} \right\} \rightarrow \boxed{B_2(3, 6, -5)}$$

4. En una cierta enfermedad el 60% de los pacientes son hombres y el resto mujeres. Con el tratamiento que se aplica se sabe que se curan un 70% de los hombres y un 80% de las mujeres. Se elige un paciente al azar.

- a) Calcula la probabilidad de que se cure de la enfermedad. (1.25 puntos)
 b) Si un paciente no se ha curado, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer? (1.25 puntos)

Realizamos un diagrama de árbol con los datos del problema. Llamamos H al suceso “ser hombre”, H^c a “ser mujer”, C a “curarse de la enfermedad” y C^c a “no curarse de la enfermedad”.



- a) Nos piden calcular $P(C)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(C) = P(H)P(C/H) + P(H^c)P(C/H^c) = 0.6 \cdot 0.7 + 0.4 \cdot 0.8 = \boxed{0.74}$$

La probabilidad de que se cure de la enfermedad es de 0.74.

- b) Nos piden calcular $P(H^c/C^c)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(H^c/C^c) = \frac{P(H^c \cap C^c)}{P(C^c)} = \frac{P(H^c)P(C^c/H^c)}{1 - P(C)} = \frac{0.4 \cdot 0.2}{1 - 0.74} = \boxed{\frac{4}{13} \approx 0.3077}$$

La probabilidad de que sea mujer una persona que se ha curado tiene un valor aproximado de 0.3077.

OPCIÓN B

1. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & x & 3 \\ 4 & 1 & -x \end{pmatrix}$ donde x es un número real. Halla:

- a) Los valores de x para los que la matriz A posea inversa. (1 punto)
 b) La inversa de A para $x = 2$. (1 punto)
 c) Con $x = 5$, el valor de $b \in \mathbb{R}$ para que la matriz $b \cdot A$ tenga determinante 1. (0.5 puntos)

a) Para que la matriz A tenga inversa su determinante debe ser distinto de cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & x & 3 \\ 4 & 1 & -x \end{vmatrix} = -x^2 + 0 + 0 + 4x - 0 - 3 = -x^2 + 4x - 3$$

$$|A| = 0 \Rightarrow -x^2 + 4x - 3 = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 12}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = \begin{cases} \frac{4+2}{2} = 3 = x \\ \frac{4-2}{2} = 1 = x \end{cases}$$

La matriz A tiene inversa para cualquier valor de " x " distinto de 1 y de 3.

b) Para $x = 2$ la matriz queda $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ y tiene inversa. La calculamos.

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^T)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}}{-2^2 + 4 \cdot 2 - 3} = \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -1 & 2 \\ 12 & 2 & -3 \\ -8 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

c) Para $x = 5$ la matriz queda $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 3 \\ 4 & 1 & -5 \end{pmatrix}$ y su determinante vale $-5^2 + 4 \cdot 5 - 3 = -8$.

Al ser la matriz A de orden 3 el determinante de la matriz $b \cdot A$ vale $b^3 \cdot |A| = -8b^3$. Si queremos que este determinante valga 1 planteamos y resolvemos la igualdad $-8b^3 = 1$.

$$-8b^3 = 1 \Rightarrow b^3 = \frac{-1}{8} \Rightarrow b = \sqrt[3]{\frac{-1}{8}} = \frac{-1}{2}$$

Para $b = \frac{-1}{2}$ la matriz $b \cdot A$ tiene determinante 1.

2. Dada la función $f(x) = \frac{x^2}{x-4}$

- a) Estudia su dominio de definición y calcula sus asíntotas. (1 punto)
 b) Halla, si existen, los máximos, mínimos y puntos de inflexión. Intervalos de crecimiento y decrecimiento, concavidad y convexidad. (1 punto)
 c) Haz un esbozo de su gráfica. (0.5 puntos)

- a) El dominio de una función racional son todos los valores reales menos los que anulan el denominador. El dominio es $\mathbb{R} - \{4\}$.

Asíntota vertical. $x = a$

¿ $x = 4$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2}{x-4} = \frac{4^2}{4-4} = \frac{16}{0} = \infty$$

$x = 4$ es asíntota vertical.

Asíntota horizontal. $y = b$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x-4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2}{x^2}}{\frac{x}{x^2} - \frac{4}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{x} - \frac{4}{x^2}} = \frac{1}{\frac{1}{\infty} - \frac{4}{\infty}} = \frac{1}{0} = \infty$$

La función no tiene asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2}{x-4}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x(x-4)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2 - 4x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} - \frac{4x}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - \frac{4}{x}} = \frac{1}{1-0} = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{x-4} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x^2 + 4x}{x-4} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x}{x-4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{4x}{x}}{\frac{x}{x} - \frac{4}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{1 - \frac{4}{x}} = \frac{4}{1 - \frac{4}{\infty}} = \frac{4}{1} = 4$$

La función tiene la asíntota oblicua de ecuación $y = x + 4$.

- b) Buscamos los puntos críticos de la función.

$$f(x) = \frac{x^2}{x-4} \Rightarrow f'(x) = \frac{2x(x-4) - 1 \cdot x^2}{(x-4)^2} = \frac{2x^2 - 8x - x^2}{(x-4)^2} = \frac{x^2 - 8x}{(x-4)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{x^2 - 8x}{(x-4)^2} = 0 \Rightarrow x^2 - 8x = 0 \Rightarrow x(x-8) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x-8=0 \rightarrow x=8 \end{cases}$$

Tenemos dos puntos críticos: $x=0$ y $x=8$. Usamos la segunda derivada para averiguar de qué tipo son.

$$\begin{aligned} f'(x) = \frac{x^2 - 8x}{(x-4)^2} &\Rightarrow f''(x) = \frac{(2x-8)(x-4)^2 - 2(x-4)(x^2 - 8x)}{(x-4)^4} = \\ &= \frac{(2x-8)(x-4) - 2(x^2 - 8x)}{(x-4)^3} = \frac{\cancel{2x^2} - 8x - 8x + 32 - \cancel{2x^2} + 16x}{(x-4)^3} = \frac{32}{(x-4)^3} \\ f''(x) = \frac{32}{(x-4)^3} &\Rightarrow \begin{cases} f''(0) = \frac{32}{(0-4)^3} = -0.5 < 0 \rightarrow \text{Máximo} \\ f''(8) = \frac{32}{(8-4)^3} = 0.5 > 0 \rightarrow \text{Mínimo} \end{cases} \end{aligned}$$

La función presenta un máximo relativo en $x=0$ y un mínimo relativo en $x=8$. Estudiamos la evolución de la función antes, entre y después de estos valores añadiendo el valor excluido del dominio: $x=4$.

- En $(-\infty, 0)$ tomamos $x=-1$ y la derivada vale $f'(-1) = \frac{(-1)^2 - 8(-1)}{(-1-4)^2} = \frac{7}{25} > 0$. La función crece en $(-\infty, 0)$.
- En $(0, 4)$ tomamos $x=1$ y la derivada vale $f'(1) = \frac{1^2 - 8(1)}{(1-4)^2} = \frac{-7}{9} < 0$. La función decrece en $(0, 4)$.
- En $(4, 8)$ tomamos $x=6$ y la derivada vale $f'(6) = \frac{6^2 - 8(6)}{(6-4)^2} = \frac{-12}{4} < 0$. La función decrece en $(4, 8)$.
- En $(8, +\infty)$ tomamos $x=10$ y la derivada vale $f'(10) = \frac{10^2 - 8(10)}{(10-4)^2} = \frac{20}{36} > 0$. La función crece en $(8, +\infty)$.

La función crece en $(-\infty, 0) \cup (8, +\infty)$ y decrece en $(0, 4) \cup (4, 8)$.

La segunda derivada es $f''(x) = \frac{32}{(x-4)^3}$, por lo que nunca se anula y por tanto la función no

presenta puntos de inflexión.

Estudiamos los intervalos de concavidad y convexidad analizando el signo de la segunda derivada antes y después de $x=4$.

- En el intervalo $(-\infty, 4)$ tomamos $x = 0$ y la segunda derivada vale

$$f''(0) = \frac{32}{(0-4)^3} = -0.5 < 0. \text{ La función es cóncava } (\cap) \text{ en } (-\infty, 4).$$

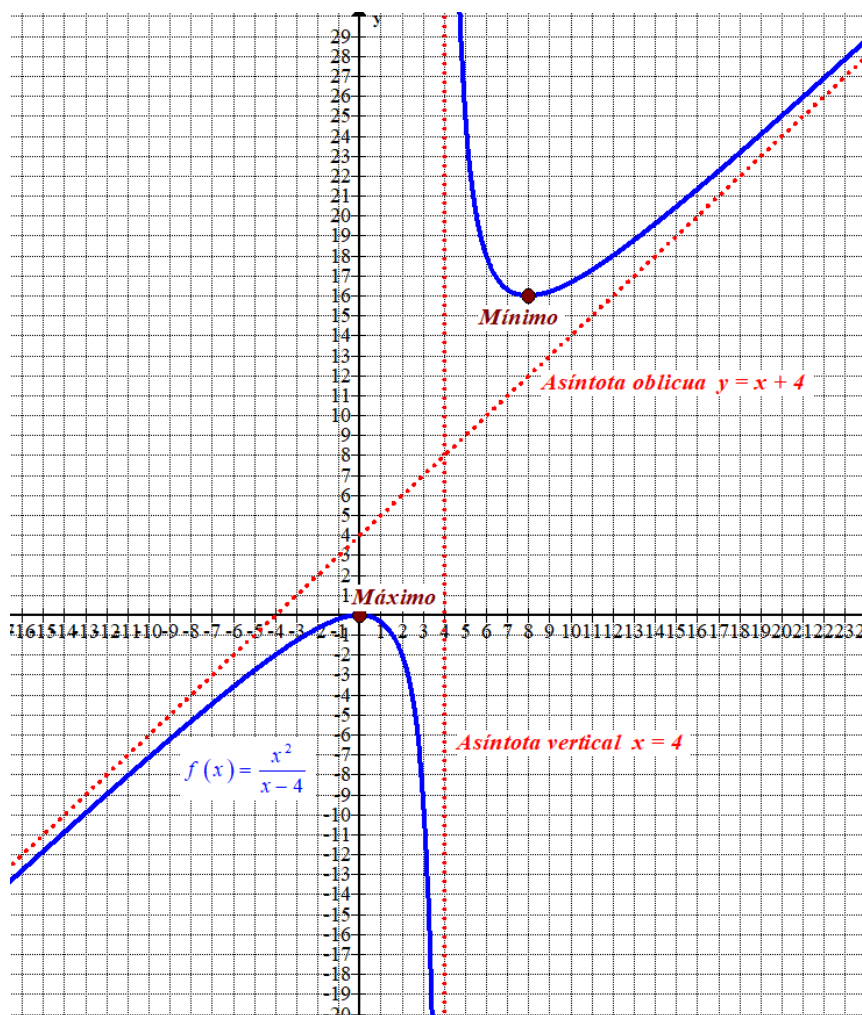
- En el intervalo $(4, +\infty)$ tomamos $x = 5$ y la segunda derivada vale

$$f''(5) = \frac{32}{(5-4)^3} = 32 > 0. \text{ La función es convexa } (\cup) \text{ en } (4, +\infty).$$

La función es cóncava ($\cap$) en $(-\infty, 4)$ y convexa ($\cup$) en $(4, +\infty)$.

- c) Obtenemos algunos puntos de la función y esbozamos su gráfica utilizando todo lo obtenido hasta el momento.

x	$f(x) = \frac{x^2}{x-4}$
-1	-0.2
0	0 <i>Máximo</i>
1	-0.33
5	25
8	16 <i>Mínimo</i>
9	16.2



3. Dada la recta $r: \begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ 2x + y - 5z = 2 \end{cases}$ y el plano $\pi: ax - y + z + 1 = 0$

- a) Halla el valor de a para que sean paralelos. (1.5 puntos)
 b) Para $a = 2$, calcula la ecuación del plano π' que contiene a r y es perpendicular a π . (1 punto)

- a) Para que recta y plano sean paralelos el vector normal del plano y el director de la recta deben ser perpendiculares y la recta no debe estar contenida en el plano.

Hallamos un vector normal del plano: $\pi: ax - y + z + 1 = 0 \Rightarrow \vec{n} = (a, -1, 1)$

Hallamos un vector director de la recta y un punto de la misma.

$$r: \begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ 2x + y - 5z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2z - 1 = y \\ 2x + y - 5z = 2 \end{cases} \Rightarrow 2x + x + 2z - 1 - 5z = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x - 3z = 3 \Rightarrow x - z = 1 \Rightarrow x = 1 + z \Rightarrow y = 1 + z + 2z - 1 = 3z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 3\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_r(1, 0, 0) \\ \vec{v}_r = (1, 3, 1) \end{cases}$$

Vector normal del plano y director de la recta son perpendiculares por lo que su producto escalar debe ser nulo.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{n} = (a, -1, 1) \\ \vec{v}_r = (1, 3, 1) \\ \vec{n} \cdot \vec{v}_r = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow (a, -1, 1)(1, 3, 1) = 0 \Rightarrow a - 3 + 1 = 0 \Rightarrow \boxed{a = 2}$$

Para $a = 2$ la recta es paralela al plano o está contenida en él. Comprobamos si el punto $P_r(1, 0, 0)$ de la recta pertenece al plano $\pi: 2x - y + z + 1 = 0$.

$$\left. \begin{array}{l} \pi: 2x - y + z + 1 = 0 \\ \text{¿} P_r(1, 0, 0) \in \pi? \end{array} \right\} \Rightarrow \text{¿} 2 - 0 + 0 + 1 = 0? \text{ ¡No se cumple!}$$

El punto P_r no pertenece al plano y por tanto, recta y plano son paralelos para $a = 2$.

- b) El plano π' que es perpendicular a π tiene como vector director el vector normal del plano π . Al contener a la recta r otro vector director del plano π' es el vector director de la recta: $\vec{v}_r = (1, 3, 1)$. También debe contener al punto $P_r(1, 0, 0)$.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} = \vec{n} = (2, -1, 1) \\ \vec{v} = \vec{v}_r = (1, 3, 1) \\ P_r(1, 0, 0) \in \pi' \end{array} \right\} \Rightarrow \pi': \begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -x + 1 + y + 6z + z - 2y - 3x + 3 = 0 \Rightarrow$$

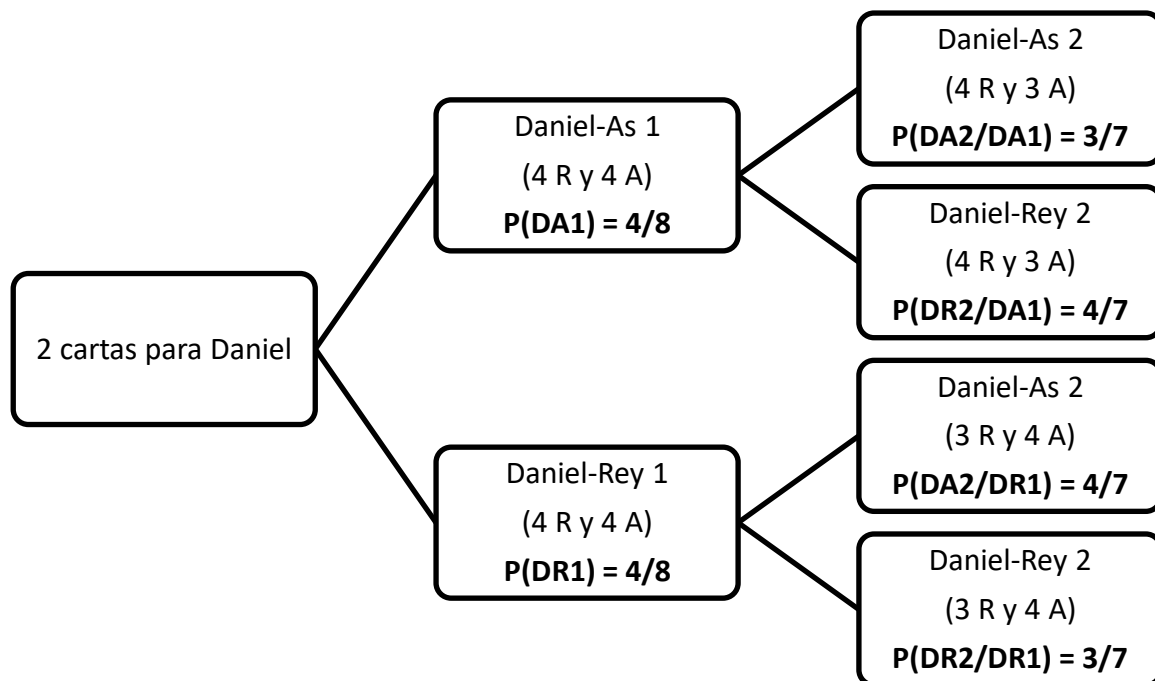
$$\Rightarrow -4x - y + 7z + 4 = 0 \Rightarrow \boxed{\pi': 4x + y - 7z - 4 = 0}$$

La ecuación del plano π' que contiene a r y es perpendicular a π es $\pi': 4x + y - 7z - 4 = 0$.

4. De una baraja española Daniel y Olga extraen 8 cartas: los cuatro ases y los cuatro reyes. Con esas 8 cartas Olga da dos cartas a Daniel y posteriormente una para ella. Calcula:

- a) La probabilidad de que Daniel tenga dos ases. (0.75 puntos)
 b) La probabilidad de que Daniel tenga un as y un rey. (0.75 puntos)
 c) La probabilidad de que Olga tenga un as y Daniel no tenga dos reyes. (1 punto)

Realizamos un diagrama de árbol del experimento aleatorio.



a) Nos piden calcular la probabilidad de $P(DA1 \cap DA2)$.

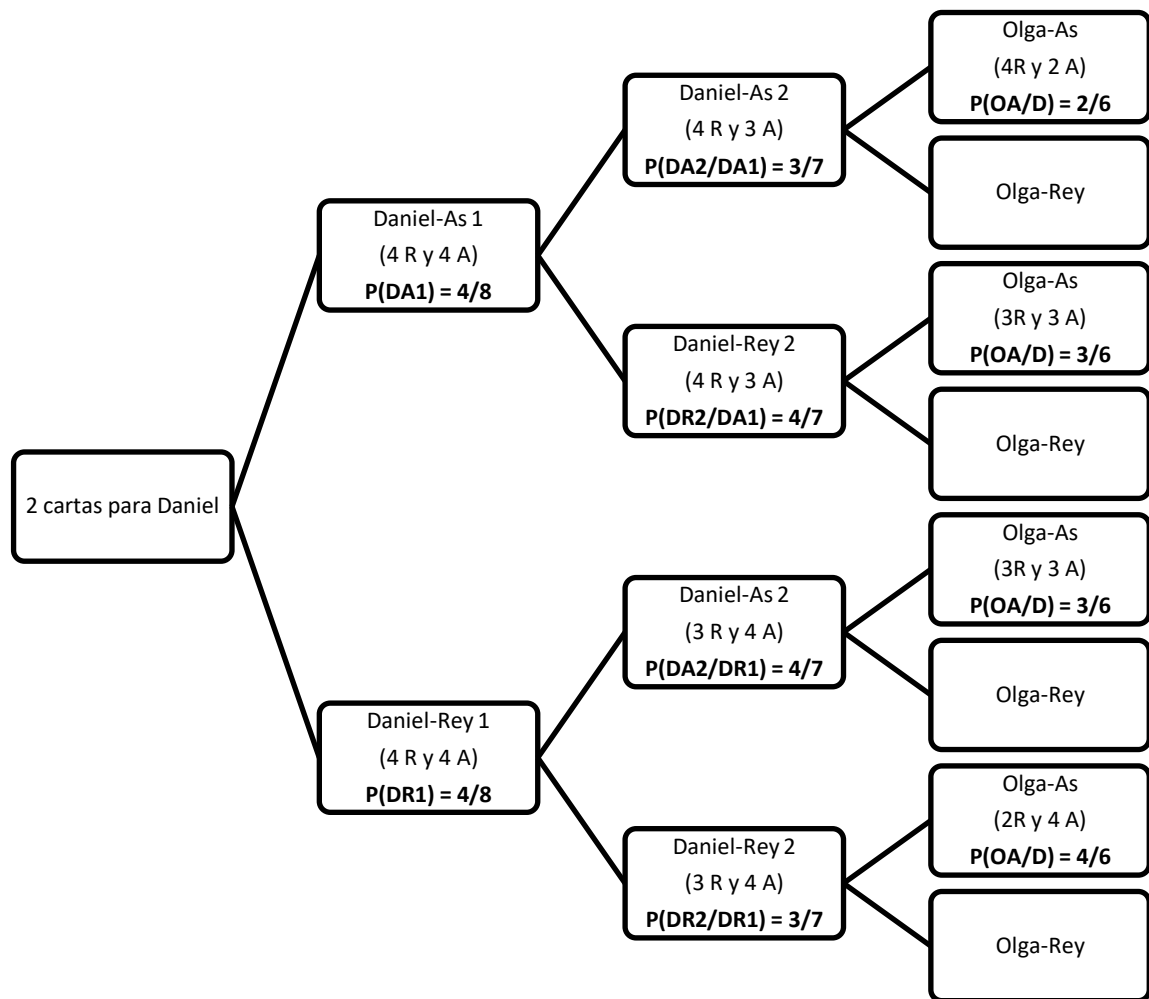
$$P(DA1 \cap DA2) = P(DA1)P(DA2 / DA1) = \frac{4}{8} \cdot \frac{3}{7} = \boxed{\frac{3}{14} \approx 0.2143}$$

b) Este suceso puede ocurrir de dos formas: primero un as y segundo un rey o viceversa.

$$P((DA1 \cap DR2) \cup (DR1 \cap DA2)) = P(DA1 \cap DR2) + P(DR1 \cap DA2) =$$

$$= P(DA1)P(DR2 / DA1) + P(DR1)P(DA2 / DR1) = \frac{4}{8} \cdot \frac{4}{7} + \frac{4}{8} \cdot \frac{4}{7} = \boxed{\frac{4}{7} \approx 0.5714}$$

c) Construimos un diagrama de árbol nuevo añadiendo la extracción de la tercera carta para Olga.



El suceso del cual tenemos que hallar su probabilidad ocurre en las 3 ramas superiores.

$$P\left(\left(\overline{DR1 \cap DR2}\right) \cap OA\right) = P(DA1 \cap DA2 \cap OA) + P(DA1 \cap DR2 \cap OA) +$$

$$+ P(DR1 \cap DA2 \cap OA) = \frac{4}{8} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} + \frac{4}{8} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} + \frac{4}{8} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} = \boxed{\frac{5}{14} \approx 0.3571}$$