



Universidad de Oviedo
Universidá d'Uviéu
University of Oviedo

Prueba de evaluación de Bachillerato para
el acceso a la Universidad (EBAU)

Curso 2016-2017

MATEMÁTICAS II

El examen presenta dos opciones: A y B. Elige una de ellas y responde razonadamente a los cuatro ejercicios de que consta dicha opción.

OPCIÓN A

1. Un boxeador ha disputado 20 combates en el año 2016. Por cada combate ganado cobraba 3 mil euros, 2 mil por combate nulo y mil por combate perdido. En total obtuvo 40 mil euros. Si las cantidades cobradas hubieran sido 6 mil euros por combate ganado, 4 mil por nulo y mil por perdido, habría obtenido 72 mil euros.

a) Plantea, en el campo de los números reales, el sistema de ecuaciones que modeliza el problema en función del número de combates ganados, hechos nulos y perdidos. Y, si es posible, calcúlalos. (1.5 puntos)

b) Estudia si hay alguna cantidad k que sustituya a los 6 mil euros por combate ganado que hiciera imposible la solución del problema dentro del campo de los números reales. (1 punto)

2. Sean las funciones $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $g: [0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = x^2/4$ y $g(x) = 2\sqrt{x}$.

a) Halla los puntos de corte de las gráficas de f y g . (1 punto)

b) Realiza un esbozo del recinto que queda limitado por las gráficas de las funciones entre esos puntos y calcula su área. (1.5 puntos)

3. Dadas las rectas $r: \begin{cases} x+2y=-1 \\ z=1 \end{cases}$ y $s: x+1 = \frac{y-1}{2} = z$. Calcula:

a) Un vector director de cada recta. (0.75 puntos)

b) El ángulo que forman las rectas. (0.75 puntos)

c) El plano paralelo a las dos rectas y que pasa por el punto $A(1, 2, 1)$. (1 punto)

4. Una urna A contiene tres bolas numeradas del 1 al 3 y otra urna B, seis bolas numeradas del 1 al 6. Se elige, al azar, una urna y se extrae una bola.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que sea una bola con el número 1? (1.25 puntos)

b) Si extraída la bola resulta tener el número 1, ¿cuál es la probabilidad de que proceda de la urna A? (1.25 puntos)



Universidad de Oviedo
Universidá d'Uviéu
University of Oviedo

Prueba de evaluación de Bachillerato para
el acceso a la Universidad (EBAU)
Curso 2016-2017

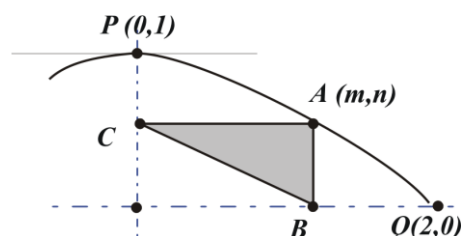
OPCIÓN B

1. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} k & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

- a) Estudia, en función de los valores reales de k , si la matriz $B \cdot A$ tiene inversa. Calcúlala, si es posible, para $k = 1$. (1.5 puntos)
- b) Estudia, en función de los valores reales de k , si la matriz $A \cdot B$ posee inversa. (1 punto)

2. Se considera el arco comprendido entre los puntos $P(0, 1)$ y $Q(2, 0)$ de la gráfica de la función $y = a + bx + cx^2$ con tangente en el punto P paralela al eje OX .

- a) Calcula los valores de a , b y c . (1 punto)
- b) Con $a = 1$, $b = 0$ y $c = -1/4$ y siendo $A(m, n)$ un punto perteneciente a ese arco. Determina los valores de m y n para que el área del triángulo rectángulo ABC sea máxima. (1.5 puntos)



3. Dados los puntos $A(1, 2, 0)$, $B(-1, 1, 1)$, $C(0, 0, 1)$, $D(4, 1, 3)$. Determina:

- a) Si los cuatro puntos son coplanarios. (0.75 puntos)
- b) La recta r que pasa por D y es perpendicular al plano π que contiene los puntos A , B , C . (1 punto)
- c) El punto de corte de la recta r con el plano π . (0.75 puntos)

4. En una asociación benéfica se reparten dos productos, harina y leche. Todas las personas que entran cogen dos unidades a elegir entre los dos tipos de producto. El 70% de las personas que entran cogen harina y el 40% los dos productos. Calcula:

- a) La probabilidad de que una persona que entre coja leche. (1 punto)
- b) La probabilidad de que una persona que entre coja un solo tipo de producto. (0.5 puntos)
- c) Una persona que sale de la asociación lleva leche. ¿Cuál es la probabilidad de que haya cogido también harina? (1 punto)

SOLUCIONES**OPCIÓN A**

1. Un boxeador ha disputado 20 combates en el año 2016. Por cada combate ganado cobraba 3 mil euros, 2 mil por combate nulo y mil por combate perdido. En total obtuvo 40 mil euros. Si las cantidades cobradas hubieran sido 6 mil euros por combate ganado, 4 mil por nulo y mil por perdido, habrá obtenido 72 mil euros.

a) Plantea, en el campo de los números reales, el sistema de ecuaciones que modeliza el problema en función del número de combates ganados, hechos nulos y perdidos. Y, si es posible, calcúlalos. (1.5 puntos)

b) Estudia si hay alguna cantidad k que sustituya a los 6 mil euros por combate ganado que hiciera imposible la solución del problema dentro del campo de los números reales. (1 punto)

a) Llamamos “ x ” al número de combates ganados, “ y ” al número de nulos y “ z ” al de perdidos. Un boxeador ha disputado 20 combates en el año 2016 $\rightarrow x + y + z = 20$.

Por cada combate ganado cobraba 3 mil euros, 2 mil por combate nulo y mil por combate perdido. En total obtuvo 40 mil euros $\rightarrow 3x + 2y + z = 40$.

Si las cantidades cobradas hubieran sido 6 mil euros por combate ganado, 4 mil por nulo y mil por perdido, habrá obtenido 72 mil euros $\rightarrow 6x + 4y + z = 72$.

Reunimos las ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 20 \\ 3x + 2y + z = 40 \\ 6x + 4y + z = 72 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} z = 20 - x - y \\ 3x + 2y + z = 40 \\ 6x + 4y + z = 72 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3x + 2y + 20 - x - y = 40 \\ 6x + 4y + 20 - x - y = 72 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x + y = 20 \\ 5x + 3y = 52 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y = 20 - 2x \\ 5x + 3y = 52 \end{array} \right\} \Rightarrow 5x + 3(20 - 2x) = 52 \Rightarrow 5x + 60 - 6x = 52 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -x = -8 \Rightarrow \boxed{x = 8} \Rightarrow \boxed{y = 20 - 16 = 4} \Rightarrow \boxed{z = 20 - 8 - 4 = 8}$$

El boxeador ha ganado 8 combates, 4 han sido nulos y ha perdido 8.

b) Planteamos el nuevo sistema con k miles de euros por combate ganado y repetimos la resolución.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 20 \\ 3x + 2y + z = 40 \\ kx + 4y + z = 72 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} z = 20 - x - y \\ 3x + 2y + z = 40 \\ kx + 4y + z = 72 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3x + 2y + 20 - x - y = 40 \\ kx + 4y + 20 - x - y = 72 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x + y = 20 \\ (k-1)x + 3y = 52 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y = 20 - 2x \\ (k-1)x + 3y = 52 \end{array} \right\} \Rightarrow (k-1)x + 3(20 - 2x) = 52 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (k-1)x + 60 - 6x = 52 \Rightarrow (k-7)x = -8$$

Si tomamos $k = 7$ se nos queda la ecuación $\left. \begin{array}{l} (k-7)x = -8 \\ k = 7 \end{array} \right\} \Rightarrow 0 = -8$. Esta es una igualdad

imposible. El problema no tiene solución si obtiene 7 mil euros por combate ganado.

2. Sean las funciones $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $g: [0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = x^2/4$ y $g(x) = 2\sqrt{x}$.
- a) Halla los puntos de corte de las gráficas de f y g . (1 punto)
- b) Realiza un esbozo del recinto que queda limitado por las gráficas de las funciones entre esos puntos y calcula su área. (1.5 puntos)

a) Determinamos los puntos de corte de las gráficas.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = x^2/4 \\ g(x) = 2\sqrt{x} \\ f(x) = g(x) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{x^2}{4} = 2\sqrt{x} \Rightarrow x^2 = 8\sqrt{x} \Rightarrow x^4 = 64(\sqrt{x})^2 \Rightarrow x^4 = 64x \Rightarrow$$

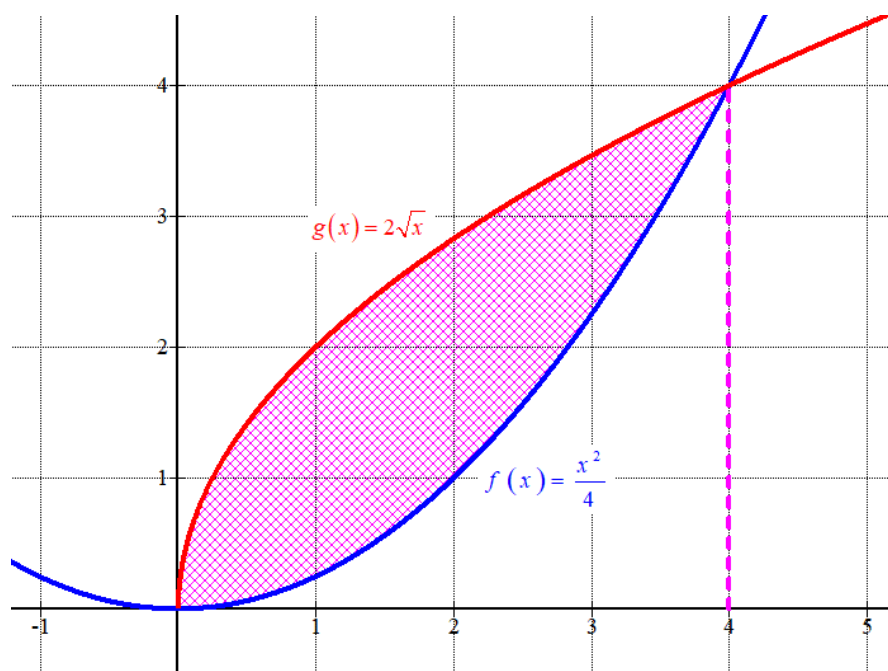
$$\Rightarrow x^4 - 64x = 0 \Rightarrow x(x^3 - 64) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^3 - 64 = 0 \rightarrow x^3 = 64 \rightarrow x = \sqrt[3]{64} = 4 \end{cases}$$

Las gráficas se cortan en $x=0$ y $x=4$.

Como $g(0) = 2\sqrt{0} = 0$ y $g(4) = 2\sqrt{4} = 4$ los puntos de corte tienen coordenadas $(0,0)$ y $(4,4)$.

b) Hacemos una tabla de valores y un esbozo de las gráficas y el recinto que delimitan.

x	$f(x) = x^2/4$	x	$g(x) = 2\sqrt{x}$
-2	1	0	0
0	0	2	$2\sqrt{2}$
2	1	4	4
4	4	9	6
6	9		



Contando cuadraditos de 1 unidad cuadrada cada uno es difícil establecer de forma exacta el área, pero tiene un valor aproximado entre 5 y 6 unidades cuadradas.

Calculamos su valor exacto usando el cálculo integral. El área es el valor de la integral definida entre 0 y 4 de la diferencia entre las dos funciones.

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_0^4 g(x) - f(x) dx = \int_0^4 2\sqrt{x} - \frac{x^2}{4} dx = \int_0^4 2x^{1/2} - \frac{1}{4}x^2 dx = \left[2 \frac{x^{1+1/2}}{1+1/2} - \frac{1}{4} \cdot \frac{x^3}{3} \right]_0^4 = \\ &= \left[2 \frac{x^{3/2}}{3/2} - \frac{x^3}{12} \right]_0^4 = \left[\frac{4}{3} \cdot \sqrt{x^3} - \frac{x^3}{12} \right]_0^4 = \left[\frac{4}{3} \cdot \sqrt{4^3} - \frac{4^3}{12} \right] - \left[\frac{4}{3} \cdot \sqrt{0^3} - \frac{0^3}{12} \right] = \frac{16}{3} \approx 5.333u^2 \end{aligned}$$

El área de la región del plano encerrada entre las gráficas de las funciones f y g tiene un valor de $\frac{16}{3} \approx 5.333$ unidades cuadradas.

3. Dadas las rectas $r: \begin{cases} x+2y=-1 \\ z=1 \end{cases}$ y $s: x+1=\frac{y-1}{2}=z$. Calcula:

- a) Un vector director de cada recta. (0.75 puntos)
 b) El ángulo que forman las rectas. (0.75 puntos)
 c) El plano paralelo a las dos rectas y que pasa por el punto $A(1,2,1)$. (1 punto)

a) Hallamos un vector director y un punto de cada recta.

$$r: \begin{cases} x+2y=-1 \\ z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-1-2y \\ z=1 \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} x=-1-2\lambda \\ y=\lambda \\ z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_r(-1,0,1) \\ \vec{v}_r=(-2,1,0) \end{cases}$$

$$s: \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-0}{1} \Rightarrow \begin{cases} Q_s(-1,1,0) \\ \vec{u}_s=(1,2,1) \end{cases}$$

b) Hallamos el ángulo que forman los vectores directores de las rectas.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = (-2,1,0) \\ \vec{u}_s = (1,2,1) \end{array} \right\} \Rightarrow \cos(\vec{v}_r, \vec{u}_s) = \frac{\vec{v}_r \cdot \vec{u}_s}{|\vec{v}_r| \cdot |\vec{u}_s|} = \frac{(-2,1,0)(1,2,1)}{\sqrt{(-2)^2+1^2+0^2} \cdot \sqrt{1^2+2^2+1^2}} = \frac{-2+2}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{6}} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\vec{v}_r, \vec{u}_s) = \cos^{-1}(0) = 90^\circ$$

El ángulo que forman las rectas es de 90° .

c) El plano π paralelo a las dos rectas tiene como vectores directores los vectores directores de ambas rectas.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} = \vec{v}_r = (-2,1,0) \\ \vec{v} = \vec{u}_s = (1,2,1) \\ A(1,2,1) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \pi: \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x-1+0-4(z-1)-(z-1)+2(y-2)-0=0 \Rightarrow$$

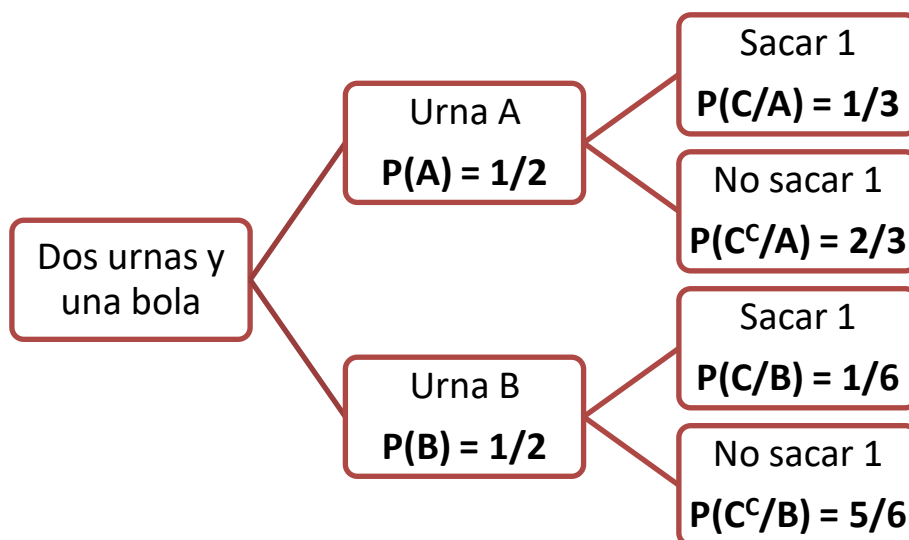
$$\Rightarrow x-1-4z+4-z+1+2y-4=0 \Rightarrow \boxed{\pi: x+2y-5z=0}$$

El plano π paralelo a las dos rectas que pasa por $A(1,2,1)$ tiene ecuación $\pi: x+2y-5z=0$.

4. Una urna A contiene tres bolas numeradas del 1 al 3 y otra urna B, seis bolas numeradas del 1 al 6. Se elige, al azar, una urna y se extrae una bola.

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que sea una bola con el número 1? (1.25 puntos)
 b) Si extraída la bola resulta tener el número 1, ¿cuál es la probabilidad de que proceda de la urna A? (1.25 puntos)

Realizamos un diagrama de árbol descriptivo del experimento aleatorio. Llamamos C al suceso “sacar la bola con el número 1 de la urna”



- a) Nos piden calcular $P(C)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(C) = P(A)P(C/A) + P(B)P(C/B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{4} = \boxed{0.25}$$

La probabilidad de que sea una bola con el número 1 es 0.25.

- b) Nos piden calcular $P(A/C)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(A/C) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} = \frac{P(A)P(C/A)}{P(C)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}}{0.25} = \frac{\frac{2}{3}}{3} \approx 0.6667$$

La probabilidad de que la bola extraída con el número 1 proceda de la urna A vale $\frac{2}{3} \approx 0.6667$.

OPCIÓN B

1. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} k & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

- a) Estudia, en función de los valores reales de k , si la matriz $B \cdot A$ tiene inversa. Calcúlala, si es posible, para $k = 1$. (1.5 puntos)
 b) Estudia, en función de los valores reales de k , si la matriz $A \cdot B$ posee inversa. (1 punto)

a) Hallamos la expresión de la matriz $B \cdot A$.

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} k & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k+0+0 & 0+0-1 \\ 1+2+0 & 0+k+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & -1 \\ 3 & k+2 \end{pmatrix}$$

$$2 \times \boxed{3 \cdot 3} \times 2 \longrightarrow 2 \times 2$$

Averiguamos cuando se anula el determinante de la matriz $B \cdot A$.

$$|B \cdot A| = \begin{vmatrix} k & -1 \\ 3 & k+2 \end{vmatrix} = k(k+2) + 3 = k^2 + 2k + 3$$

$$|B \cdot A| = 0 \Rightarrow k^2 + 2k + 3 = 0 \Rightarrow k = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 12}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-8}}{2} = \text{No existe}$$

El determinante nunca se anula y la matriz $B \cdot A$ tiene inversa para cualquier valor de k .

Calculamos la inversa de $B \cdot A$ para $k = 1$.

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow |B \cdot A| = 3 + 3 = 6$$

$$(B \cdot A)^{-1} = \frac{\text{Adj}((B \cdot A)^T)}{|B \cdot A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}}{6} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/6 \\ -1/2 & 1/6 \end{pmatrix}$$

b) Obtenemos la expresión de la matriz $A \cdot B$.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 & -1 \\ 2k+k & k & -2+2k \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 & -1 \\ 3k & k & 2k-2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$3 \times \boxed{2 \cdot 2} \times 3 \longrightarrow 3 \times 3$$

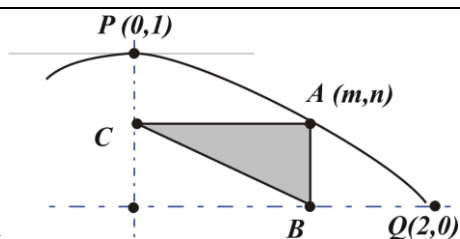
Averiguamos cuando se anula el determinante de la matriz $A \cdot B$.

$$|A \cdot B| = \begin{vmatrix} k & 0 & -1 \\ 3k & k & 2k-2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2k^2 + 0 - 3k + k - 0 - k(2k-2) = 2k^2 - 2k - 2k^2 + 2k = 0$$

El determinante de la matriz $A \cdot B$ siempre es nulo y la matriz $A \cdot B$ no tiene inversa para ningún valor de k .

2. Se considera el arco comprendido entre los puntos $P(0, 1)$ y $Q(2, 0)$ de la gráfica de la función $y = a + bx + cx^2$ con tangente en el punto P paralela al eje OX .

- a) Calcula los valores de a , b y c . (1 punto)
 b) Con $a = 1$, $b = 0$ y $c = -1/4$ y siendo $A(m, n)$ un punto perteneciente a ese arco. Determina los valores de m y n para que el área del triángulo rectángulo ABC sea máxima. (1.5 puntos)



- a) Si la tangente en el punto P es paralela al eje OX significa que en dicho punto hay un máximo relativo y por lo tanto la derivada se anula para $x = 0$.

$$\left. \begin{aligned} y &= a + bx + cx^2 \Rightarrow y' = b + 2cx \\ y'(0) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow b + 2c(0) = 0 \Rightarrow \boxed{b=0}$$

La función queda $y = a + cx^2$.

La función pasa por los puntos $P(0, 1)$ y $Q(2, 0)$.

$$\left. \begin{aligned} y &= a + cx^2 \\ P(0, 1) \end{aligned} \right\} \Rightarrow 1 = a + c \cdot 0^2 \Rightarrow \boxed{a=1}$$

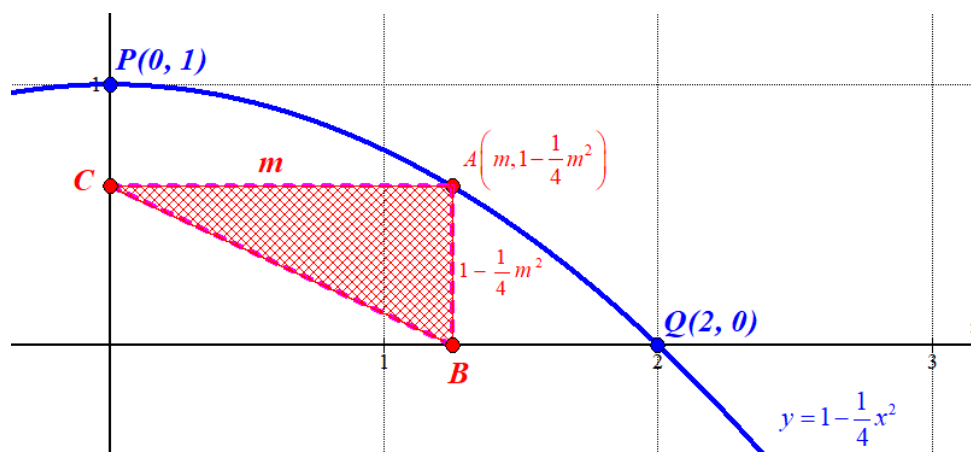
$$\left. \begin{aligned} y &= a + cx^2 \\ Q(2, 0) \end{aligned} \right\} \Rightarrow 0 = a + c \cdot 2^2 \Rightarrow \{a=1\} \Rightarrow 0 = 1 + 4c \Rightarrow 4c = -1 \Rightarrow \boxed{c = -\frac{1}{4}}$$

Los valores buscados son $a = 1$, $b = 0$ y $c = -\frac{1}{4}$. La función queda $y = 1 - \frac{1}{4}x^2$.

- b) Como el punto $A(m, n)$ pertenece a la gráfica debe cumplirse:

$$\left. \begin{aligned} y &= 1 - \frac{1}{4}x^2 \\ A(m, n) \end{aligned} \right\} \Rightarrow n = 1 - \frac{1}{4}m^2 \Rightarrow A\left(m, 1 - \frac{1}{4}m^2\right)$$

Añadimos al dibujo esta información.



Como la base del triángulo ABC es m y la altura es $1 - \frac{1}{4}m^2$ el área del triángulo rectángulo

$$ABC \text{ tendrá la expresión } \frac{m \cdot \left(1 - \frac{1}{4}m^2\right)}{2} = \frac{m \cdot \left(\frac{4 - m^2}{4}\right)}{2} = \frac{4m - m^3}{8}.$$

Averiguamos los puntos críticos de la función área $A(m) = \frac{4m - m^3}{8}$.

$$A(m) = \frac{4m - m^3}{8} \Rightarrow A'(m) = \frac{4 - 3m^2}{8}$$

$$A'(m) = 0 \Rightarrow \frac{4 - 3m^2}{8} = 0 \Rightarrow 4 - 3m^2 = 0 \Rightarrow 3m^2 = 4 \Rightarrow m^2 = \frac{4}{3} \Rightarrow m = \sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \approx 1.1547$$

Sustituimos este valor en la segunda derivada.

$$A'(m) = \frac{4 - 3m^2}{8} \Rightarrow A''(m) = \frac{-6m}{8} \Rightarrow A''\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{-6 \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3}}{8} < 0$$

Al ser negativo el valor de la segunda derivada podemos afirmar que la función área es máxima para $m = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Obtenemos el valor de n para $m = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

$$n = 1 - \frac{1}{4} \left(\sqrt{\frac{4}{3}} \right)^2 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \approx 0.6667$$

Para los valores de $m = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ y $n = \frac{2}{3}$ el área del triángulo rectángulo ABC es máxima.

3. Dados los puntos A(1, 2, 0), B(-1, 1, 1), C(0, 0, 1), D(4, 1, 3). Determina:

- a) Si los cuatro puntos son coplanarios. (0.75 puntos)
 b) La recta r que pasa por D y es perpendicular al plano π que contiene los puntos A, B, C. (1 punto)
 c) El punto de corte de la recta r con el plano π . (0.75 puntos)

a) Hallamos la ecuación del plano π que contiene los puntos A, B y C. Dicho plano tendrá como vectores directores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} = \overrightarrow{AB} = (-1, 1, 1) - (1, 2, 0) = (-2, -1, 1) \\ \vec{v} = \overrightarrow{AC} = (0, 0, 1) - (1, 2, 0) = (-1, -2, 1) \\ C(0, 0, 1) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \pi = \begin{vmatrix} x & y & z-1 \\ -2 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -x - y + 4(z-1) - (z-1) + 2y + 2x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -x - y + 4z - 4 - z + 1 + 2y + 2x = 0 \Rightarrow \boxed{\pi : x + y + 3z - 3 = 0}$$

Comprobamos si el punto D(4, 1, 3) pertenece al plano π .

$$\left. \begin{array}{l} \pi : x + y + 3z - 3 = 0 \\ \text{¿} D(4, 1, 3) \in \pi? \end{array} \right\} \Rightarrow \text{¿} 4 + 1 + 9 - 3 = 0? \Rightarrow \text{¿} 14 - 3 = 0? \text{ ¡No se cumple!}$$

El punto D no pertenece al plano definido por los puntos A, B y C.

Los puntos A, B, C y D no son coplanarios.

b) La recta r perpendicular al plano π que contiene los puntos A, B, C tiene como vector director el vector normal del plano.

$$\pi : x + y + 3z - 3 = 0 \Rightarrow \vec{n} = (1, 1, 3) \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = \vec{n} = (1, 1, 3) \\ D(4, 1, 3) \in r \end{array} \right\} \Rightarrow r : \begin{cases} x = 4 + \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 3 + 3\lambda \end{cases} ; \lambda \in \mathbb{R}$$

c) Resolvemos el sistema formado por las ecuaciones de plano y recta para obtener las coordenadas del punto P de corte de recta y plano.

$$\left. \begin{array}{l} r : \begin{cases} x = 4 + \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 3 + 3\lambda \end{cases} \\ \pi : x + y + 3z - 3 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 4 + \lambda + 1 + \lambda + 3(3 + 3\lambda) - 3 = 0 \Rightarrow 4 + \lambda + 1 + \lambda + 9 + 9\lambda - 3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 11\lambda = -11 \Rightarrow \lambda = \frac{-11}{11} = -1 \Rightarrow \begin{cases} x = 4 - 1 = 3 \\ y = 1 - 1 = 0 \\ z = 3 - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow P(3, 0, 0)$$

El punto de corte de la recta r con el plano π tiene coordenadas $P(3, 0, 0)$.

4. En una asociación benéfica se reparten dos productos, harina y leche. Todas las personas que entran cogen dos unidades a elegir entre los dos tipos de producto. El 70% de las personas que entran cogen harina y el 40% los dos productos. Calcula:
- La probabilidad de que una persona que entre coja leche. (1 punto)
 - La probabilidad de que una persona que entre coja un solo tipo de producto. (0.5 puntos)
 - Una persona que sale de la asociación lleva leche. ¿Cuál es la probabilidad de que haya cogido también harina? (1 punto)

Realizamos una tabla de contingencia para ordenar toda la información proporcionada en el ejercicio y obtener la información que lleva implícita.

Como todas las personas que entran cogen dos unidades a elegir entre los dos tipos de producto las personas que no cogen ni harina ni leche son el 0 %.

	Leche	No leche	
Harina	40		70
No harina		0	
			100

Completamos la tabla.

	Leche	No leche	
Harina	40	30	70
No harina	30	0	30
	70	30	100

Con esta información respondemos a las preguntas planteadas usando la regla de Laplace.

- Hay un 70 % de personas que cogen leche. La probabilidad de que una persona que entre coja leche es 0.7.
- Hay un 30 % de personas que cogen leche y no harina, otro 30 % cogen harina y no leche. Hay un total de $30 + 30 = 60$ % de personas que cogen solo un producto. La probabilidad de que una persona que entre coja un solo tipo de producto es 0.6.
- Hay un 70 % de personas que cogen leche y de ellos el 40 % ha cogido también harina. La probabilidad de que una persona que ha cogido leche también lleve harina es $\frac{40}{70} = \frac{4}{7} \approx 0.5714$