



Universidad de Oviedo  
*Universidá d'Uviéu*  
 University of Oviedo

Prueba de evaluación de Bachillerato para  
 el acceso a la Universidad (EBAU)

**Curso 2017-2018**

## MATEMÁTICAS II

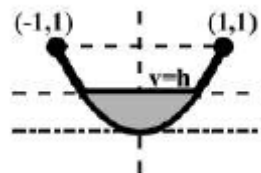
El examen presenta dos opciones: A y B. Elige una de ellas y responde razonadamente a los cuatro ejercicios de que consta dicha opción.

### OPCIÓN A

1. Discutir el sistema y resolver en los casos compatibles (2.5 puntos)

$$\begin{cases} 2x + y + z = a \\ 2x + y + 2z = 2a \\ 2x + y + 3z = 3 \end{cases}$$

2. Se tiene un abrevadero de longitud 6 m y de altura 1 m. Su sección es la descrita en la figura formada por la función  $y = x^2$ . Por  $h$  indicamos la altura del nivel del líquido.



- a) Comprueba que el área de la región S, sombreada en la figura, en

función de  $h$  se puede expresar como  $S(h) = \frac{4h\sqrt{h}}{3}$ . (1.5 puntos)

- b) Determina la altura  $h$  donde se alcanza la mitad del volumen total del abrevadero.

(Nota: Volumen = S  $\times$  longitud). (1 punto)

3. Los puntos A(0, 1, 0) y B(-1, 1, 1) son dos vértices de un triángulo. El tercero C pertenece a

la recta  $r: \begin{cases} x = 4 \\ z = 1 \end{cases}$ . Además, la recta que une A y C es perpendicular a la recta  $r$ .

- a) Determina el punto C. (1.5 puntos)

- b) Calcula el área del triángulo. (1 punto)

4. Consideremos dos dados, uno normal con las caras numeradas del 1 al 6 y otro trucado, con 4 caras con el número 5 y 2 caras con el número 6. Se elige al azar uno de los dados y se lanza.

- a) Calcula la probabilidad de sacar 5. (1.25 puntos)

- b) Si el resultado de la tirada es 5, ¿cuál es la probabilidad de haber elegido el dado trucado? (1.25 puntos)



Universidad de Oviedo  
Universidá d'Uviéu  
University of Oviedo

Prueba de evaluación de Bachillerato para  
el acceso a la Universidad (EBAU)  
**Curso 2017-2018**

### OPCIÓN B

1. Dada la matriz  $A$ , calcula:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

- a) Su rango. (1.5 puntos)  
b) Si existe, una columna combinación lineal de las restantes. (0.5 puntos)  
c) Si existe, una fila combinación lineal de las restantes. (0.5 puntos)

2. Se tienen 20 m de marco metálico para construir una valla publicitaria rectangular. El terreno donde se quiere instalar la valla es fangoso y al colocarla se hunde una altura  $h$  que es la quinta parte de la anchura de la valla. Calcula las medidas de la valla de forma que el área visible (la sombreada en la figura) sea la máxima posible. (2.5 puntos)



3. Dados los puntos  $A(2, 1, 0)$  y  $B(1, 0, -1)$  y  $r$  la recta que determinan. Y sea  $s$  la recta definida

$$\text{por } s: \begin{cases} x + y = 2 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

- a) Estudia la posición relativa de las rectas. (1.25 puntos)  
b) Determina un punto  $C$  de la recta  $s$  tal que los vectores  $\overrightarrow{CA}$  y  $\overrightarrow{CB}$  sean perpendiculares. (1.25 puntos)

4. En una ciudad hay dos equipos destacados, uno de fútbol y otro de baloncesto. Todos los habitantes son seguidores de alguno de los dos equipos. Se sabe que hay un 60 % de seguidores del equipo de fútbol y otro 60 % del equipo de baloncesto. Calcula:

- a) La probabilidad de que un habitante sea seguidor de ambos equipos a la vez. (1 punto)  
b) La probabilidad de que un habitante sea únicamente seguidor del equipo de fútbol. (0.5 puntos)  
c) Se elige al azar un habitante de la ciudad y se comprueba que es seguidor del equipo de baloncesto. ¿cuál es la probabilidad de que sea también seguidor del equipo de fútbol? (1 punto)

**SOLUCIONES****1. Discutir el sistema y resolver en los casos compatibles****(2.5 puntos)**

$$\begin{cases} 2x + y + z = a \\ 2x + y + 2z = 2a \\ 2x + y + 3z = 3 \end{cases}$$

Dada la apariencia del sistema utilizamos el método de Gauss para discutir su compatibilidad.

El sistema tiene asociadas la matriz de coeficientes  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$  y la matriz ampliada

$$A/B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & a \\ 2 & 1 & 2 & 2a \\ 2 & 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Triangulamos la matriz ampliada utilizando el método de Gauss.

$$A/B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & a \\ 2 & 1 & 2 & 2a \\ 2 & 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - \text{Fila } 1^a \\ 2 \quad 1 \quad 2 \quad 2a \\ -2 \quad -1 \quad -1 \quad -a \\ \hline 0 \quad 0 \quad 1 \quad a \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 1^a \\ 2 \quad 1 \quad 3 \quad 3 \\ -2 \quad -1 \quad -1 \quad -a \\ \hline 0 \quad 0 \quad 2 \quad 3-a \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 2 & 3-a \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - 2 \cdot \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad 0 \quad 2 \quad 3-a \\ 0 \quad 0 \quad -2 \quad -2a \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 3-3a \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} \overbrace{2 \quad 1 \quad 1}^{A/B} & a \\ 0 & 0 & 1 & a \\ \underbrace{0 \quad 0 \quad 0}_A & 3-3a \end{pmatrix}$$

El determinante de la matriz A es nulo  $\rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$ . Su rango no es 3.

Si consideramos el menor de orden 2 que resulta de quitar la fila 3ª y la columna 1ª su

determinante es no nulo  $\rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 0 = 1 \neq 0$ . El rango de A es 2, independientemente del valor de  $a$ .

Como en la matriz ampliada A/B la columna 1ª y 2ª son proporcionales consideramos el menor de orden 3 que resulta de quitar la columna 1ª  $\rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 3-3a \end{vmatrix} = 3-3a$ . Este determinante se

anula para  $a=1$ .

Consideramos dos casos diferentes.

**CASO 1.**  $a \neq 1$

En este caso el determinante del menor no es nulo y el rango de A/B es 3. El rango de A es 2 y el de la matriz ampliada A/B es 3. Como los rangos son distintos el sistema es incompatible.

**CASO 2.**  $a = 1$

En este caso el determinante del menor es nulo y el rango de A/B no es 3 y por tanto es 2, como el rango de A. Rango A = Rango A/B = 2 < 3 = Número de incógnitas.

El sistema es compatible indeterminado.

Resolvemos el sistema para  $a=1$ , a partir del sistema equivalente obtenido.

$$\left( \begin{array}{cccc} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x + y + z = 1 \\ z = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow 2x + y + 1 = 1 \Rightarrow 2x + y = 0 \Rightarrow y = -2x \Rightarrow \begin{cases} x = \lambda \\ y = -2\lambda; \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 1 \end{cases}$$

Para  $a=1$  las soluciones del sistema son  $\begin{cases} x = \lambda \\ y = -2\lambda; \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 1 \end{cases}$ .

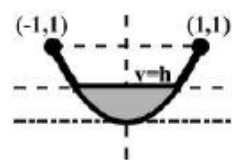
**Resumiendo:** Si  $a \neq 1$  el sistema es incompatible y si  $a = 1$  el sistema es compatible

indeterminado siendo sus soluciones  $\begin{cases} x = \lambda \\ y = -2\lambda; \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 1 \end{cases}$ .

2. Se tiene un abrevadero de longitud 6 m y de altura 1 m.

Su sección es la descrita en la figura formada por la función  $y = x^2$ .

Por  $h$  indicamos la altura del nivel del líquido.



a) Comprueba que el área de la región S, sombreada en la figura,

en función de  $h$  se puede expresar como  $S(h) = \frac{4h\sqrt{h}}{3}$ . (1.5 puntos)

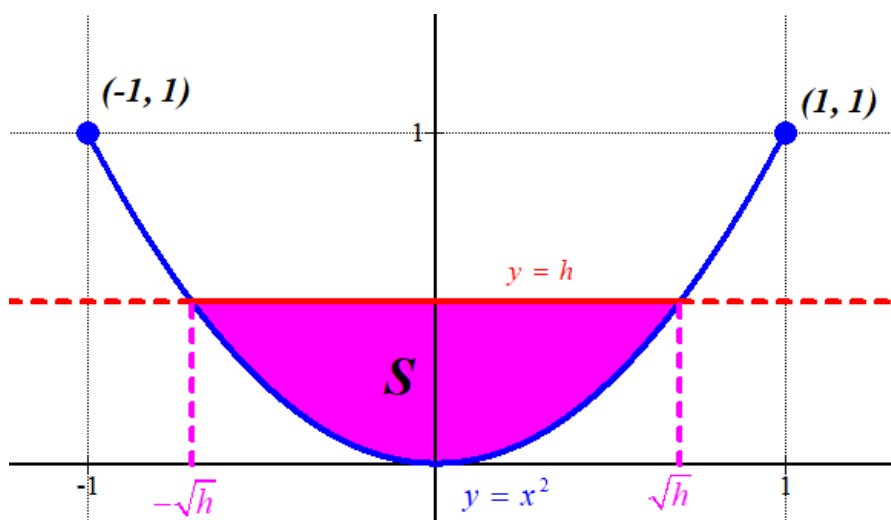
b) Determina la altura  $h$  donde se alcanza la mitad del volumen total del abrevadero.

(Nota: Volumen =  $S \times$  longitud).

(1 punto)

a) Completamos el dibujo indicando las coordenadas de corte de las funciones que delimitan la región S.

$$\left. \begin{array}{l} y = h \\ y = x^2 \end{array} \right\} \Rightarrow x^2 = h \Rightarrow \boxed{x = \pm\sqrt{h}}$$



El área de la región S es el valor de la integral definida entre  $-\sqrt{h}$  y  $\sqrt{h}$  de la diferencia entre la función  $y = h$  y la función  $y = x^2$ .

$$\begin{aligned} \text{Área } S &= \int_{-\sqrt{h}}^{\sqrt{h}} h - x^2 dx = \left[ hx - \frac{x^3}{3} \right]_{-\sqrt{h}}^{\sqrt{h}} = \left[ h\sqrt{h} - \frac{(\sqrt{h})^3}{3} \right] - \left[ h(-\sqrt{h}) - \frac{(-\sqrt{h})^3}{3} \right] = \\ &= h\sqrt{h} - \frac{h\sqrt{h}}{3} + h\sqrt{h} - \frac{h\sqrt{h}}{3} = \frac{3h\sqrt{h}}{3} - \frac{h\sqrt{h}}{3} + \frac{3h\sqrt{h}}{3} - \frac{h\sqrt{h}}{3} = \frac{4h\sqrt{h}}{3} \end{aligned}$$

Hemos comprobado que  $\text{Área } S = \frac{4h\sqrt{h}}{3}$  metros cuadrados, siendo  $0 \leq h \leq 1$ .

b) La expresión del volumen de agua del abrevadero en función de la altura del agua es el producto del área de S por 6 metros de profundidad.

$$V(h) = \frac{4h\sqrt{h}}{3} \cdot 6 = 8h\sqrt{h} \text{ metros cúbicos}$$

El volumen total del abrevadero se consigue cuando  $h=1$ .

$$V(1) = 8 \cdot 1 \cdot \sqrt{1} = 8$$

El volumen máximo del abrevadero es de 8 metros cúbicos.

El abrevadero está en la mitad cuando tiene 4 metros cúbicos. Averiguamos el valor de  $h$  para que tenga ese volumen.

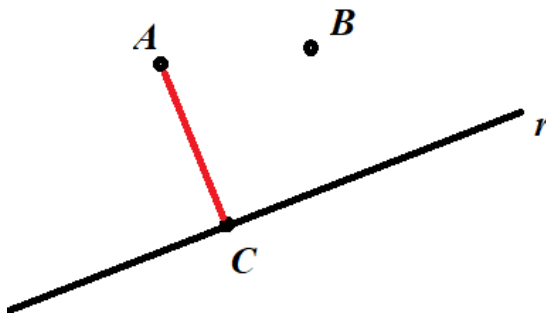
$$V(h) = 4 \Rightarrow 8h\sqrt{h} = 4 \Rightarrow h\sqrt{h} = \frac{4}{8} \Rightarrow \sqrt{h^3} = \frac{1}{2} \Rightarrow h^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow \boxed{h = \sqrt[3]{\frac{1}{4}}}$$

El abrevadero está a la mitad de su capacidad cuando la altura del agua es  $h = \sqrt[3]{\frac{1}{4}} \approx 0.63$  metros.

3. Los puntos  $A(0, 1, 0)$  y  $B(-1, 1, 1)$  son dos vértices de un triángulo. El tercero  $C$  pertenece a la recta  $r: \begin{cases} x=4 \\ z=1 \end{cases}$ . Además, la recta que une  $A$  y  $C$  es perpendicular a la recta  $r$ .
- a) Determina el punto  $C$ . (1.5 puntos)
- b) Calcula el área del triángulo. (1 punto)

- a) El punto  $C$  al pertenecer a la recta  $r: \begin{cases} x=4 \\ z=1 \end{cases}$  tiene coordenadas  $C(4, y, 1)$ .

La situación planteada es la del dibujo, siendo el segmento  $AC$  perpendicular a la recta  $r$ .



Si hallamos el plano perpendicular a la recta  $r$  que pasa por el punto  $A$ , el punto  $C$  será el punto de corte de recta y plano.

Hallamos la ecuación del plano  $\pi$  perpendicular a la recta  $r$  que pasa por el punto  $A$ . Tendrá

como vector normal el vector director de la recta  $r: \begin{cases} x=4 \\ z=1 \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} x=4 \\ y=\lambda \\ z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_r(4, 0, 1) \\ \vec{v}_r = (0, 1, 0) \end{cases}$ .

$$\left. \begin{array}{l} \vec{n} = \vec{v}_r = (0, 1, 0) \\ A(0, 1, 0) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \pi: y + D = 0 \\ A(0, 1, 0) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow 1 + D = 0 \Rightarrow D = -1 \Rightarrow \boxed{\pi: y - 1 = 0}$$

Hallamos el punto de corte  $C$  de recta y plano.

$$\left. \begin{array}{l} \pi: y - 1 = 0 \\ r: \begin{cases} x=4 \\ z=1 \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y=1 \\ x=4 \\ z=1 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{C(4, 1, 1)}$$

- b) El área del triángulo  $ABC$  es la mitad del módulo del producto vectorial  $\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB}$ .

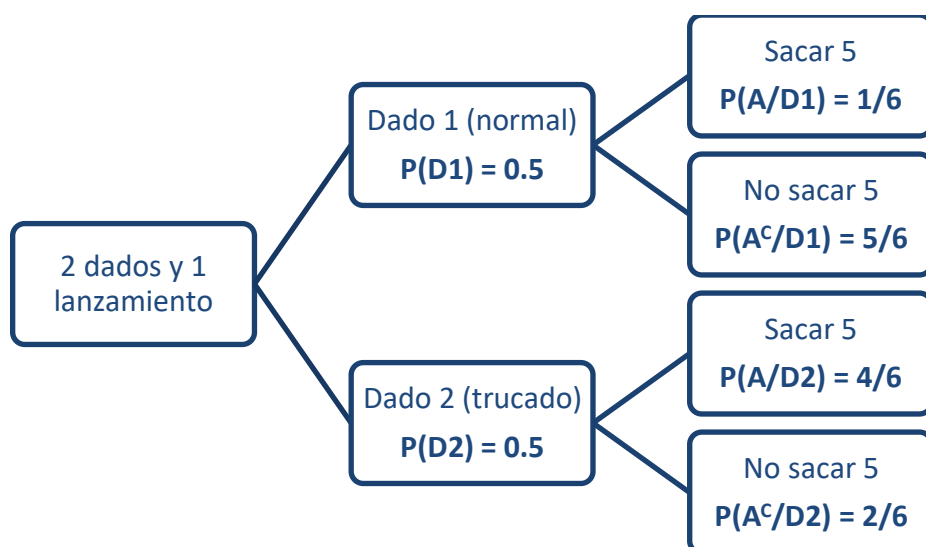
$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{AC} = (4, 1, 1) - (0, 1, 0) = (4, 0, 1) \\ \overrightarrow{AB} = (-1, 1, 1) - (0, 1, 0) = (-1, 0, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 4 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -j - 4j = -5j = (0, -5, 0)$$

$$\text{Área} = \frac{|\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB}|}{2} = \frac{\sqrt{0^2 + (-5)^2 + 0^2}}{2} = \frac{5}{2} = 2.5 \text{ u}^2$$

El área del triángulo  $ABC$  es de 2.5 unidades cuadradas.

4. Consideremos dos dados, uno normal con las caras numeradas del 1 al 6 y otro trucado, con 4 caras con el número 5 y 2 caras con el número 6. Se elige al azar uno de los dados y se lanza.
- a) Calcula la probabilidad de sacar 5. (1.25 puntos)
- b) Si el resultado de la tirada es 5, ¿cuál es la probabilidad de haber elegido el dado trucado? (1.25 puntos)

Realizamos un diagrama de árbol para aclarar los posibles resultados del experimento y sus probabilidades. Llamamos D1 a elegir el dado normal y D2 a elegir el dado trucado. Estos dos sucesos son igual de probables y la probabilidad de cualquiera de ellos es  $1/2 = 0.5$ . Llamamos A al suceso “sacar 5 al lanzar el dado elegido” y  $A^c$  al suceso “no sacar 5 al lanzar el dado elegido”.



A partir de los datos del diagrama respondemos a las preguntas planteadas.

- a) Nos piden calcular  $P(A)$ . Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(A) = P(D1)P(A/D1) + P(D2)P(A/D2) = 0.5 \cdot \frac{1}{6} + 0.5 \cdot \frac{4}{6} = \frac{2.5}{6} \approx 0.2166$$

La probabilidad de sacar 5 tiene un valor aproximado de 0.2166.

- b) Nos piden calcular  $P(D2/A)$ . Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(D2/A) = \frac{P(D2 \cap A)}{P(A)} = \frac{P(D2)P(A/D2)}{P(A)} = \frac{0.5 \cdot \frac{4}{6}}{\frac{2.5}{6}} = \frac{2}{2.5} = 0.8$$

La probabilidad de haber elegido el dado trucado, sabiendo que hemos sacado 5 es de 0.8.



**OPCIÓN B**

1. Dada la matriz A, calcula:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

a) Su rango. (1.5 puntos)

b) Si existe, una columna combinación lineal de las restantes. (0.5 puntos)

c) Si existe, una fila combinación lineal de las restantes. (0.5 puntos)

a) La matriz  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}$  es de dimensiones  $3 \times 4$  y su rango puede ser 3, 2 o 1.

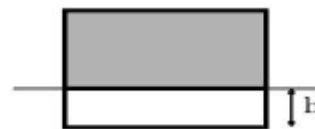
Consideramos el menor de orden 3 que resulta de quitar la columna 2ª (3 veces la columna 3ª)

$$\rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 4 + 4 - 1 - 8 = -1 \neq 0. \text{ Al ser no nulo la matriz A tiene rango 3.}$$

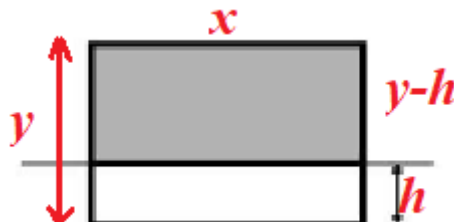
b) Como hay 4 columnas y el rango es 3 debe existir una columna que sea combinación lineal de las restantes. Se observa que la columna 2ª es 3 veces la columna 3ª.

c) Como el rango es 3 las tres filas son independientes entre sí y ninguna es combinación lineal de las restantes.

2. Se tienen 20 m de marco metálico para construir una valla publicitaria rectangular. El terreno donde se quiere instalar la valla es fangoso y al colocarla se hunde una altura  $h$  que es la quinta parte de la anchura de la valla. Calcula las medidas de la valla de forma que el área visible (la sombreada en la figura) sea la máxima posible. (2.5 puntos)



Llamamos “y” a la altura de la valla y “x” a la anchura.  
La situación planteada es la del dibujo.



Como  $h$  es la quinta parte de la anchura ( $x$ ) se cumple que  $h = \frac{x}{5} \Rightarrow y - h = y - \frac{x}{5}$ .

Tenemos 20 metros de marco metálico, por lo que  $2x + 2y = 20 \Rightarrow x + y = 10 \Rightarrow y = 10 - x$ .  
Utilizamos las dos expresiones obtenidas y el área de la zona sombreada es:

$$\text{Área} = A(x) = x(y - h) = x\left(y - \frac{x}{5}\right) = x\left(10 - x - \frac{x}{5}\right) = x\left(10 - \frac{6x}{5}\right) = 10x - \frac{6}{5}x^2$$

Debemos buscar el máximo de la función  $A(x) = 10x - \frac{6}{5}x^2$ .

Derivamos e igualamos a cero en busca del punto crítico de la función.

$$A(x) = 10x - \frac{6}{5}x^2 \Rightarrow A'(x) = 10 - \frac{12}{5}x$$

$$A'(x) = 0 \Rightarrow 10 - \frac{12}{5}x = 0 \Rightarrow 50 - 12x = 0 \Rightarrow 12x = 50 \Rightarrow x = \frac{50}{12} = \frac{25}{6}$$

Comprobamos si  $x = \frac{25}{6}$  es un máximo de la función área usando la derivada segunda.

$$A'(x) = 10 - \frac{12}{5}x \Rightarrow A''(x) = -\frac{12}{5} \Rightarrow A''\left(\frac{25}{6}\right) = -\frac{12}{5} < 0$$

Al ser la segunda derivada negativa la función presenta un máximo para  $x = \frac{25}{6}$ .

Para  $x = \frac{25}{6}$  tenemos que  $y = 10 - \frac{25}{6} = \frac{35}{6}$ .

Las medidas de la valla que hacen máxima el área de la zona sombreada son  $\frac{25}{6} \approx 4.166$  metros de anchura y  $\frac{35}{6} \approx 5.833$  metros de altura.

3. Dados los puntos  $A(2, 1, 0)$  y  $B(1, 0, -1)$  y  $r$  la recta que determinan. Y sea  $s$  la recta definida por  $s: \begin{cases} x + y = 2 \\ y + z = 0 \end{cases}$
- a) Estudia la posición relativa de las rectas. (1.25 puntos)
- b) Determina un punto  $C$  de la recta  $s$  tal que los vectores  $\overrightarrow{CA}$  y  $\overrightarrow{CB}$  sean perpendiculares. (1.25 puntos)

a) Hallamos la ecuación de la recta  $r$ .

$$\left. \begin{aligned} \vec{v}_r = \overrightarrow{BA} &= (2, 1, 0) - (1, 0, -1) = (1, 1, 1) \\ A(2, 1, 0) &\in r \end{aligned} \right\} \Rightarrow r: \begin{cases} x = 2 + \alpha \\ y = 1 + \alpha \\ z = \alpha \end{cases}$$

Obtenemos un vector director de la recta  $s$ .

$$s: \begin{cases} x + y = 2 \\ y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 - y \\ z = -y \end{cases} \Rightarrow s: \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = -\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{u}_s = (-1, 1, -1) \\ Q_s(2, 0, 0) \end{cases}$$

Observamos que las rectas no son paralelas ni coincidentes, pues sus vectores directores no tienen coordenadas proporcionales.

$$\left. \begin{aligned} \vec{u}_s &= (-1, 1, -1) \\ \vec{v}_r &= (1, 1, 1) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{-1}{1} \neq \frac{1}{1} \neq \frac{-1}{1}$$

Al no ser ni paralelas ni coincidentes las rectas las rectas se cortan o cruzan. Comprobamos si el producto mixto  $[\vec{u}_s, \vec{v}_r, \overrightarrow{AQ_s}]$  es nulo o no.

$$\overrightarrow{AQ_s} = (2, 0, 0) - (2, 1, 0) = (0, -1, 0)$$

$$\left. \begin{aligned} \vec{u}_s &= (-1, 1, -1) \\ \vec{v}_r &= (1, 1, 1) \\ \overrightarrow{AQ_s} &= (0, -1, 0) \end{aligned} \right\} \Rightarrow [\vec{u}_s, \vec{v}_r, \overrightarrow{AQ_s}] = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 1 - 0 - 0 - 1 = 0$$

Al ser el producto mixto nulo las rectas se cortan en un punto (pertenecen al mismo plano).

- b) Si el punto  $C$  pertenece a la recta  $s: \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = -\lambda \end{cases}$  tiene coordenadas  $C(2 - \lambda, \lambda, -\lambda)$ .

Obtenemos las coordenadas de los vectores  $\overrightarrow{CA}$  y  $\overrightarrow{CB}$ .

$$\overrightarrow{CA} = (2, 1, 0) - (2 - \lambda, \lambda, -\lambda) = (\lambda, 1 - \lambda, \lambda)$$

$$\overrightarrow{CB} = (1, 0, -1) - (2 - \lambda, \lambda, -\lambda) = (-1 + \lambda, -\lambda, -1 + \lambda)$$

Como estos vectores deben ser perpendiculares su producto escalar debe ser nulo.

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{CA} = (\lambda, 1 - \lambda, \lambda) \\ \overrightarrow{CB} = (-1 + \lambda, -\lambda, -1 + \lambda) \\ \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow (\lambda, 1 - \lambda, \lambda)(-1 + \lambda, -\lambda, -1 + \lambda) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda(-1 + \lambda) + (1 - \lambda)(-\lambda) + \lambda(-1 + \lambda) = 0 \Rightarrow -\lambda + \lambda^2 - \lambda + \lambda^2 - \lambda + \lambda^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3\lambda^2 - 3\lambda = 0 \Rightarrow 3\lambda(\lambda - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{\lambda = 0} \\ \lambda - 1 = 0 \rightarrow \boxed{\lambda = 1} \end{cases}$$

Existen dos soluciones:

Si  $\lambda = 0$  el punto es  $C(2 - 0, 0, -0) \rightarrow C_1(2, 0, 0)$ .

Si  $\lambda = 1$  el punto es  $C(2 - 1, 1, -1) \rightarrow C_2(1, 1, -1)$ .

4. En una ciudad hay dos equipos destacados, uno de fútbol y otro de baloncesto. Todos los habitantes son seguidores de alguno de los dos equipos. Se sabe que hay un 60 % de seguidores del equipo de fútbol y otro 60 % del equipo de baloncesto. Calcula:
- La probabilidad de que un habitante sea seguidor de ambos equipos a la vez. (1 punto)
  - La probabilidad de que un habitante sea únicamente seguidor del equipo de fútbol. (0.5 puntos)
  - Se elige al azar un habitante de la ciudad y se comprueba que es seguidor del equipo de baloncesto. ¿cuál es la probabilidad de que sea también seguidor del equipo de fútbol? (1 punto)

Si todos los habitantes son seguidores de alguno de los dos equipos significa que hay 0 habitantes que no son seguidores de ninguno de los dos equipos.

Construimos una tabla de contingencia para obtener la información que viene implícita en los datos proporcionados en el ejercicio.

|           | Baloncesto | No baloncesto |            |
|-----------|------------|---------------|------------|
| Fútbol    |            |               | <b>60</b>  |
| No fútbol |            | <b>0</b>      |            |
|           | <b>60</b>  |               | <b>100</b> |

Completamos la tabla.

|           | Baloncesto | No baloncesto |            |
|-----------|------------|---------------|------------|
| Fútbol    | <b>20</b>  | <b>40</b>     | <b>60</b>  |
| No fútbol | <b>40</b>  | <b>0</b>      | <b>40</b>  |
|           | <b>60</b>  | <b>40</b>     | <b>100</b> |

Respondemos a las preguntas planteadas.

- En la tabla se observa que el 20 % de los habitantes son seguidores de ambos equipos. La probabilidad de que un habitante sea seguidor de ambos equipos a la vez es de 0.2.
- Se observa en la tabla que hay un 40 % de los habitantes que son seguidores del equipo de fútbol y no del de baloncesto. La probabilidad de que un habitante sea únicamente seguidor del equipo de fútbol es de 0.4.
- Hay un 60 % de los habitantes que son seguidores del equipo de baloncesto y de estos el 20 % son seguidores del equipo de fútbol. Aplicando la regla de Laplace la probabilidad de que un seguidor del equipo de baloncesto sea también seguidor del equipo de fútbol es  $\frac{20}{60} = \frac{1}{3} \approx 0.3333$ .