



Universidad de Oviedo
Universidá d'Uviéu
University of Oviedo

Prueba de evaluación de Bachillerato para
el acceso a la Universidad (EBAU)

Curso 2017-2018

MATEMÁTICAS II

El examen presenta dos opciones: A y B. Elige una de ellas y responde razonadamente a los cuatro ejercicios de que consta dicha opción.

OPCIÓN A

1. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & m-1 \\ 1 & m-1 & m & 1 \\ m-1 & 1 & m & 1 \end{pmatrix}$ donde m es un número real.

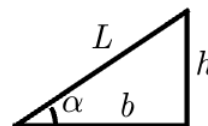
- a) Estudiar el rango de A según los valores de m . (1.5 puntos)
b) Para $m = -1$, calcula la solución, si existe, del sistema (1 punto)

$$A^t \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (A^t \text{ matriz traspuesta})$$

2. Se quiere construir una rampa (ver gráfica) para camiones con una pendiente $m = \tan(\alpha) > 0$ y que salve una altura $h = 20$ metros.

a) Calcula, en función de m , el valor de b y comprueba que la longitud de la

rampa L se puede expresar como $L(m) = 20\sqrt{\frac{m^2+1}{m^2}}$ (0.5 puntos)



b) El camión se mueve a una velocidad constante que depende de la pendiente m y se expresa, en metros por segundo, a través de la función $v(m) = \frac{1}{\sqrt{m}}$.

Demuestra que el tiempo t , en segundos, que tarda un camión en recorrer la rampa se puede expresar

como $t(m) = 20\sqrt{\frac{m^2+1}{m}}$ (0.5 puntos)

c) Calcula la pendiente m que hace mínimo el tiempo de recorrido de un camión. (1.5 puntos)
(Se recuerda que $\tan = \text{tangente}$ y $\text{velocidad} = \text{espacio/tiempo}$).

3. Sean r y s dos rectas perpendiculares que se cortan. La recta r viene dada por las ecuaciones

$$r: \frac{x-1}{2} = y+1 = -z+2. \text{ Calcula:}$$

- a) Un vector director $\vec{v}_1$ de r . (0.75 puntos)
b) Un vector director $\vec{v}_2$ de s sabiendo que $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2$ es proporcional al vector $(1, 0, 2)$. (1 punto)
c) Las ecuaciones del plano π que contiene ambas rectas. (0.75 puntos)

4. En un espacio muestral se tienen dos sucesos independientes: A y B . Se conocen las siguientes probabilidades: $p(A \cap B) = 0.3$ y $p(A/B) = 0.5$. Calcula:

- a) $p(A)$ y $p(B)$. (1 punto)
b) $p(A \cup B)$ y $p(B/A)$. (1 punto)
c) La probabilidad de que no ocurra ni el suceso A ni el suceso B . (0.5 puntos)



Universidad de Oviedo
Universidá d'Uviéu
University of Oviedo

Prueba de evaluación de Bachillerato para
el acceso a la Universidad (EBAU)
Curso 2017-2018

OPCIÓN B

1. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- a) Calcula, si existe, la inversa de B. (1 punto)
b) Determina, si existe, la matriz X que verifica la relación $AXB = C$. (1.5 puntos)

2. Dada la función $f(x) = \frac{1}{x^2 + x - 6}$

- a) Estudia su dominio de definición y calcula sus asíntotas. (0.75 puntos)
b) Estudia sus máximos, mínimos y puntos de inflexión. (0.75 puntos)
c) Calcula una primitiva de la función $f(x)$. (1 punto)

3. Dado la recta $r: \begin{cases} y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$, el punto $Q(1, 1, 1)$ y un plano π .

- a) Calcula el punto P de la recta r que verifica $d(P, Q) = 1u$. (1.25 puntos)
b) Se sabe que $Q \in \pi$ y que $d(P, Q) = d(P, \pi)$. Determina la ecuación del plano π . (1.25 puntos)

4. En la siguiente tabla se muestra la distribución de un grupo de personas en relación al consumo de tabaco:

	Fumador	No fumador
Hombres	10	30
Mujeres	20	40

Se elige en ese grupo una persona al azar. Calcula las probabilidades de los siguientes sucesos diferentes:

- a) Sea fumador. (0.5 puntos)
b) Sabiendo que es fumador, se trate de una mujer. (1 punto)
c) Se extrae una segunda persona al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que una fume y la otra no? (1 punto)

SOLUCIONES**OPCIÓN A**

1. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & m-1 \\ 1 & m-1 & m & 1 \\ m-1 & 1 & m & 1 \end{pmatrix}$ donde m es un número real.

a) Estudiar el rango de A según los valores de m .

(1.5 puntos)

b) Para $m = -1$, calcula la solución, si existe, del sistema

(1 punto)

$$A^t \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (A^t \text{ matriz traspuesta})$$

a) La matriz A es de dimensiones 3×4 . Su rango puede ser 3, 2 o 1.

Aplicamos el método de Gauss para obtener una matriz equivalente a la matriz A , pero en la que sea más fácil el estudio del rango.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & m-1 \\ 1 & m-1 & m & 1 \\ m-1 & 1 & m & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - \text{Fila } 1^a \\ 1 \quad m-1 \quad m \quad 1 \\ -1 \quad -1 \quad -2 \quad -m+1 \\ \hline 0 \quad m-2 \quad m-2 \quad -m+2 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 1^a \\ m-1 \quad 1 \quad m \quad 1 \\ -1 \quad -1 \quad -2 \quad -m+1 \\ \hline m-2 \quad 0 \quad m-2 \quad -m+2 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & m-1 \\ 0 & m-2 & m-2 & -m+2 \\ m-2 & 0 & m-2 & -m+2 \end{pmatrix}$$

Consideramos el menor que resulta de quitar la cuarta columna y calculamos su determinante.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & m-2 & m-2 \\ m-2 & 0 & m-2 \end{vmatrix} = (m-2)(m-2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (m-2)^2 (1+1+0-2-0-0) = 0$$

Como es nulo su determinante considero el menor de orden 3 que resulta de quitar la columna tercera y compruebo el valor de su determinante.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & m-1 \\ 0 & m-2 & -m+2 \\ m-2 & 0 & -m+2 \end{vmatrix} = (m-2)(m-2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & m-1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= (m-2)^2 (-1-1+0-(m-1)-0-0) = (m-2)^2 (-m-1)$$

Este determinante se anula cuando $m = 2$ y cuando $m = -1$. Establecemos tres casos distintos que estudiamos por separado.

CASO 1. $m \neq 2$ y $m \neq -1$.

En este caso el determinante del menor de orden 3 es **no** nulo y el rango de la matriz A es 3.

CASO 2. $m = 2$.

En este caso el determinante del menor de orden 3 es nulo y el rango de la matriz A es menor que 3.

La matriz equivalente queda $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Solo queda una fila con elementos no nulos, y

por tanto, el rango de A es 1.

CASO 3. $m = -1$.

En este caso el determinante del menor de orden 3 es nulo y el rango de la matriz A es menor que 3.

La matriz equivalente queda $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & -3 & -3 & 3 \\ -3 & 0 & -3 & 3 \end{pmatrix}$. Consideramos el menor de orden 2 que

resulta de quitar las columnas 3ª y 4ª y la fila 3ª $\rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$. El determinante del menor de orden 2 es no nulo y por tanto el rango de A es 2.

Resumiendo: Si $m \neq 2$ y $m \neq -1$ el rango de la matriz A es 3, si $m = 2$ el rango de A es 1 y si $m = -1$ el rango de A es 2.

b) Para $m = -1$ la matriz queda $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ y la matriz traspuesta sería

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{El sistema queda } \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Operamos con la matriz ampliada para convertir el sistema en otro triangular equivalente.

$$A^t / B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - \text{Fila } 1^a \\ 1 \quad -2 \quad 1 \quad 0 \\ -1 \quad -1 \quad 2 \quad 0 \\ \hline 0 \quad -3 \quad 3 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - 2 \cdot \text{Fila } 1^a \\ 2 \quad -1 \quad -1 \quad 0 \\ -2 \quad -2 \quad 4 \quad 0 \\ \hline 0 \quad -3 \quad 3 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 4^a + 2 \cdot \text{Fila } 1^a \\ -2 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \\ 2 \quad 2 \quad -4 \quad 0 \\ \hline 0 \quad 3 \quad -3 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 4^a \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad -3 \quad 3 \quad 0 \\ 0 \quad 3 \quad -3 \quad 0 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 4^a + \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad 3 \quad -3 \quad 0 \\ 0 \quad -3 \quad 3 \quad 0 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 4^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Resolvemos el sistema equivalente que nos queda:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y - 2z = 0 \\ -3x + 3y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y - 2z = 0 \\ -x + y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

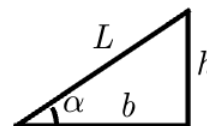
$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y - 2z = 0 \\ y = x \end{array} \right\} \Rightarrow x + x - 2z = 0 \Rightarrow 2x - 2z = 0 \Rightarrow 2x = 2z \Rightarrow \boxed{z = x}$$

Para $m = -1$ las soluciones son: $x = y = z = \lambda$; siendo λ cualquier número real.

2. Se quiere construir una rampa (ver gráfica) para camiones con una pendiente $m = \tan(\alpha) > 0$ y que salve una altura $h = 20$ metros.

a) Calcula, en función de m , el valor de b y comprueba que la longitud de

la rampa L se puede expresar como $L(m) = 20\sqrt{\frac{m^2+1}{m^2}}$ (0.5 puntos)



b) El camión se mueve a una velocidad constante que depende de la pendiente m

y se expresa, en metros por segundo, a través de la función $v(m) = \frac{1}{\sqrt{m}}$. Demuestra que el tiempo t , en

segundos, que tarda un camión en recorrer la rampa se puede expresar como $t(m) = 20\sqrt{\frac{m^2+1}{m}}$

(0.5 puntos)

c) Calcula la pendiente m que hace mínimo el tiempo de recorrido de un camión.

(1.5 puntos)

(Se recuerda que $\tan = \text{tangente}$ y $\text{velocidad} = \text{espacio/tiempo}$).

a) Tenemos un triángulo rectángulo del que conocemos uno de sus catetos. Aplicamos el teorema de Pitágoras.

$$L^2 = b^2 + h^2 = b^2 + 20^2 \Rightarrow L^2 - 400 = b^2 \Rightarrow b = \sqrt{L^2 - 400}$$

Como $m = \tan(\alpha)$ tenemos que $m = \tan(\alpha) = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto contiguo}} = \frac{h}{b} = \frac{20}{b}$. Despejamos b en la

expresión obtenida: $b = \frac{20}{m}$.

Utilizamos las dos igualdades obtenidas.

$$\left. \begin{array}{l} b = \frac{20}{m} \\ b = \sqrt{L^2 - 400} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{20}{m} = \sqrt{L^2 - 400} \Rightarrow \left(\frac{20}{m}\right)^2 = L^2 - 400 \Rightarrow \frac{400}{m^2} = L^2 - 400 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L^2 = \frac{400}{m^2} + 400 \Rightarrow L^2 = 400\left(\frac{1}{m^2} + 1\right) = 400\frac{1+m^2}{m^2} \Rightarrow L = \sqrt{400}\sqrt{\frac{1+m^2}{m^2}} = 20\sqrt{\frac{1+m^2}{m^2}}$$

b) Como $\text{velocidad} = \text{espacio/tiempo}$ y además $v(m) = \frac{1}{\sqrt{m}}$ reunimos estas dos expresiones y despejamos el tiempo.

$$\left. \begin{array}{l} v(m) = \frac{1}{\sqrt{m}} \\ v(m) = \frac{L(m)}{t(m)} \rightarrow t(m) = \frac{L(m)}{v(m)} \\ L(m) = 20\sqrt{\frac{m^2+1}{m^2}} \end{array} \right\} \Rightarrow t(m) = \frac{20\sqrt{\frac{m^2+1}{m^2}}}{\frac{1}{\sqrt{m}}} = 20\sqrt{m}\sqrt{\frac{m^2+1}{m^2}} = 20\sqrt{\frac{m(m^2+1)}{m^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t(m) = 20\sqrt{\frac{m^2+1}{m}}$$

c) Debemos buscar el mínimo de la función $t(m) = 20\sqrt{\frac{m^2+1}{m}}$. Utilizamos la función derivada para encontrar sus puntos críticos.

$$t(m) = 20\sqrt{\frac{m^2+1}{m}} = 20\sqrt{m+m^{-1}} \Rightarrow t'(m) = 20 \frac{1-m^{-2}}{2\sqrt{m+m^{-1}}} = 10 \frac{1-\frac{1}{m^2}}{\sqrt{m+m^{-1}}}$$

$$t'(m) = 0 \Rightarrow 10 \frac{1-\frac{1}{m^2}}{\sqrt{m+m^{-1}}} = 0 \Rightarrow 1 - \frac{1}{m^2} = 0 \Rightarrow \frac{1}{m^2} = 1 \Rightarrow m^2 = 1 \Rightarrow \boxed{m = \sqrt{1} = 1}$$

Estudiamos la evolución de la derivada antes y después de $m = 1$.

- Antes de $m = 1$ consideramos $m = 0.9$ y $t'(0.9) = 10 \frac{1-\frac{1}{0.9^2}}{\sqrt{0.9+0.9^{-1}}} = -1.65 < 0$. La función decrece antes de $m = 1$.
- Después de $m = 1$ consideramos $m = 1.1$ y $t'(1.1) = 10 \frac{1-\frac{1}{1.1^2}}{\sqrt{1.1+1.1^{-1}}} = 1.22 > 0$. La función crece después de $m = 1$.

Como el tiempo decrece antes y crece después tenemos un mínimo en $m = 1$.

La pendiente m que hace mínimo el tiempo de recorrido de un camión es $m = 1$. Una pendiente de 45° .

3. Sean r y s dos rectas perpendiculares que se cortan. La recta r viene dada por las ecuaciones

$$r: \frac{x-1}{2} = y+1 = -z+2. \text{ Calcula:}$$

- a) Un vector director $\vec{v}_1$ de r . (0.75 puntos)
- b) Un vector director $\vec{v}_2$ de s sabiendo que $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2$ es proporcional al vector $(1, 0, 2)$. (1 punto)
- c) Las ecuaciones del plano π que contiene ambas rectas. (0.75 puntos)

a) Hallamos un vector director y un punto de la recta r .

$$r: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{-1} \Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_1 = (2, 1, -1) \\ P_r(1, -1, 2) \end{cases}$$

b) Las rectas r y s son perpendiculares por lo que el producto escalar de sus vectores directores es nulo $\Rightarrow \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0$.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0 \\ \vec{v}_1 = (2, 1, -1) \\ \vec{v}_2 = (a, b, c) \end{array} \right\} \Rightarrow (2, 1, -1)(a, b, c) = 0 \Rightarrow 2a + b - c = 0 \Rightarrow b = c - 2a \Rightarrow \vec{v}_2 = (a, c - 2a, c)$$

Determinamos la expresión del producto vectorial $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2$.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_1 = (2, 1, -1) \\ \vec{v}_2 = (a, c - 2a, c) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & -1 \\ a & c - 2a & c \end{vmatrix} = ci - aj + 2(c - 2a)k - ak - 2cj + (c - 2a)i$$

$$\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = (c + c - 2a)i + (-a - 2c)j + (2c - 4a - a)k = (2c - 2a)i + (-a - 2c)j + (2c - 5a)k$$

El producto vectorial es $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = (2c - 2a, -a - 2c, 2c - 5a)$. Además, $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2$ es proporcional al vector $(1, 0, 2)$.

$$\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = (2c - 2a, -a - 2c, 2c - 5a) = k(1, 0, 2) \Rightarrow \begin{cases} 2c - 2a = k \\ -a - 2c = 0 \Rightarrow -a - 2c = 0 \Rightarrow \\ 2c - 5a = 2k \end{cases}$$

$$\Rightarrow a = -2c \Rightarrow \vec{v}_2 = (-2c, c - 2(-2c), c) = (-2c, 5c, c)$$

Si tomamos $c = 1$ tendremos las coordenadas de un vector director de la recta s que cumple lo pedido: $\vec{v}_2 = (-2, 5, 1)$.

c) El plano π que contiene ambas rectas tiene como vectores directores los vectores directores de ambas rectas y pasa por el punto $P_r(1, -1, 2)$ de la recta r .

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} = \vec{v}_1 = (2, 1, -1) \\ \vec{v} = \vec{v}_2 = (-2, 5, 1) \\ P_r(1, -1, 2) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \pi : \begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x-1+2(y+1)+10(z-2)+2(z-2)-2(y+1)+5(x-1)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6(x-1)+12(z-2)=0 \Rightarrow x-1+2(z-2)=0 \Rightarrow \boxed{\pi : x+2z-5=0}$$

La ecuación del plano π que contiene las rectas r y s es $\pi : x+2z-5=0$.

4. En un espacio muestral se tienen dos sucesos independientes: A y B. Se conocen las siguientes probabilidades: $p(A \cap B) = 0.3$ y $p(A/B) = 0.5$. Calcula:

- a) $p(A)$ y $p(B)$. (1 punto)
 b) $p(A \cup B)$ y $p(B/A)$. (1 punto)
 c) La probabilidad de que no ocurra ni el suceso A ni el suceso B. (0.5 puntos)

a)

$$p(A/B) = 0.5 \Rightarrow \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = 0.5 \Rightarrow \{p(A \cap B) = 0.3\} \Rightarrow \frac{0.3}{p(B)} = 0.5 \Rightarrow p(B) = \frac{0.3}{0.5} = 0.6$$

Como los sucesos A y B son independientes se cumple $p(A \cap B) = p(A)p(B)$.

$$\left. \begin{array}{l} p(A \cap B) = p(A)p(B) \\ p(A \cap B) = 0.3 \\ p(B) = 0.6 \end{array} \right\} \Rightarrow 0.3 = p(A) \cdot 0.6 \Rightarrow p(A) = \frac{0.3}{0.6} = 0.5$$

b) Hallamos la probabilidad de la unión de los dos sucesos.

$$\left. \begin{array}{l} p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) \\ p(A) = 0.5 \\ p(B) = 0.6 \\ p(A \cap B) = 0.3 \end{array} \right\} \Rightarrow p(A \cup B) = 0.5 + 0.6 - 0.3 = 0.8$$

Determinamos el valor de $p(B/A)$.

$$p(B/A) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)} = \frac{0.3}{0.5} = 0.6$$

c) Nos piden calcular $p(\bar{A} \cap \bar{B})$. Utilizamos una de las leyes de Morgan.

$$p(\bar{A} \cap \bar{B}) = p(\overline{A \cup B}) = 1 - p(A \cup B) = 1 - 0.8 = 0.2$$

OPCIÓN B**1.** Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- a) Calcula, si existe, la inversa de B. (1 punto)
 b) Determina, si existe, la matriz X que verifica la relación $AXB = C$. (1.5 puntos)

a) Comprobamos que existe la inversa de B viendo que su determinante es no nulo.

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 + 0 + 0 + 1 - 0 - 1 = -1 \neq 0$$

Existe la inversa y la calculamos.

$$B^{-1} = \frac{\text{Adj}(B^t)}{|B|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}}{-1} = - \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = - \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

b) Comprobamos que la matriz A tiene inversa: $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$.

Existe la inversa de A. La calculamos.

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^t)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Despejamos X de la ecuación matricial: $AXB = C \Rightarrow X = A^{-1}CB^{-1}$.
 Determinamos la expresión de la matriz X.

$$X = A^{-1}CB^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+3 & 2+0 & 0-6 \\ 0-1 & 0+0 & 0+2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} =$$

$2 \times \boxed{2 \cdot 2} \times 3 \longrightarrow 2 \times 3$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 2 & -6 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8-2-6 & 4+0-6 & -4+2+6 \\ -2+0+2 & -1+0+2 & 1+0-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$2 \times \boxed{3} \cdot 3 \longrightarrow 2 \times 3$$

La matriz X solución de la ecuación matricial $AXB = C$ tiene la expresión $X = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

2. Dada la función $f(x) = \frac{1}{x^2 + x - 6}$

- a) Estudia su dominio de definición y calcula sus asíntotas. (0.75 puntos)
 b) Estudia sus máximos, mínimos y puntos de inflexión. (0.75 puntos)
 c) Calcula una primitiva de la función $f(x)$. (1 punto)

- a) Es una función racional y su dominio son todos los reales menos los valores que anulan el denominador.

$$x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(1)(-6)}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2} = \begin{cases} \frac{-1+5}{2} = 2 \\ \frac{-1-5}{2} = -3 \end{cases}$$

El dominio de la función es $\mathbb{R} - \{-3, 2\}$.

Asíntotas verticales. $x = a$

¿ $x = -3$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{1}{x^2 + x - 6} = \frac{1}{(-3)^2 - 3 - 6} = \frac{1}{0} = \infty$$

$x = -3$ es asíntota vertical.

¿ $x = 2$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x^2 + x - 6} = \frac{1}{2^2 + 2 - 6} = \frac{1}{0} = \infty$$

$x = 2$ es asíntota vertical.

Asíntota horizontal. $y = b$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2 + x - 6} = \frac{1}{\infty} = 0$$

La asíntota horizontal es $y = 0$.

Asíntota oblicua. $y = mx + n$

No existe pues existe asíntota horizontal.

- b) Buscamos los puntos críticos de la función.

$$f'(x) = \frac{0 \cdot (x^2 + x - 6) - 1 \cdot (2x + 1)}{(x^2 + x - 6)^2} = \frac{-2x - 1}{(x^2 + x - 6)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-2x - 1}{(x^2 + x - 6)^2} = 0 \Rightarrow -2x - 1 = 0 \Rightarrow 2x = -1 \Rightarrow x = \boxed{\frac{-1}{2}}$$

Sustituimos este valor en la segunda derivada.

$$f'(x) = \frac{-2x - 1}{(x^2 + x - 6)^2} \Rightarrow f''(x) = \frac{-2(x^2 + x - 6)^2 - (-2x - 1)2(x^2 + x - 6)(2x + 1)}{(x^2 + x - 6)^4} =$$

$$= \frac{-2(x^2 + x - 6) - (-2x - 1)2(2x + 1)}{(x^2 + x - 6)^3} = \frac{-2x^2 - 2x + 12 - 2(-4x^2 - 1 - 2x - 2x)}{(x^2 + x - 6)^3} =$$

$$= \frac{-2x^2 - 2x + 12 + 8x^2 + 2 + 4x + 4x}{(x^2 + x - 6)^3} = \frac{6x^2 + 6x + 14}{(x^2 + x - 6)^3} = \frac{2(3x^2 + 3x + 7)}{(x^2 + x - 6)^3}$$

$$f''(x) = \frac{2(3x^2 + 3x + 7)}{(x^2 + x - 6)^3} \Rightarrow f''\left(\frac{-1}{2}\right) = \frac{2\left(3\left(\frac{-1}{2}\right)^2 - \frac{3}{2} + 7\right)}{\left(\left(\frac{-1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} - 6\right)^3} = -0.0512 < 0$$

Como la segunda derivada es negativa la función tiene un máximo en $x = \frac{-1}{2}$.

Como $f\left(\frac{-1}{2}\right) = \frac{1}{\left(\frac{-1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} - 6} = \frac{-4}{25}$ las coordenadas del máximo relativo son $\left(\frac{-1}{2}, \frac{-4}{25}\right)$.

Para encontrar los posibles puntos de inflexión buscamos cuando se anula la derivada segunda.

$$f''(x) = 0 \Rightarrow f''(x) = \frac{2(3x^2 + 3x + 7)}{(x^2 + x - 6)^3} = 0 \Rightarrow 3x^2 + 3x + 7 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 84}}{6} = \frac{-3 \pm \sqrt{-75}}{2} = \text{No existe}$$

La función no tiene puntos de inflexión.

- c) Hallamos la integral de la función usando el método de descomposición en fracciones simples.

$$F(x) = \int f(x) dx = \int \frac{1}{x^2 + x - 6} dx = \dots$$

$$\frac{1}{x^2 + x - 6} = \frac{1}{(x+3)(x-2)} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-2} \Rightarrow \frac{1}{(x+3)(x-2)} = \frac{A(x-2) + B(x+3)}{(x+3)(x-2)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 = A(x-2) + B(x+3) \Rightarrow \begin{cases} x=2 \rightarrow 1 = 5B \rightarrow B = \frac{1}{5} \\ x=-3 \rightarrow 1 = -5A \rightarrow A = -\frac{1}{5} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{x^2 + x - 6} = \frac{-1/5}{x+3} + \frac{1/5}{x-2}$$

$$\dots = \int \frac{-1/5}{x+3} dx + \int \frac{1/5}{x-2} dx = \frac{-1}{5} \int \frac{1}{x+3} dx + \frac{1}{5} \int \frac{1}{x-2} dx = \left[\frac{-1}{5} \ln|x+3| + \frac{1}{5} \ln|x-2| + K \right]$$

3. Dado la recta $r: \begin{cases} y=1 \\ z=0 \end{cases}$, el punto $Q(1, 1, 1)$ y un plano π .

a) Calcula el punto P de la recta r que verifica $d(P, Q) = 1$ u. (1.25 puntos)

b) Se sabe que $Q \in \pi$ y que $d(P, Q) = d(P, \pi)$. Determina la ecuación del plano π . (1.25 puntos)

a) Un punto P de la recta $r: \begin{cases} y=1 \\ z=0 \end{cases}$ tiene coordenadas $P(a, 1, 0)$.

La distancia de P a Q es el módulo del vector $\overrightarrow{PQ}$.

$$\overrightarrow{PQ} = (1, 1, 1) - (a, 1, 0) = (1-a, 0, 1)$$

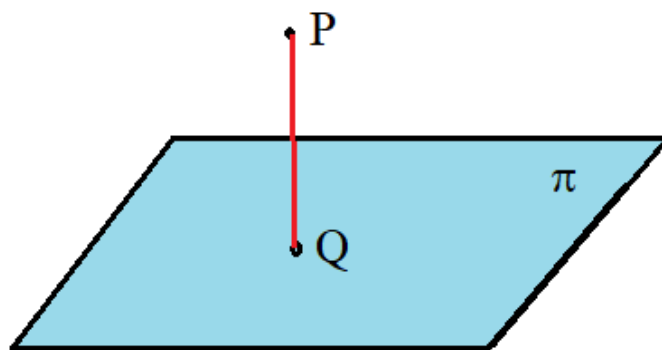
$$d(P, Q) = |\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{(1-a)^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{(1-a)^2 + 1}$$

Averiguamos cuando esta distancia vale 1 unidad.

$$d(P, Q) = 1 \Rightarrow \sqrt{(1-a)^2 + 1} = 1 \Rightarrow (1-a)^2 + 1 = 1 \Rightarrow (1-a)^2 = 0 \Rightarrow \boxed{a=1}$$

El punto P buscado tiene coordenadas $P(1, 1, 0)$.

b) Nos dicen que $d(P, Q) = d(P, \pi)$, por lo que el vector $\overrightarrow{PQ}$ es perpendicular al plano.



Hallamos la ecuación del plano π que contiene el punto Q y con vector normal $\overrightarrow{PQ}$.

$$\overrightarrow{PQ} = (1, 1, 1) - (1, 1, 0) = (0, 0, 1)$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{n} = \overrightarrow{PQ} = (0, 0, 1) \\ Q(1, 1, 1) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \pi: z + D = 0 \\ Q(1, 1, 1) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow 1 + D = 0 \Rightarrow D = -1 \Rightarrow \boxed{\pi: z - 1 = 0}$$

El plano buscado tiene ecuación $\pi: z - 1 = 0$.

4. En la siguiente tabla se muestra la distribución de un grupo de personas en relación al consumo de tabaco:

	Fumador	No fumador
Hombres	10	30
Mujeres	20	40

Se elige en ese grupo una persona al azar. Calcula las probabilidades de los siguientes sucesos diferentes:

- a) Sea fumador. (0.5 puntos)
 b) Sabiendo que es fumador, se trate de una mujer. (1 punto)
 c) Se extrae una segunda persona al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que una fume y la otra no? (1 punto)

Completamos la tabla.

	Fumador	No fumador	
Hombres	10	30	40
Mujeres	20	40	60
TOTALES	30	70	100

- a) Hay 100 personas y de ellas 30 son fumadores. Aplicando la regla de Laplace tenemos que la probabilidad de que al elegir una persona esta sea fumadora es $\frac{30}{100} = 0.3$.

- b) Hay 30 fumadores y de ellos 20 son mujeres. Aplicando la regla de Laplace tenemos que la probabilidad de que al elegir un fumador este sea mujer es $\frac{20}{30} = \frac{2}{3} \approx 0.666$.

- c) La probabilidad de que la primera persona sea fumadora es de $\frac{30}{100}$. Una vez elegida esa persona quedan 99 personas en el grupo siendo 70 los no fumadores, la probabilidad de que la segunda persona no sea fumadora vale $\frac{70}{99}$. La probabilidad de que la primera persona elegida sea fumadora y la segunda no lo sea es el producto de las probabilidades: $\frac{30}{100} \cdot \frac{70}{99} = \frac{7}{33}$.

La probabilidad de que la primera persona no sea fumadora es de $\frac{70}{100}$. Una vez elegida esa persona quedan 99 personas en el grupo siendo 30 los fumadores, la probabilidad de que la segunda persona sea fumadora vale $\frac{30}{99}$. La probabilidad de que la primera persona no sea fumadora y la segunda si lo sea es el producto de las probabilidades: $\frac{70}{100} \cdot \frac{30}{99} = \frac{7}{33}$.

La probabilidad de que una de las personas sea fumadora y la otra no es la suma de las dos probabilidades obtenidas: $\frac{7}{33} + \frac{7}{33} = \frac{14}{33} \approx 0.4242$.