



**PRUEBA DE EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL
ACCESO A LA UNIVERSIDAD Y PRUEBAS DE ADMISIÓN
ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS
CURSO 2023-2024**

**MATEMÁTICAS
APLICADAS A LAS
CIENCIAS SOCIALES II**

- Instrucciones:**
- a) Duración: 1 hora y 30 minutos
 - b) Elija un único ejercicio de cada bloque. En caso de responder a dos ejercicios de un mismo bloque, se corregirá solo el que aparezca en primer lugar.
 - c) En cada ejercicio, parte o apartado se indica la puntuación máxima asignada.
 - d) Todos los resultados deben estar suficientemente justificados.
 - e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. Si obtiene resultados directamente con la calculadora, explique con detalle los pasos necesarios para su obtención sin el uso de la misma.

BLOQUE A

EJERCICIO 1

Se consideran las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- a) **(1 punto)** Determine las matrices X e Y que satisfacen simultáneamente las ecuaciones
- $$2 \cdot X - Y = 4 \cdot A \quad X + Y = B$$

- b) **(0.75 puntos)** Calcule la matriz C^{2024} .

- c) **(0.75 puntos)** Si D es una matriz de dimensión 2×3 , razone si las siguientes operaciones se pueden realizar y, en aquellos casos en los que sea posible, indique la dimensión de la matriz resultante:

$$A^t \cdot B + D \cdot D^t \quad D \cdot B^t + A \quad D^t \cdot A^t + D.$$

EJERCICIO 2

(2.5 puntos) Un joyero desea fabricar dos tipos de pulseras, A y B , y para ello dispone de 50 g de oro, 40 g de platino y 25 g de plata. Para fabricar las del tipo A necesita 1 g de oro y 2 g de platino, mientras que para las del tipo B requiere 2 g de oro, 1 g de platino y 1 g de plata. Cada pulsera del tipo A se vende por 150 € y cada una del tipo B por 200 €. Si se vende toda la producción, ¿cuántas pulseras de cada tipo debe fabricar para maximizar los ingresos y a cuánto ascienden éstos? ¿Qué cantidad de cada metal sobraría cuando se fabrique el número de joyas que proporciona el máximo beneficio?

BLOQUE B

EJERCICIO 3

Se considera la función $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax - 1 & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{b}{x} & \text{si } 1 < x \leq 3 \\ \frac{x-1}{3} & \text{si } x > 3 \end{cases}$ con a y b números reales.

- a) **(1.5 puntos)** Determine los valores de a y b para que f sea continua. Para dichos valores, estudie la derivabilidad de f .
- b) **(1 punto)** Para $a = 5$ y $b = 2$, represente el recinto limitado por la gráfica de f , las rectas $x = 2$, $x = 4$ y el eje OX. Calcule su área.

EJERCICIO 4

Se considera la función

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x^2 + x + 1 & \text{si } x \leq 2 \\ \frac{1}{x-1} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

- a) **(1.5 puntos)** Estudie la continuidad, derivabilidad y monotonía de f . Represente gráficamente dicha función.
- b) **(1 punto)** Calcule el área del recinto limitado por la gráfica de f , las rectas $x = 0$, $x = 4$ y el eje OX.

BLOQUE C

EJERCICIO 5

En cierta localidad el 30% de los habitantes profesan la religión A y el 50% profesan otras religiones diferentes de A. De los que profesan la religión A el 40% son mujeres. De las mujeres el 25% profesa la religión A. Se elige un habitante al azar de esa localidad. Calcule la probabilidad de que:

- a) **(0.5 puntos)** No profese ninguna religión.
- b) **(1 punto)** Sea hombre.
- c) **(1 punto)** Solo verifique uno de los siguientes sucesos: "profesa la religión A"; "es mujer".

EJERCICIO 6

En una empresa, el 30% de los empleados ejercen de economistas y el 25% ejercen de abogados. El 75% de los economistas y el 60% de los abogados ocupan puestos directivos, mientras que, de los empleados que no ejercen ni de economistas ni de abogados, el 15% ocupa un puesto directivo.

Seleccionado un empleado al azar de esta empresa, calcule la probabilidad de que:

- a) **(1.5 puntos)** No ocupe un puesto directivo.
- b) **(1 punto)** Ejercer de economista sabiendo que ocupa un puesto directivo.

BLOQUE D

EJERCICIO 7

En un invernadero de Almería se realiza un estudio sobre dos de sus productos, melones y sandías.

- a) **(1 punto)** De los 4000 melones recolectados en un determinado periodo, 1420 son de la variedad A, 980 de la B, 720 de la C y el resto de la D. Si se selecciona una muestra de 200 de estos melones, ¿cuál debe ser la composición que debe tener dicha muestra si se realiza mediante muestreo aleatorio estratificado con afijación proporcional?
- b) El peso de las sandías sigue una distribución Normal de media 3.85 kg y desviación típica 1.32 kg. Se selecciona, de forma aleatoria, una muestra de 121 sandías.
- b.1) **(0.5 puntos)** Indique la distribución que sigue la media muestral del peso de las sandías.
- b.2) **(1 punto)** Calcule la probabilidad de que el peso medio de la muestra esté comprendido entre 3.6 kg y 4 kg.

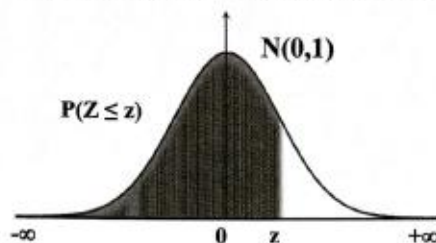
EJERCICIO 8

Una empresa farmacéutica desea revisar la efectividad de un nuevo medicamento antipirético (reduce la fiebre). Se conoce que el tiempo en el que este medicamento comienza a hacer efecto sigue una ley Normal de media desconocida y desviación típica de 5 minutos. Para estimar la media poblacional, se ha seleccionado una muestra aleatoria de 10 individuos con fiebre y tras administrarse el medicamento, se han anotado los tiempos en los que comienza a remitir. Los tiempos obtenidos, en minutos, fueron: 20, 25, 30, 35, 35, 20, 20, 25, 30, 30

- a) **(1.5 puntos)** Determine un intervalo, con un nivel de confianza del 98%, para estimar el tiempo medio de respuesta de este medicamento. Según el intervalo obtenido, razone si puede admitirse que el tiempo medio en el que el medicamento comienza a hacer efecto es superior a 35 minutos.

b) (1 punto) Un estudio posterior ha revelado que el tiempo de respuesta a este medicamento sigue una ley Normal de media 27.2 minutos y desviación típica de 5 minutos. Determine la probabilidad de que a un paciente con fiebre que ha ingerido el medicamento no le haya hecho efecto hasta pasados 20 minutos.

FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN NORMAL $N(0,1)$



z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9975	0,9976	0,9977	0,9978	0,9979	0,9980	0,9981	0,9982	0,9983	0,9984
2,9	0,9985	0,9986	0,9987	0,9988	0,9989	0,9990	0,9991	0,9992	0,9993	0,9994
3,0	0,9995	0,9996	0,9997	0,9998	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

Nota: En el interior de la tabla se da la probabilidad de que la variable aleatoria Z , con distribución $N(0,1)$, esté por debajo del valor z .

SOLUCIONES

EJERCICIO 1

Se consideran las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) **(1 punto)** Determine las matrices X e Y que satisfacen simultáneamente las ecuaciones
 $2 \cdot X - Y = 4 \cdot A$ $X + Y = B$

b) **(0.75 puntos)** Calcule la matriz C^{2024} .

c) **(0.75 puntos)** Si D es una matriz de dimensión 2×3 , razone si las siguientes operaciones se pueden realizar y, en aquellos casos en los que sea posible, indique la dimensión de la matriz resultante:

$$A^t \cdot B + D \cdot D^t \qquad D \cdot B^t + A \qquad D^t \cdot A^t + D.$$

a) Resolvemos el sistema matricial.

$$\left. \begin{matrix} 2 \cdot X - Y = 4 \cdot A \\ X + Y = B \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left. \begin{matrix} 2 \cdot X - Y = 4 \cdot A \\ Y = B - X \end{matrix} \right\} \Rightarrow 2X - B + X = 4A \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3X = 4A + B \Rightarrow X = \frac{1}{3}(4A + B) = \frac{1}{3} \left(4 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Y = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Las matrices solución son $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$

b) Calculamos las primeras potencias de la matriz C en busca de alguna regularidad.

$$C^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1+1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C^3 = C^2 \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2+1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C^4 = C^3 \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3+1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Se observa que el único elemento que cambia es el situado en la segunda fila y primera columna, obteniéndose un valor igual a la potencia calculada. Por ello sabemos que:

$$C^{2024} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2024 & 1 \end{pmatrix}$$

c) Comprobamos la viabilidad de las operaciones indicadas. A , B y C son de dimensión 2×2 y D es de dimensión 2×3 .

$$\left. \begin{array}{l} A^t \cdot B + \\ 2 \times \boxed{2 \cdot 2} \times 2 \rightarrow 2 \times 2 \\ D \cdot D^t \\ 2 \times \boxed{3 \cdot 3} \times 2 \rightarrow 2 \times 2 \end{array} \right\} \Rightarrow A^t \cdot B + D \cdot D^t \text{ es posible. Es de dimensión } 2 \times 2$$

$D \cdot B^t$
 $2 \times \boxed{3 \cdot 2} \times 2$ No es posible realizar el producto y por tanto la operación $D \cdot B^t + A$ no es posible.

$D^t \cdot A^t$
 $3 \times \boxed{2 \cdot 2} \times 2 \rightarrow 3 \times 2 \left\{ \Rightarrow \begin{array}{l} D^t \cdot A^t + D \\ 3 \times 2 + 2 \times 3 \end{array} \right.$ Es posible realizar el producto, pero no la suma pues no se pueden sumar matrices de distinta dimensión. La operación $D^t \cdot A^t + D$ no es posible.

EJERCICIO 2

(2.5 puntos) Un joyero desea fabricar dos tipos de pulseras, A y B , y para ello dispone de 50 g de oro, 40 g de platino y 25 g de plata. Para fabricar las del tipo A necesita 1 g de oro y 2 g de platino, mientras que para las del tipo B requiere 2 g de oro, 1 g de platino y 1 g de plata. Cada pulsera del tipo A se vende por 150 € y cada una del tipo B por 200 €. Si se vende toda la producción, ¿cuántas pulseras de cada tipo debe fabricar para maximizar los ingresos y a cuánto ascienden éstos? ¿Qué cantidad de cada metal sobrará cuando se fabrique el número de joyas que proporciona el máximo beneficio?

Llamemos x = “número de pulseras A fabricadas”, y = “número de pulseras B fabricadas”.

Realizamos una tabla para obtener las restricciones del problema.

	Gramos de oro	Gramos de platino	Gramos de plata	Beneficio
Nº pulseras A (x)	x	$2x$		$150x$
Nº pulseras B (y)	$2y$	y	y	$200y$
	$x + 2y$	$2x + y$	y	$150x + 200y$

Deseamos maximizar el beneficio que viene expresado como $B(x, y) = 150x + 200y$.

Las restricciones son:

“Dispone de 50 g de oro, 40 g de platino y 25 g de plata” $\rightarrow$

$$x + 2y \leq 50; 2x + y \leq 40; y \leq 25$$

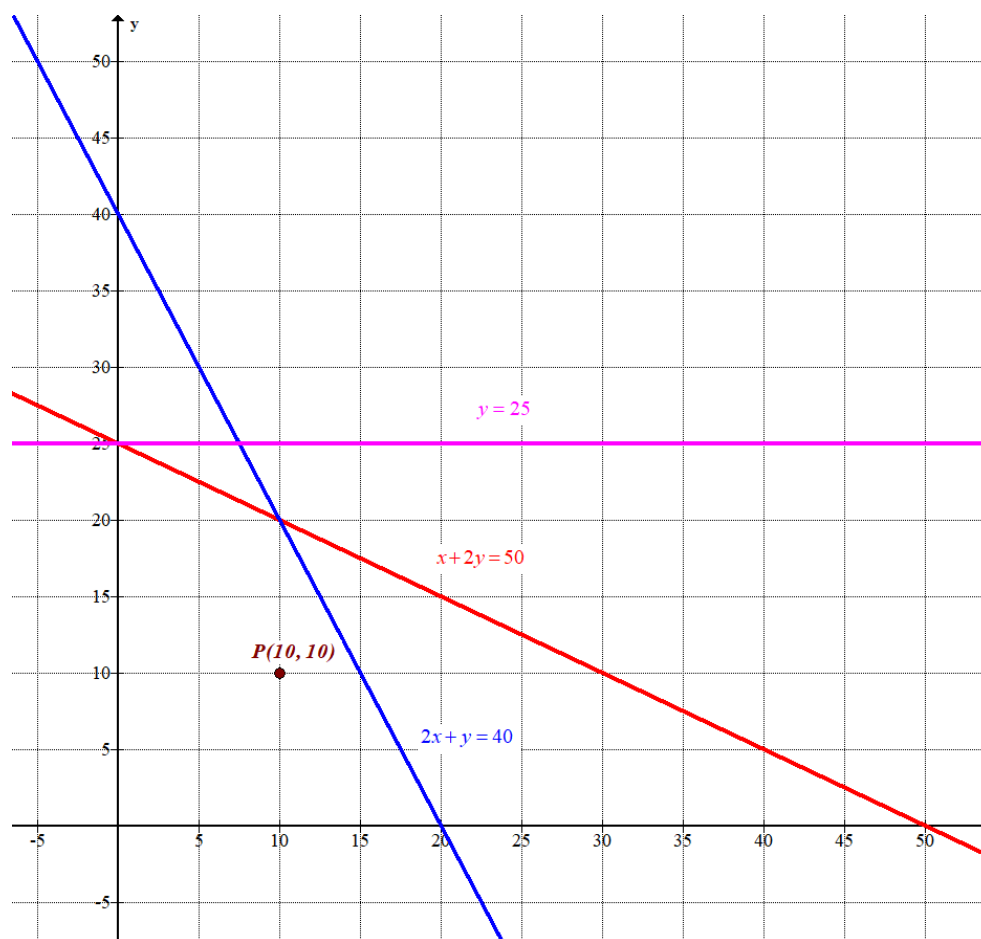
“Las cantidades deben ser positivas” $\rightarrow x \geq 0; y \geq 0$

Reunimos todas las restricciones formando un sistema de inecuaciones.

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y \leq 50 \\ 2x + y \leq 40 \\ y \leq 25 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Dibujamos las rectas asociadas a las inecuaciones y que delimitan la región factible.

$x + 2y = 50$	$2x + y = 40$	$y = 25$	$x \geq 0; y \geq 0$
$x \mid y = \frac{50-x}{2}$ 0 25 10 20 50 0	$x \mid y = 40 - 2x$ 0 40 10 20 20 0	$x \mid y = 25$ 0 25 10 25 20 25	Primer cuadrante

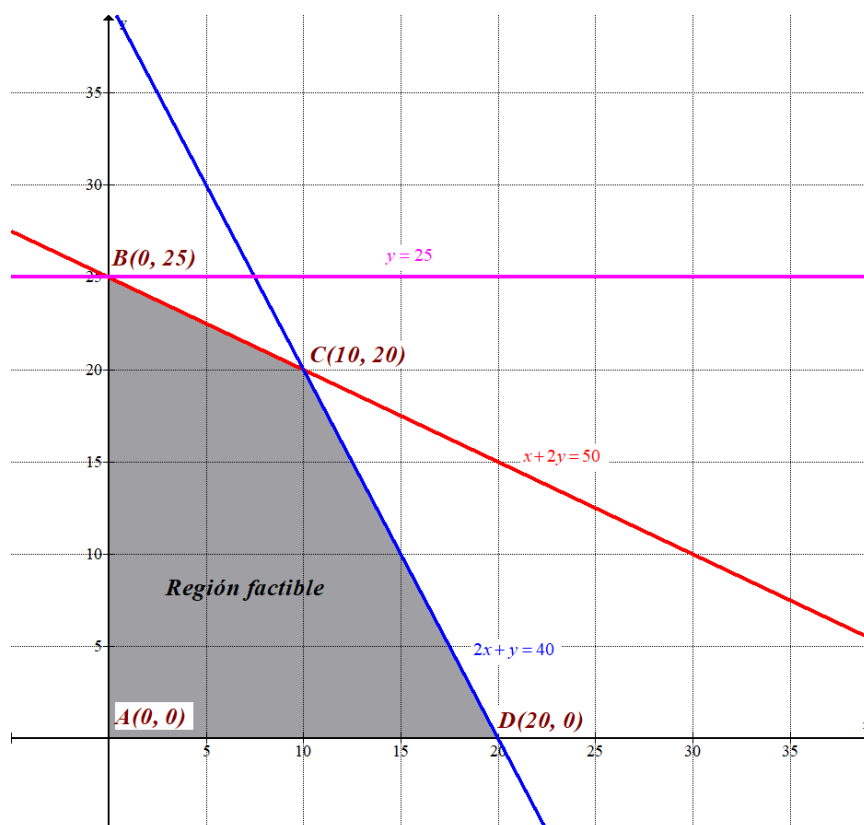


Como las restricciones son
$$\left. \begin{array}{l} x + 2y \leq 50 \\ 2x + y \leq 40 \\ y \leq 25 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \text{ la región factible es la zona del primer cuadrante}$$

situada por debajo de las tres rectas dibujadas. Lo comprobamos viendo si el punto $P(10, 10)$ perteneciente a dicha región cumple todas las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 10 + 20 \leq 50 \\ 20 + 10 \leq 40 \\ 10 \leq 25 \\ 10 \geq 0; 10 \geq 0 \end{array} \right\} \text{ Se cumplen todas}$$

Coloreamos de gris la región factible en el siguiente dibujo.



Valoramos los ingresos $B(x, y) = 150x + 200y$ en cada vértice de la región factible en busca del valor máximo.

$$A(0, 0) \rightarrow B(0, 0) = 0$$

$$B(0, 25) \rightarrow B(0, 25) = 150 \cdot 0 + 200 \cdot 25 = 5000$$

$$C(10, 20) \rightarrow B(10, 20) = 150 \cdot 10 + 200 \cdot 20 = 5500 \text{ ¡Máximo!}$$

$$D(20, 0) \rightarrow B(20, 0) = 150 \cdot 20 + 200 \cdot 0 = 3000$$

El beneficio máximo es de 5500 € y se consiguen en el vértice $C(10, 20)$, que significa fabricar y vender 10 pulseras del tipo A y 20 del tipo B.

¿Qué cantidad de cada metal sobrará cuando se fabrique el número de joyas que proporciona el máximo beneficio?

	Gramos de oro	Gramos de platino	Gramos de plata	Beneficio
Nº pulseras A (10)	10	20		1500
Nº pulseras B (20)	40	20	20	4000
	50	40	20	5500

Como se dispone de 50 g de oro, 40 g de platino y 25 g de plata no sobra oro ni platino y sólo sobran 5 gramos de plata.

EJERCICIO 3

Se considera la función $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax - 1 & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{b}{x} & \text{si } 1 < x \leq 3 \\ \frac{x-1}{3} & \text{si } x > 3 \end{cases}$ con a y b números reales.

- a) **(1.5 puntos)** Determine los valores de a y b para que f sea continua. Para dichos valores, estudie la derivabilidad de f .
 b) **(1 punto)** Para $a = 5$ y $b = 2$, represente el recinto limitado por la gráfica de f , las rectas $x = 2$, $x = 4$ y el eje OX. Calcule su área.

a) Para que la función sea continua debe serlo en $x = 1$ y en $x = 3$.

$$\left. \begin{aligned} f(1) &= 1^2 + a - 1 = a \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 + ax - 1 = a \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{b}{x} = b \\ f(1) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{a = b}$$

$$\left. \begin{aligned} f(3) &= \frac{b}{3} \\ \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{b}{x} = \frac{b}{3} \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x-1}{3} = \frac{3-1}{3} = \frac{2}{3} \\ f(3) &= \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{b}{3} = \frac{2}{3} \Rightarrow \boxed{b = 2}$$

Para que la función sea continua debe ser $a = b = 2$.

Para estos valores la función queda $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 1 & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{2}{x} & \text{si } 1 < x \leq 3 \\ \frac{x-1}{3} & \text{si } x > 3 \end{cases}$. La función es

derivable en $\mathbb{R} - \{1, 3\}$, siendo su derivada $f'(x) = \begin{cases} 2x + 2 & \text{si } x < 1 \\ -\frac{2}{x^2} & \text{si } 1 < x < 3 \\ \frac{1}{3} & \text{si } x > 3 \end{cases}$. Comprobamos si

la función es derivable en $x = 1$ y en $x = 3$.

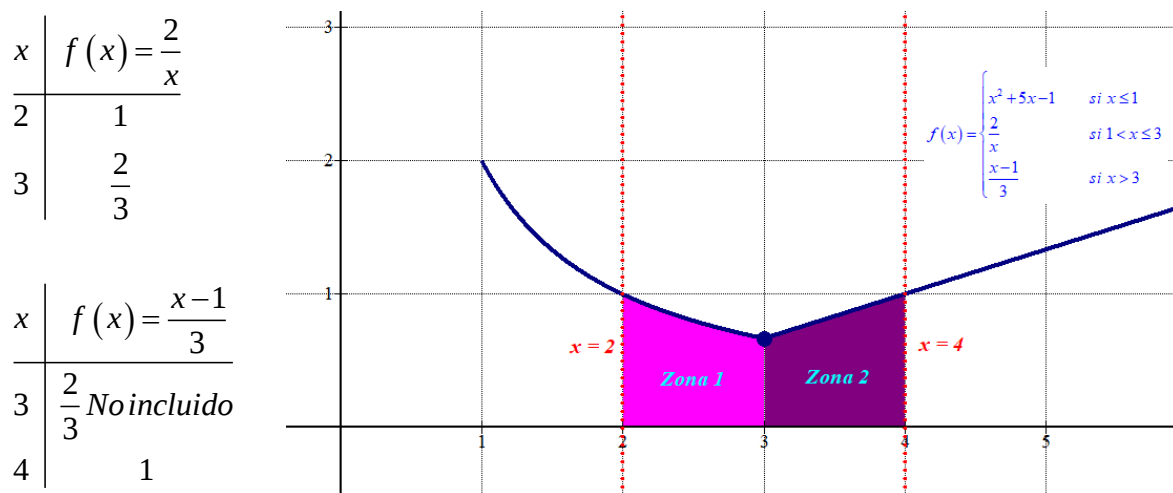
$$\left. \begin{aligned} f'(1^-) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 2x + 2 = 2 + 2 = 4 \\ f'(1^+) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-2}{x^2} = \frac{-2}{1^2} = -2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f'(1^-) = 4 \neq -2 = f'(1^+)$$

$$\left. \begin{aligned} f'(3^-) &= \lim_{x \rightarrow 3^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{-2}{x^2} = \frac{-2}{3^2} = -\frac{2}{9} \\ f'(3^+) &= \lim_{x \rightarrow 3^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \end{aligned} \right\} \Rightarrow f'(3^-) = -\frac{2}{9} \neq \frac{1}{3} = f'(3^+)$$

La función no es derivable ni en $x=1$ ni en $x=3$. La función es derivable en $\mathbb{R} - \{1, 3\}$.

b) Para $a = 5$ y $b = 2$ la función queda $f(x) = \begin{cases} x^2 + 5x - 1 & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{2}{x} & \text{si } 1 < x \leq 3 \\ \frac{x-1}{3} & \text{si } x > 3 \end{cases}$. Entre 2 y 4 la función

cambia de definición dibujamos el recinto dando una tabla de valores.



Calculamos el área de la zona 1.

$$\text{Área 1} = \int_2^3 f(x) dx = \int_2^3 \frac{2}{x} dx = [2 \ln x]_2^3 = 2 \ln 3 - 2 \ln 2 = \ln \frac{9}{4} \approx 0.81 u^2$$

Calculamos el área de la zona 2.

$$\begin{aligned} \text{Área 2} &= \int_3^4 f(x) dx = \int_3^4 \frac{x-1}{3} dx = \frac{1}{3} \int_3^4 (x-1) dx = \frac{1}{3} \left[\frac{x^2}{2} - x \right]_3^4 \\ &= \frac{1}{3} \left(\left[\frac{4^2}{2} - 4 \right] - \left[\frac{3^2}{2} - 3 \right] \right) = \frac{5}{6} \approx 0.833 u^2 \end{aligned}$$

El área del recinto limitado por la gráfica de f , las rectas $x = 2$, $x = 4$ y el eje OX tiene un valor de $\frac{5}{6} + \ln \frac{9}{4} \approx 1.643$ unidades cuadradas.

EJERCICIO 4

Se considera la función

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x^2 + x + 1 & \text{si } x \leq 2 \\ \frac{1}{x-1} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

- a) **(1.5 puntos)** Estudie la continuidad, derivabilidad y monotonía de f . Represente gráficamente dicha función.
 b) **(1 punto)** Calcule el área del recinto limitado por la gráfica de f , las rectas $x = 0$, $x = 4$ y el eje OX.

- a) En el intervalo $(-\infty, 2)$ la función tiene una expresión polinómica que es continua. En el intervalo $(2, +\infty)$ la función tiene una expresión racional cuyo denominador se anula para $x = 1 \notin (2, +\infty)$, por lo que es continua. Estudiamos la continuidad en $x = 2$.

$$\left. \begin{aligned} f(2) &= -\frac{1}{2}2^2 + 2 + 1 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} -\frac{1}{2}x^2 + x + 1 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x-1} = \frac{1}{2-1} = 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2) = 1$$

La función es continua en $x = 2$ y por tanto continua en $\mathbb{R}$.

La función es derivable en $\mathbb{R} - \{2\}$ siendo su derivada $f'(x) = \begin{cases} -x+1 & \text{si } x < 2 \\ \frac{-1}{(x-1)^2} & \text{si } x > 2 \end{cases}$.

Estudiamos la derivabilidad en $x = 2$.

$$\left. \begin{aligned} f'(2^-) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} -x+1 = -2+1 = -1 \\ f'(2^+) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-1}{(x-1)^2} = \frac{-1}{(2-1)^2} = -1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f'(2^-) = f'(2^+) = -1$$

La función es derivable en $x = 2$ y por tanto derivable en $\mathbb{R}$.

Buscamos los puntos críticos de la función averiguando cuando se anula la derivada.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} -x+1=0 \rightarrow x=1 \in (-\infty, 2) \\ \frac{-1}{(x-1)^2} = 0 \text{ ¡No es posible!} \end{cases}$$

El único punto crítico es $x=1$.

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de $x=1$ y $x=2$ (cambio de definición).

- En el intervalo $(-\infty, 1)$ tomamos $x=0$ y la derivada vale $f'(0) = -0+1 = 1 > 0$. La función crece en $(-\infty, 1)$.

- En el intervalo $(1, 2)$ tomamos $x=1.5$ y la derivada vale

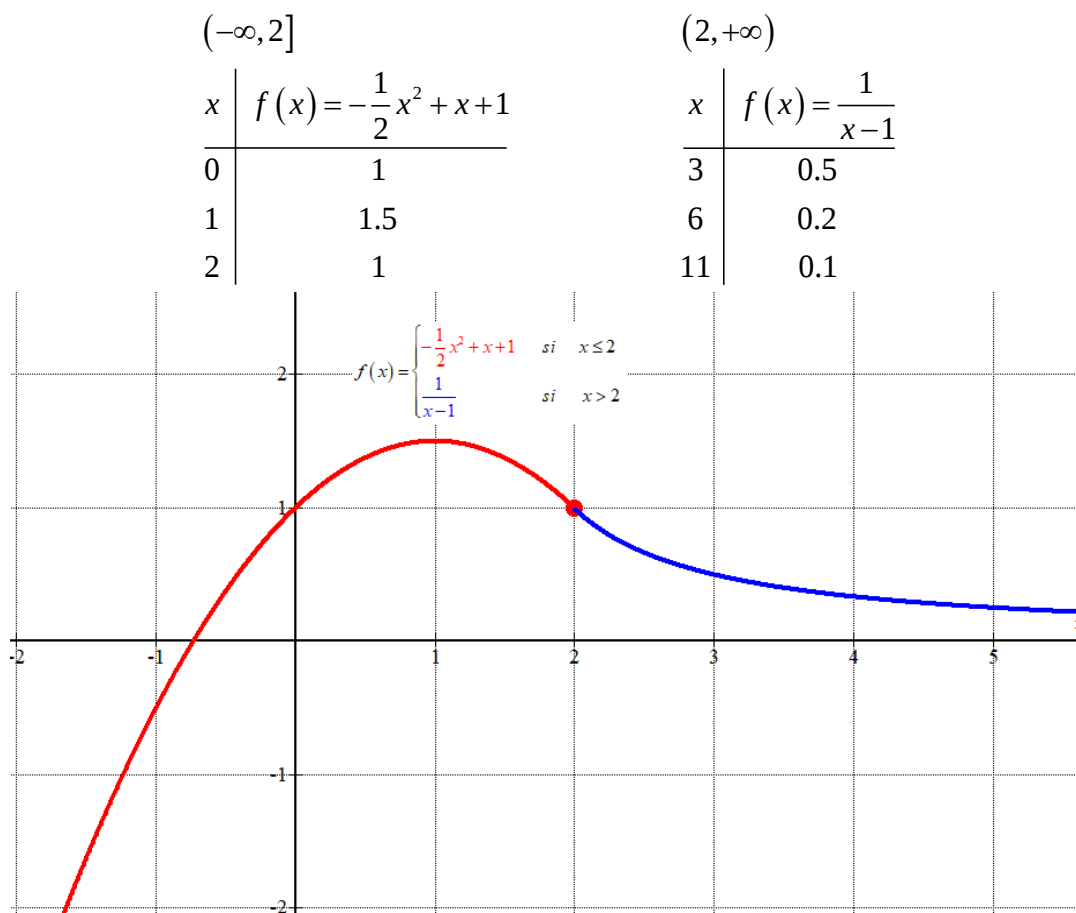
$$f'(1.5) = -1.5 + 1 = -0.5 < 0. \text{ La función decrece en } (1, 2).$$

- En el intervalo $(2, +\infty)$ tomamos $x=3$ y la derivada vale

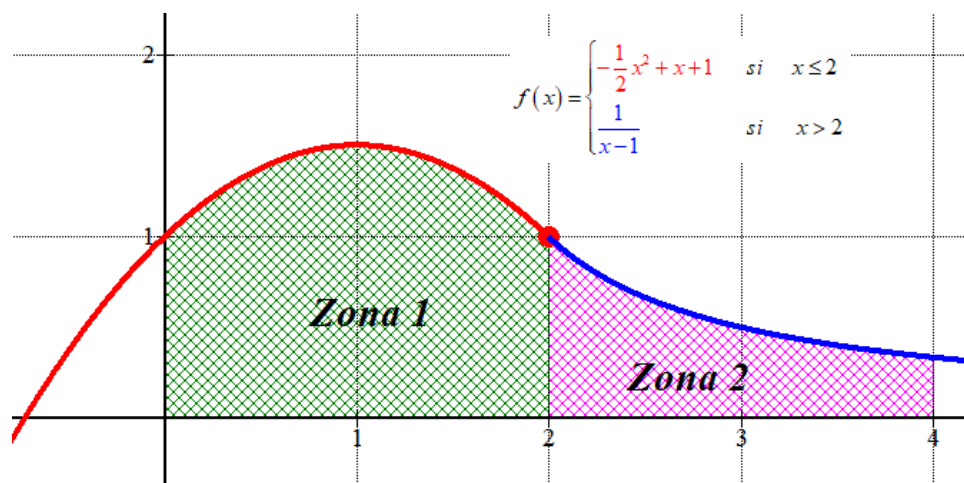
$$f'(3) = \frac{-1}{(3-1)^2} = -0.25 < 0. \text{ La función decrece en } (2, +\infty).$$

La función crece en $(-\infty, 1)$ y decrece en $(1, +\infty)$. La función tiene un máximo relativo en $x=1$.

Obtenemos una tabla de valores y representamos su gráfica.



- b) Entre 0 y 4 la función cambia de signo. Vemos en la gráfica que esta función no corta el eje de abscisas entre 0 y 4. Dibujamos la región de la cual queremos hallar el área.



El área pedida es el valor de la integral definida de la función entre 0 y 4 que separamos en suma de dos integrales definidas por el cambio de definición en $x = 2$.

$$\text{Área} = \int_0^4 f(x) dx = \int_0^2 -\frac{1}{2}x^2 + x + 1 dx + \int_2^4 \frac{1}{x-1} dx = \left[-\frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + x \right]_0^2 + \left[\ln(x-1) \right]_2^4 =$$

$$= \left[-\frac{2^3}{6} + \frac{2^2}{2} + 2 \right] - \left[-\frac{0^3}{6} + \frac{0^2}{2} + 0 \right] + \ln(4-1) - \ln(2-1) = \boxed{\frac{8}{3} + \ln 3 \approx 3.765 u^2}$$

EJERCICIO 5

En cierta localidad el 30% de los habitantes profesan la religión A y el 50% profesan otras religiones diferentes de A. De los que profesan la religión A el 40% son mujeres. De las mujeres el 25% profesa la religión A. Se elige un habitante al azar de esa localidad. Calcule la probabilidad de que:

a) **(0.5 puntos)** No profese ninguna religión.

b) **(1 punto)** Sea hombre.

c) **(1 punto)** Solo verifique uno de los siguientes sucesos: "profesa la religión A"; "es mujer".

Llamamos A al suceso "Profesar la religión A", B a "profesar otras religiones diferentes de A" y M a "ser mujer".

Se nos dice que $P(A) = 0.30$, $P(B) = 0.50$, $P(M/A) = 0.4$ y $P(A/M) = 0.25$.

$$P(M/A) = 0.4 \Rightarrow \frac{P(M \cap A)}{P(A)} = 0.4 \Rightarrow \frac{P(M \cap A)}{0.3} = 0.4 \Rightarrow \boxed{P(M \cap A) = 0.4 \cdot 0.3 = 0.12}$$

$$P(A/M) = 0.25 \Rightarrow \frac{P(A \cap M)}{P(M)} = 0.25 \Rightarrow \frac{0.12}{P(M)} = 0.25 \Rightarrow \boxed{P(M) = \frac{0.12}{0.25} = 0.48}$$

a) Suponemos que una persona no puede profesar dos religiones, por lo que $A \cap B = \emptyset$.

Como el 30% profesa la religión A, el 50% otras religiones diferentes a A nos queda el restante $100 - 30 - 50 = 20\%$ que no profesa ninguna religión. La probabilidad de que no profese ninguna religión es de 0.2.

b) Nos piden calcular $P(M^c)$.

$$P(M^c) = 1 - P(M) = 1 - 0.48 = \boxed{0.52}$$

c) Nos piden calcular $P((A \cap M^c) \cup (A^c \cap M))$. Como son dos sucesos sin nada en común la probabilidad pedida es la suma de las probabilidades de cada suceso.

$$\begin{aligned} P((A \cap M^c) \cup (A^c \cap M)) &= P(A \cap M^c) + P(A^c \cap M) = \\ &= [P(A) - P(A \cap M)] + [P(M) - P(A \cap M)] = \\ &= [0.3 - 0.12] + [0.48 - 0.12] = \boxed{0.54} \end{aligned}$$

OTRA FORMA DE RESOLVERLO

Que solo verifique uno de los siguientes sucesos: "profesa la religión A"; "es mujer" es lo mismo que profese la religión A o sea mujer exceptuando que sea mujer que profese la religión A.

$$\begin{aligned} P(A \cup M) - P(A \cap M) &= P(A) + P(M) - P(A \cap M) - P(A \cap M) = \\ &= 0.3 + 0.48 - 0.12 - 0.12 = \boxed{0.54} \end{aligned}$$

EJERCICIO 6

En una empresa, el 30% de los empleados ejercen de economistas y el 25% ejercen de abogados. El 75% de los economistas y el 60% de los abogados ocupan puestos directivos, mientras que, de los empleados que no ejercen ni de economistas ni de abogados, el 15% ocupa un puesto directivo.

Seleccionado un empleado al azar de esta empresa, calcule la probabilidad de que:

- a) **(1.5 puntos)** No ocupe un puesto directivo.
 b) **(1 punto)** Ejercer de economista sabiendo que ocupa un puesto directivo.

Como hay un 30% de empleados que son economistas y un 25% de empleados que son abogados el restante $100 - 30 - 25 = 45\%$ no son ni abogados ni economistas.

Realizamos una tabla de contingencia con los datos del problema.

	Economistas	Abogados	Ni abogado ni economista	
Cargo directivo	$0.75 \cdot 30 = 22.5$	$0.6 \cdot 25 = 15$	$0.15 \cdot 45 = 6.75$	
No cargo directivo				
Totales	30	25	45	100

Completamos la tabla.

	Economistas	Abogados	Ni abogado ni economista	
Cargo directivo	22.5	15	6.75	44.25
No cargo directivo				55.75
Totales	30	25	45	100

- a) Hay un 55.75% de empleados que no ocupan puesto directivo. La probabilidad de que al elegir un empleado no ocupe un puesto directivo es de 0.5575.
- b) Hay un 44.25 % de los empleados que ocupan un puesto directivo de estos el 22.5% son economistas. La probabilidad de que al elegir un trabajador que ocupa un puesto directivo este sea economista es de $\frac{22.5}{44.25} = \frac{30}{59} \approx 0.5085$.

EJERCICIO 7

En un invernadero de Almería se realiza un estudio sobre dos de sus productos, melones y sandías.

a) **(1 punto)** De los 4000 melones recolectados en un determinado periodo, 1420 son de la variedad A, 980 de la B, 720 de la C y el resto de la D. Si se selecciona una muestra de 200 de estos melones, ¿cuál debe ser la composición que debe tener dicha muestra si se realiza mediante muestreo aleatorio estratificado con afijación proporcional?

b) El peso de las sandías sigue una distribución Normal de media 3.85 kg y desviación típica 1.32 kg. Se selecciona, de forma aleatoria, una muestra de 121 sandías.

b.1) **(0.5 puntos)** Indique la distribución que sigue la media muestral del peso de las sandías.

b.2) **(1 punto)** Calcule la probabilidad de que el peso medio de la muestra esté comprendido entre 3.6 kg y 4 kg.

a) El tamaño total de la muestra es 200. Llamamos n_1 al tamaño de la muestra en el estrato de la variedad A, n_2 al tamaño de la muestra en el estrato de la variedad B, n_3 al tamaño de la muestra en el estrato de la variedad C y n_4 al tamaño de la muestra en el estrato de la variedad D.

$$\frac{200}{4000} = \frac{n_1}{1420} = \frac{n_2}{980} = \frac{n_3}{720} = \frac{n_4}{4000 - 1420 - 980 - 720}$$

De esta expresión vamos separando por parejas y determinando el tamaño correspondiente a cada estrato.

$$\frac{200}{4000} = \frac{n_1}{1420} \Rightarrow n_1 = \frac{200 \cdot 1420}{4000} = 71$$

$$\frac{200}{4000} = \frac{n_2}{980} \Rightarrow n_2 = \frac{200 \cdot 980}{4000} = 49$$

$$\frac{200}{4000} = \frac{n_3}{720} \Rightarrow n_3 = \frac{200 \cdot 720}{4000} = 36$$

$$\frac{200}{4000} = \frac{n_4}{880} \Rightarrow n_4 = \frac{200 \cdot 880}{4000} = 44$$

Deben elegirse 71 melones A, 49 melones B, 36 melones C y 44 melones D.

b) Sea X = El peso de las sandías en kg. $X = N(3.85, 1.32)$.

b.1) La media muestral sigue una distribución normal que tiene la misma media, pero su desviación típica es $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

$$\overline{X}_{121} = N\left(3.85, \frac{1.32}{\sqrt{121}}\right) \Rightarrow \overline{X}_{121} = N(3.85, 0.12)$$

b.2) Nos piden determinar el valor de $P(3.6 \leq \overline{X}_{121} \leq 4)$.

$$\begin{aligned} P(3.6 \leq \overline{X}_{121} \leq 4) &= \left\{ \begin{array}{l} \text{Tipificamos} \\ Z = \frac{X - 3.85}{0.12} \end{array} \right\} = P\left(\frac{3.6 - 3.85}{0.12} \leq Z \leq \frac{4 - 3.85}{0.12}\right) = \\ &= P(-2.08333 \leq Z \leq 1.25) = P(Z \leq 1.25) - P(Z \leq -2.08333) = \end{aligned}$$

$$= P(Z \leq 1.25) - P(Z \geq 2.08333) = P(Z \leq 1.25) - [1 - P(Z \leq 2.08333)] =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = 0.8944 - [1 - 0.9812] = \boxed{0.8756}$$

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7853
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8829
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9858
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890

La probabilidad de que el peso medio de la muestra esté comprendido entre 3.6 kg y 4 kg es de 0.8756

EJERCICIO 8

Una empresa farmacéutica desea revisar la efectividad de un nuevo medicamento antipirético (reduce la fiebre). Se conoce que el tiempo en el que este medicamento comienza a hacer efecto sigue una ley Normal de media desconocida y desviación típica de 5 minutos. Para estimar la media poblacional, se ha seleccionado una muestra aleatoria de 10 individuos con fiebre y tras administrarse el medicamento, se han anotado los tiempos en los que comienza a remitir. Los tiempos obtenidos, en minutos, fueron: 20, 25, 30, 35, 35, 20, 20, 25, 30, 30

a) **(1.5 puntos)** Determine un intervalo, con un nivel de confianza del 98%, para estimar el tiempo medio de respuesta de este medicamento. Según el intervalo obtenido, razone si puede admitirse que el tiempo medio en el que el medicamento comienza a hacer efecto es superior a 35 minutos.

b) **(1 punto)** Un estudio posterior ha revelado que el tiempo de respuesta a este medicamento sigue una ley Normal de media 27.2 minutos y desviación típica de 5 minutos. Determine la probabilidad de que a un paciente con fiebre que ha ingerido el medicamento no le haya hecho efecto hasta pasados 20 minutos.

X = El tiempo en el que este medicamento comienza a hacer efecto en minutos.

$X = N(\mu, 5)$

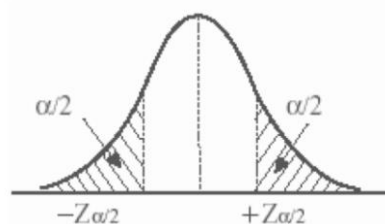
a) Determinamos la media muestral.

$$\bar{x} = \frac{20 + 25 + 30 + 35 + 35 + 20 + 20 + 25 + 30 + 30}{10} = \frac{3 \cdot 20 + 2 \cdot 25 + 3 \cdot 30 + 2 \cdot 35}{10} = 27 \text{ minutos}$$

Con un nivel de confianza del 98% determinamos el valor de $z_{\alpha/2}$

$$1 - \alpha = 0.98 \rightarrow \alpha = 0.02 \rightarrow \alpha/2 = 0.01 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.99 \rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{2.32 + 2.33}{2} = 2.325$$

z	0,00	0,01	0,02	0,03
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943



Determinamos el error del intervalo de confianza.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.325 \cdot \frac{5}{\sqrt{10}} \approx 3.676 \text{ minutos}$$

El intervalo de confianza es:

$$(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error) = (27 - 3.676, 27 + 3.676) = (23.324, 30.676)$$

Según el intervalo obtenido, razone si puede admitirse que el tiempo medio en el que el medicamento comienza a hacer efecto es superior a 35 minutos.

35 minutos no está dentro del intervalo de confianza obtenido, por lo que no debe admitirse este tiempo que tarda en hacer efecto un medicamento.

b) X = El tiempo en el que este medicamento comienza a hacer efecto en minutos.

$X \sim N(27.2, 5)$

Nos piden calcular $P(X \geq 20)$.

$$P(X \geq 20) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Tipificamos} \\ Z = \frac{X - 27.2}{5} \end{array} \right\} = P\left(Z \geq \frac{20 - 27.2}{5}\right) = P(Z \geq -1.44) =$$

$$= P(Z \leq 1.44) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = \boxed{0.9251}$$

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7421
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8529
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8943
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394