



Universidad de Oviedo
Universidá d'Uviéu
University of Oviedo

Prueba de evaluación de Bachillerato para el
acceso a la Universidad (EBAU)
Curso 2017-2018

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

El examen presenta dos opciones: A y B. Elige una de ellas y responde **razonadamente** a los cuatro ejercicios de que consta dicha opción.

OPCIÓN A

1. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & m \\ -m-1 & 3m \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \end{pmatrix}$.

- a) [1 punto] Si $A \cdot B = C$, plantea un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas (representadas por x e y) en función del parámetro m .
b) [2 puntos] ¿Para qué valores de m el sistema anterior tiene solución? En caso de existir solución, ¿es siempre única? Resuelve el sistema para $m = 1$.

2. La cotización de las acciones (en euros) de una determinada sociedad suponiendo que la bolsa funcionó de continuo todos los días de un mes de 30 días, respondió a la siguiente ley:

$$f(x) = \frac{x^3 - 45x^2 + 243x + 30000}{100}, \text{ con } 0 \leq x \leq 30.$$

donde x representa el tiempo (en días)

- a) [1,5 puntos] Determina el periodo de tiempo en el que la cotización descendió. ¿En qué momento la cotización fue máxima? ¿A cuánto ascendió dicha cotización? ¿En qué momento la cotización fue mínima?
b) [1,5 puntos] Estudia y representa gráficamente la función f en el intervalo $[0, 30]$.

3. En un determinado banco, el 90% de los clientes tienen fondos. De ellos, el 40% tiene talonario de cheques. En cambio, entre los clientes sin fondos, el porcentaje de ellos que tienen talonario de cheques pasa a ser del 100%. Si se elige un cliente al azar:

- a) [1 punto] ¿Cuál es la probabilidad de que tenga fondos y talonario de cheques?
b) [1 punto] ¿Cuál es la probabilidad de que tenga talonario de cheques?

4. Para estimar la altura media de los hombres de un país, se considera una muestra aleatoria de 1600 hombres para la que se obtiene que la estatura media es de 180,3 cm. Se supone además que la estatura sigue aproximadamente una distribución normal con desviación típica 4 cm.

- a) [1 punto] Construye un intervalo de confianza para la altura media de los hombres de ese país, al 95% de confianza.
b) [1 punto] ¿Cuál sería el tamaño muestral mínimo necesario para estimar la verdadera altura media de los hombres a partir de la media muestral con un error de estimación máximo de 1 cm y un nivel de confianza del 95%?

(Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1: $F(1,28) = 0,90$; $F(1,64) = 0,95$; $F(1,96) = 0,975$; $F(2,33) = 0,99$; $F(2,58) = 0,995$.)



Universidad de Oviedo
Universidá d'Uviéu
University of Oviedo

Prueba de evaluación de Bachillerato para el
acceso a la Universidad (EBAU)
Curso 2017-2018

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

El examen presenta dos opciones: A y B. Elige una de ellas y responde razonadamente a los cuatro ejercicios de que consta dicha opción.

OPCIÓN B

1. Una empresa fabrica dos tipos de lápices. En la producción diaria se sabe que: el número de lápices de tipo B producidos supera como mucho en 500 unidades a los de tipo A; entre los dos tipos no superan las 2000 unidades y de tipo B se producen al menos 500 unidades.

- a) [2 puntos] ¿Cuántos lápices de cada tipo puede producir al día? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Podría producir 1000 lápices de tipo A y 600 de tipo B?
- b) [1 punto] El coste de fabricación de cada lápiz de tipo A es de 0,25 euros y el de cada lápiz de tipo B es de 0,2 euros. ¿Cuántos lápices de cada tipo debe producir para minimizar el coste total de fabricación? ¿a cuánto asciende dicho coste mínimo?

2. Dada la función $f(x) = 4x^3 - 36x$, se pide:

- a) [0,75 puntos] Encontrar la primitiva F de f verificando $F(1) = 0$.
- b) [2,25 puntos] Estudiar y representar gráficamente la función f y calcular el área limitada por la curva y el eje X entre $x = -1$ y $x = 1$.

3. En una clase formada por 10 chicos y 10 chicas, el 40% de los chicos tienen francés como asignatura optativa. Además, se sabe que el 5% de la clase son chicas que tienen francés como asignatura optativa.

- a) [1 punto] ¿Qué porcentaje de la clase tiene francés como asignatura optativa?
- b) [1 punto] Dentro del grupo de estudiantes que tiene francés como asignatura optativa, ¿qué porcentaje son chicas?

4. Para estimar la proporción de personas adultas que tienen determinada enfermedad en un país se considera una muestra aleatoria de 1000 adultos de dicho país, de los cuales 100 personas padecen dicha enfermedad.

- a) [1 punto] Halla, con un nivel de confianza del 90%, un intervalo para estimar la proporción de personas que padecen dicha enfermedad en ese país.
- b) [1 punto] En el intervalo anterior, ¿cuánto vale el error de estimación? ¿Qué le ocurriría al error de estimación si, manteniendo el mismo nivel de confianza y la misma proporción muestral, hubiese aumentado el tamaño muestral?

(Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1: $F(1,28) = 0,90$; $F(1,64) = 0,95$; $F(1,96) = 0,975$; $F(2,33) = 0,99$; $F(2,58) = 0,995$.)

SOLUCIONES**OPCIÓN A**

1. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & m \\ -m-1 & 3m \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \end{pmatrix}$.

- a) [1 punto] Si $A \cdot B = C$, plantea un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas (representadas por x e y) en función del parámetro m .
 b) [2 puntos] ¿Para qué valores de m el sistema anterior tiene solución? En caso de existir solución, ¿es siempre única? Resuelve el sistema para $m = 1$.

a) Obtenemos el sistema pedido.

$$A \cdot B = C \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & m \\ -m-1 & 3m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -x + my \\ (-m-1)x + 3my \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -x + my = 4 \\ (-m-1)x + 3my = 12 \end{cases}$$

b) Intentamos resolver el sistema.

$$\begin{cases} -x + my = 4 \\ (-m-1)x + 3my = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} my - 4 = x \\ (-m-1)x + 3my = 12 \end{cases} \Rightarrow (-m-1)(my - 4) + 3my = 12 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -m^2y + 4m - my + 4 + 3my = 12 \Rightarrow -m^2y - my + 3my = 8 - 4m \Rightarrow (-m^2 + 2m)y = 8 - 4m$$

Se puede seguir resolviendo el sistema si $-m^2 + 2m \neq 0$. Averiguamos cuando se anula.

$$-m^2 + 2m = 0 \Rightarrow -m(m - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 2 \end{cases}$$

Para cualquier valor de m distinto de 0 y de 2 podemos seguir resolviendo el sistema y la solución sería única.

Para $m = 0$ vemos como queda el sistema e intentamos resolverlo.

$$\begin{cases} -x = 4 \\ (-1)x = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x = 4 \\ -x = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -4 \\ x = -12 \end{cases} \Rightarrow \text{¡Imposible!}$$

El sistema no tiene solución para $m = 0$.

Para $m = 2$ vemos como queda el sistema e intentamos resolverlo.

$$\begin{cases} -x + 2y = 4 \\ (-2-1)x + 6y = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x + 2y = 4 \\ -3x + 6y = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x + 2y = 4 \\ -x + 2y = 4 \end{cases} \Rightarrow -x + 2y = 4 \Rightarrow \boxed{x = 2y - 4}$$

El sistema tiene infinitas soluciones para $m = 2$.

Resumiendo: Para $m \neq 0$ y $m \neq 2$ el sistema tiene solución, siendo única. Para $m = 2$ el sistema tiene solución, pero no es única. Para $m = 0$ el sistema no tiene solución.

2. La cotización de las acciones (en euros) de una determinada sociedad suponiendo que la bolsa funcionó de continuo todos los días de un mes de 30 días, respondió a la siguiente ley:

$$f(x) = \frac{x^3 - 45x^2 + 243x + 30000}{100}, \text{ con } 0 \leq x \leq 30.$$

donde x representa el tiempo (en días)

- a) [1,5 puntos] Determina el periodo de tiempo en el que la cotización descendió. ¿En qué momento la cotización fue máxima? ¿A cuánto ascendió dicha cotización? ¿En qué momento la cotización fue mínima?
- b) [1,5 puntos] Estudia y representa gráficamente la función f en el intervalo $[0, 30]$.

a) Utilizamos la derivada para encontrar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.

$$f(x) = \frac{x^3 - 45x^2 + 243x + 30000}{100} \Rightarrow f'(x) = \frac{3x^2 - 90x + 243}{100}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{3x^2 - 90x + 243}{100} = 0 \Rightarrow 3x^2 - 90x + 243 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - 30x + 81 = 0 \Rightarrow x = \frac{30 \pm \sqrt{(-30)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 81}}{2} = \frac{30 \pm 24}{2} = \begin{cases} \frac{30+24}{2} = 27 = x \\ \frac{30-24}{2} = 3 = x \end{cases}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos dos valores.

- En el intervalo $[0, 3)$ tomo $x=1$ y la derivada vale $f'(1) = \frac{3 \cdot 1^2 - 90 \cdot 1 + 243}{100} = 1.56 > 0$

. La función crece en $[0, 3)$.

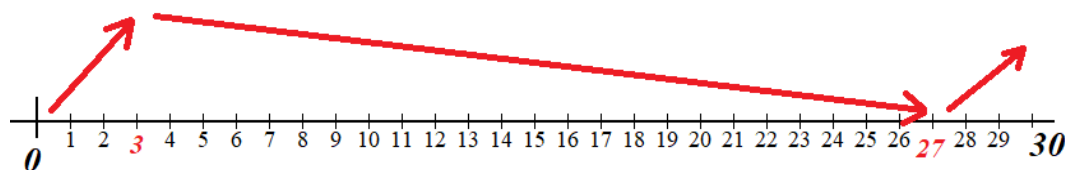
- En el intervalo $(3, 27)$ tomo $x=10$ y la derivada vale

$$f'(10) = \frac{3 \cdot 10^2 - 90 \cdot 10 + 243}{100} = -3.57 < 0. \text{ La función decrece en } (3, 27).$$

- En el intervalo $(27, 30]$ tomo $x=30$ y la derivada vale

$$f'(30) = \frac{3 \cdot 30^2 - 90 \cdot 30 + 243}{100} = 2.43 > 0. \text{ La función crece en } (27, 30].$$

La función sigue el esquema siguiente.



La cotización descendió desde el tercer al vigésimo séptimo día.

Valoramos la cotización en los puntos críticos y en los extremos del intervalo para poder decidir cuando se producen las cotizaciones máxima y mínima.

$$f(0) = \frac{0^3 - 45 \cdot 0^2 + 243 \cdot 0 + 30000}{100} = 300$$

$$f(3) = \frac{3^3 - 45 \cdot 3^2 + 243 \cdot 3 + 30000}{100} = 303.51 \text{ ¡Máximo!}$$

$$f(27) = \frac{27^3 - 45 \cdot 27^2 + 243 \cdot 27 + 30000}{100} = 234.39 \text{ ¡Mínimo!}$$

$$f(30) = \frac{30^3 - 45 \cdot 30^2 + 243 \cdot 30 + 30000}{100} = 237.9$$

La cotización fue máxima el tercer día. La cotización máxima fue de 303.51 €.

La cotización fue mínima el día 27. La cotización mínima fue de 234.39 €.

b) La función $f(x)$ es una función polinómica por lo que es continua en todo su dominio $[0, 30]$.

Hemos visto que la función crece en $[0, 3) \cup (27, 30]$ y decrece en $(3, 27)$.

La función tiene un máximo absoluto en $x = 3$ y un mínimo absoluto en $x = 27$.

Igualemos a cero la segunda derivada en busca de su punto de inflexión.

$$f'(x) = \frac{3x^2 - 90x + 243}{100} \Rightarrow f''(x) = \frac{6x - 90}{100}$$

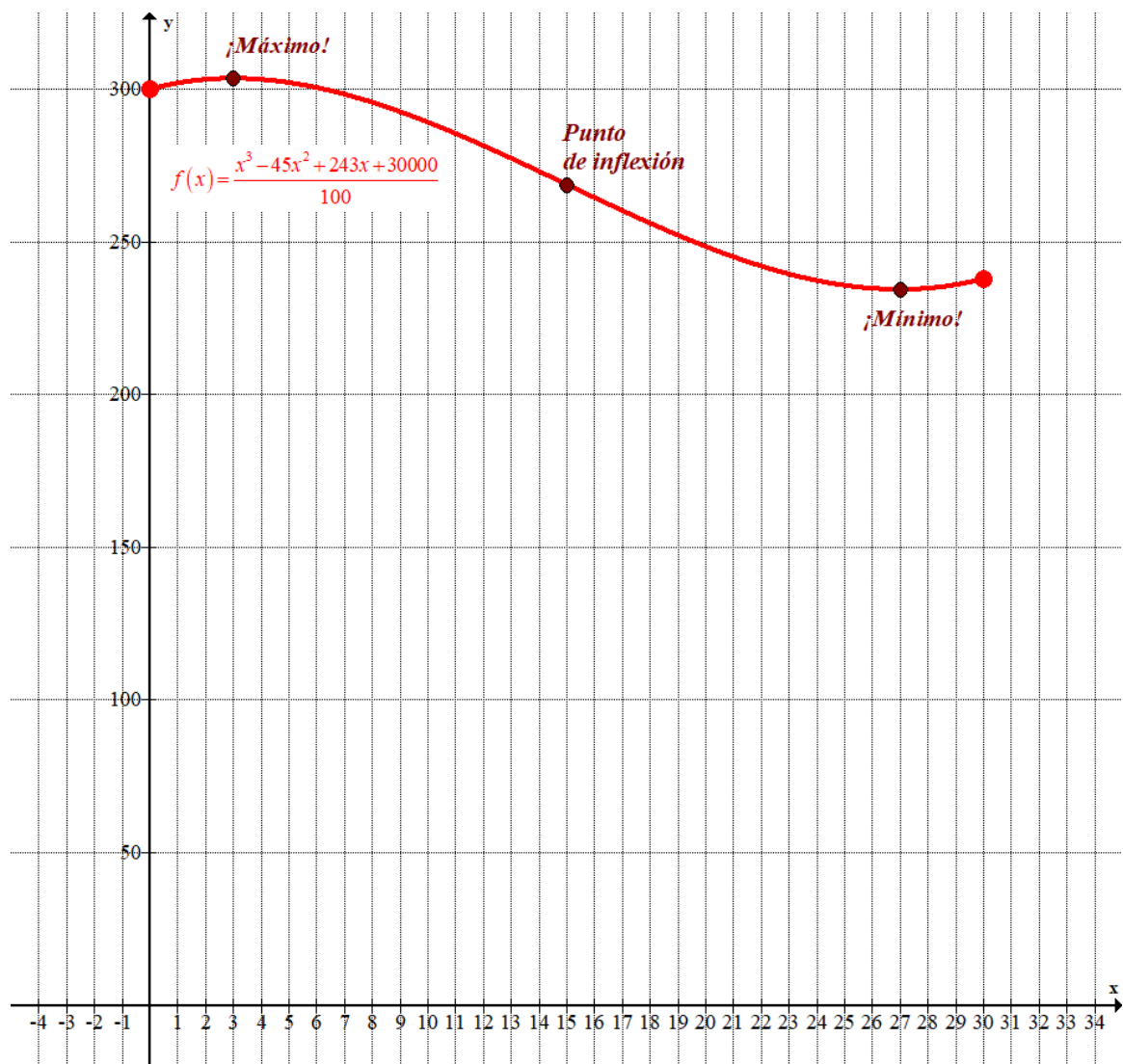
$$f''(x) = 0 \Rightarrow \frac{6x - 90}{100} = 0 \Rightarrow 6x - 90 = 0 \Rightarrow 6x = 90 \Rightarrow x = \frac{90}{6} = 15$$

$$f'''(x) = \frac{6}{100} \Rightarrow f'''(15) = \frac{6}{100} \neq 0$$

La función tiene un punto de inflexión en $x = 15$.

Hacemos una tabla de valores y representamos su gráfica.

x	$f(x) = \frac{x^3 - 45x^2 + 243x + 30000}{100}$
0	300
3	303.51
15	268.95
27	234.39
30	237.9



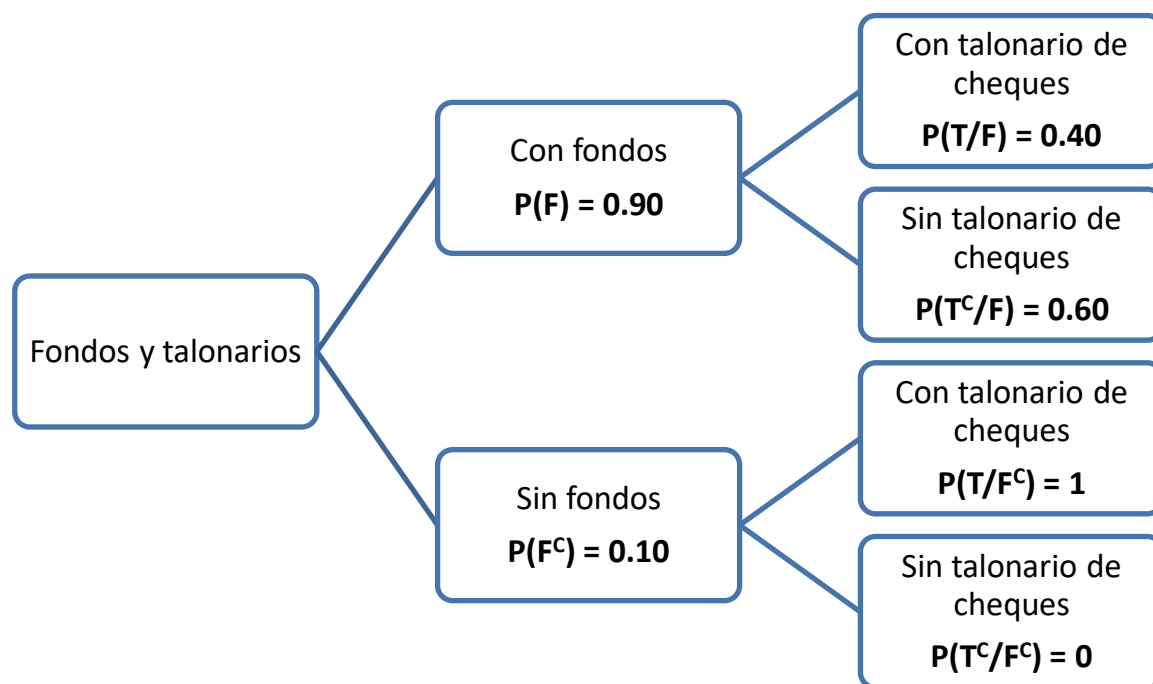
3. En un determinado banco, el 90% de los clientes tienen fondos. De ellos, el 40% tiene talonario de cheques. En cambio, entre los clientes sin fondos, el porcentaje de ellos que tienen talonario de cheques pasa a ser del 100%. Si se elige un cliente al azar:

a) [1 punto] ¿Cuál es la probabilidad de que tenga fondos y talonario de cheques?

b) [1 punto] ¿Cuál es la probabilidad de que tenga talonario de cheques?

Realizamos un diagrama de árbol que nos permite organizar toda la información proporcionada y obtener la información que viene implícita en el enunciado.

Llamamos F a “el cliente tiene fondos” y T a “el cliente tiene talonario de cheques”.



a) Nos piden calcular $P(F \cap T)$.

$$P(F \cap T) = P(F)P(T/F) = 0.9 \cdot 0.4 = \boxed{0.36}$$

b) Nos piden calcular $P(T)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(T) = P(F)P(T/F) + P(F^c)P(T/F^c) = 0.9 \cdot 0.4 + 0.1 \cdot 1 = \boxed{0.46}$$

4. Para estimar la altura media de los hombres de un país, se considera una muestra aleatoria de 1600 hombres para la que se obtiene que la estatura media es de 180,3 cm. Se supone además que la estatura sigue aproximadamente una distribución normal con desviación típica 4 cm.

a) [1 punto] Construye un intervalo de confianza para la altura media de los hombres de ese país, al 95% de confianza.

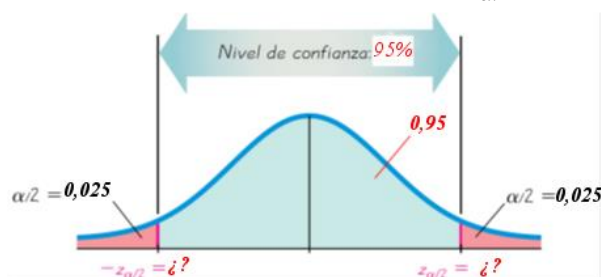
b) [1 punto] ¿Cuál sería el tamaño muestral mínimo necesario para estimar la verdadera altura media de los hombres a partir de la media muestral con un error de estimación máximo de 1 cm y un nivel de confianza del 95%?

(Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1: $F(1,28) = 0,90$; $F(1,64) = 0,95$; $F(1,96) = 0,975$; $F(2,33) = 0,99$; $F(2,58) = 0,995$.)

X = altura media de los hombres de un país en centímetros. $X = N(\mu, 4)$

a) La media muestral es $\bar{x} = 180.3$ centímetros y el tamaño de la muestra es $n = 1600$.

Para un nivel de confianza del 95% obtenemos el valor de $z_{\alpha/2}$.



$$1 - \alpha = 0,95 \rightarrow \alpha = 0,05 \rightarrow \alpha/2 = 0,025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,975 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1.96$$

El error del intervalo de confianza es

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow E = 1.96 \cdot \frac{4}{\sqrt{1600}} = 0.196 \text{ centímetros}$$

El intervalo de confianza para la media de la población es:

$$(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error) = (180.3 - 0.196, 180.3 + 0.196) = (180.104, 180.496)$$

Tenemos una confianza del 95% de que la estatura media de los hombres de ese país está entre 180,104 y 180,496 cm.

b) Con el mismo nivel de confianza tenemos que $z_{\alpha/2} = 1.96$.

El error del intervalo de confianza debe ser 1 cm por lo que:

$$Error = 1 \Rightarrow z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1 \Rightarrow 1.96 \cdot \frac{4}{\sqrt{n}} = 1 \Rightarrow 1.96 \cdot 4 = \sqrt{n} \Rightarrow n = (1.96 \cdot 4)^2 = 61.4656$$

A partir de una muestra de 62 hombres el error del intervalo de confianza es menor de 1 cm.

OPCIÓN B

1. Una empresa fabrica dos tipos de lápices. En la producción diaria se sabe que: el número de lápices de tipo B producidos supera como mucho en 500 unidades a los de tipo A; entre los dos tipos no superan las 2000 unidades y de tipo B se producen al menos 500 unidades.

a) [2 puntos] ¿Cuántos lápices de cada tipo puede producir al día? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Podría producir 1000 lápices de tipo A y 600 de tipo B?

b) [1 punto] El coste de fabricación de cada lápiz de tipo A es de 0,25 euros y el de cada lápiz de tipo B es de 0,2 euros. ¿Cuántos lápices de cada tipo debe producir para minimizar el coste total de fabricación? ¿a cuánto asciende dicho coste mínimo?

a) Denominamos por “x” e “y” al número de lápices del tipo A y del tipo B, respectivamente. Obtenemos las inecuaciones que definen las restricciones del problema.

“El número de lápices de tipo B producidos supera como mucho en 500 unidades a los de tipo A” $\rightarrow y \leq x + 500$.

“Entre los dos tipos no superan las 2000 unidades y de tipo B se producen al menos 500 unidades” $\rightarrow x + y \leq 2000$; $y \geq 500$.

Además, estos valores son enteros y positivos $\rightarrow x \geq 0 \quad y \geq 0$

Reunimos estas inecuaciones en un sistema:

$$\left. \begin{array}{l} y \leq x + 500 \\ x + y \leq 2000 \\ y \geq 500 \\ x \geq 0 \quad y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y \leq x + 500 \\ y \leq 2000 - x \\ y \geq 500 \\ x \geq 0 \quad y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Dibujamos las rectas asociadas a cada inecuación y localizamos la región factible o región del plano cuyos puntos cumplen todas estas inecuaciones.

$$y = 500 + x$$

$$y = 2000 - x$$

$$y = 500$$

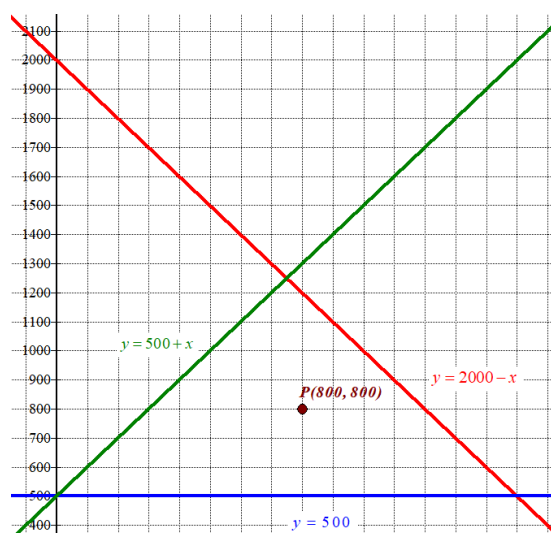
$$x \geq 0 \quad y \geq 0$$

x	y = 500 + x
0	500
100	600

x	y = 2000 - x
0	2000
2000	0

x	y = 500
0	500
100	500

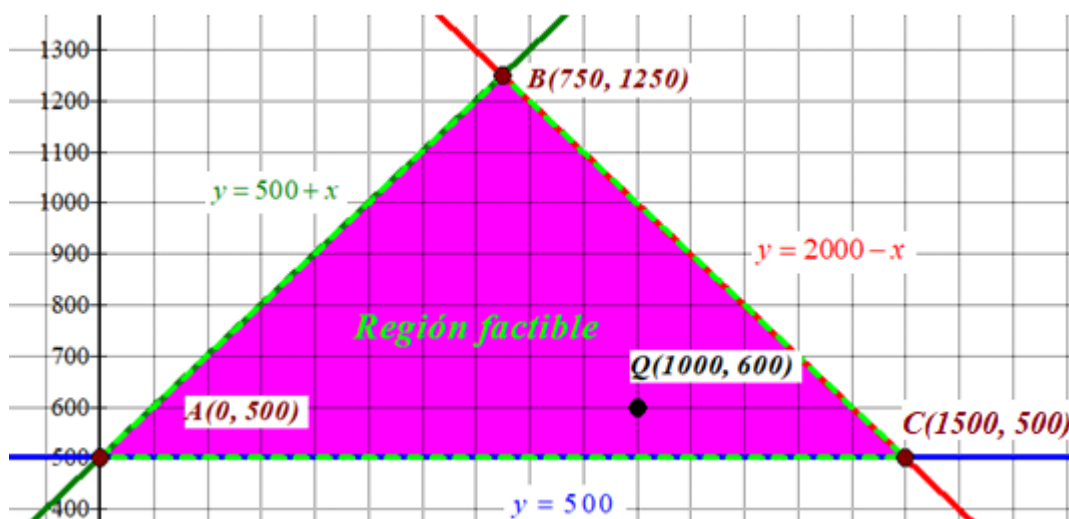
Primer
cuadrante



Probamos si el punto P(800, 800) cumple todos los condicionantes.

$$\left. \begin{array}{l} 800 \leq 800 + 500 \\ 800 \leq 2000 - 800 \\ 800 \geq 500 \\ 800 \geq 0 \quad 800 \geq 0 \end{array} \right\}$$

Se cumplen todas las inecuaciones, la región factible es la región del plano a la que pertenece el punto P. Es la zona rayada del dibujo.



Debemos determinar las coordenadas del punto B resolviendo el sistema de ecuaciones correspondiente.

$$B \rightarrow \left. \begin{array}{l} y = 2000 - x \\ y = 500 + x \end{array} \right\} \Rightarrow 2000 - x = 500 + x \Rightarrow 1500 = 2x \Rightarrow x = \frac{1500}{2} = 750 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = 2000 - 750 = 1250 \Rightarrow \boxed{B(750, 1250)}$$

El punto B tiene coordenadas B(750, 1250).

Observamos que el punto Q(1000, 600) pertenece a la región factible y 1000 lápices del tipo A y 600 del tipo B cumple con las restricciones del problema.

- b) La función coste de fabricación de los lápices viene expresada como $C(x, y) = 0.25x + 0.2y$. Valoramos el coste en cada uno de los vértices de la región factible en busca del mínimo.

$$A(0, 500) \rightarrow C(0, 500) = 0.25 \cdot 0 + 0.2 \cdot 500 = 100 \text{ ¡Mínimo!}$$

$$B(750, 1250) \rightarrow C(750, 1250) = 0.25 \cdot 750 + 0.2 \cdot 1250 = 437.5$$

$$C(1500, 500) \rightarrow C(1500, 500) = 0.25 \cdot 1500 + 0.2 \cdot 500 = 475$$

El mínimo coste que se puede conseguir es de 100 € con la fabricación de ningún lápiz del tipo A y 500 lápices del tipo B.

2. Dada la función $f(x) = 4x^3 - 36x$, se pide:

- a) [0,75 puntos] Encontrar la primitiva F de f verificando $F(1) = 0$.
 b) [2,25 puntos] Estudiar y representar gráficamente la función f y calcular el área limitada por la curva y el eje X entre $x = -1$ y $x = 1$.

a) Calculamos la integral indefinida de la función.

$$F(x) = \int f(x) dx = \int 4x^3 - 36x dx = x^4 - 18x^2 + K$$

Obtenemos el valor de K sabiendo que $F(1) = 0$.

$$\left. \begin{array}{l} F(x) = x^4 - 18x^2 + K \\ F(1) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 1^4 - 18 + K = 0 \Rightarrow K = 17$$

La primitiva F de f verificando $F(1) = 0$ tiene la expresión $F(x) = x^4 - 18x^2 + 17$.

b) La función es polinómica, por lo que su dominio es $\mathbb{R}$.

La función es continua en todo su dominio.

La función no tiene asíntotas.

Hallamos los puntos de corte con el eje OX.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = 4x^3 - 36x \\ \text{Eje OX} \rightarrow y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 4x^3 - 36x = 0 \Rightarrow 4x(x^2 - 9) = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 - 9 = 0 \rightarrow x^2 = 9 \rightarrow x = \sqrt{9} = \pm 3 \end{array} \right.$$

Los puntos de corte son A(-3,0), B(0,0) y C(3,0).

Hallamos los puntos de corte con el eje OY.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = 4x^3 - 36x \\ \text{Eje OY} \rightarrow x = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f(0) = 0 \Rightarrow B(0,0)$$

Estudiamos sus intervalos de crecimiento y decrecimiento. Averiguamos cuando se anula la derivada (puntos críticos).

$$f(x) = 4x^3 - 36x \Rightarrow f'(x) = 12x^2 - 36$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 12x^2 - 36 = 0 \Rightarrow 12x^2 = 36 \Rightarrow x^2 = \frac{36}{12} = 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos dos puntos críticos.

- En el intervalo $(-\infty, -\sqrt{3})$ tomamos $x = -2$ y la derivada vale

$$f'(-2) = 12(-2)^2 - 36 = 12 > 0. \text{ La función crece en el intervalo } (-\infty, -\sqrt{3}).$$

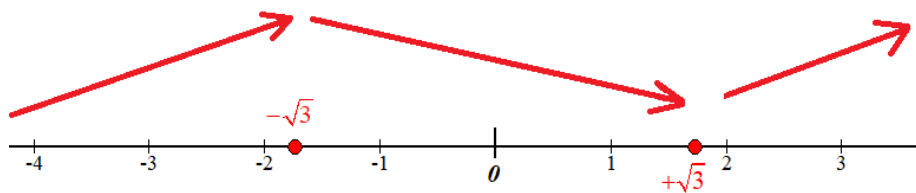
- En el intervalo $(-\sqrt{3}, +\sqrt{3})$ tomamos $x = 0$ y la derivada vale

$$f'(0) = 12 \cdot 0^2 - 36 = -36 < 0. \text{ La función decrece en el intervalo } (-\sqrt{3}, +\sqrt{3}).$$

- En el intervalo $(+\sqrt{3}, +\infty)$ tomamos $x = 2$ y la derivada vale

$$f'(2) = 12 \cdot 2^2 - 36 = 12 > 0. \text{ La función crece en el intervalo } (+\sqrt{3}, +\infty).$$

La función sigue el esquema siguiente.



La función crece en $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (+\sqrt{3}, +\infty)$ y decrece en $(-\sqrt{3}, +\sqrt{3})$. La función tiene un máximo relativo en $x = -\sqrt{3}$ y un mínimo relativo en $x = +\sqrt{3}$.

Obtenemos su punto de inflexión averiguando cuando se anula la segunda derivada.

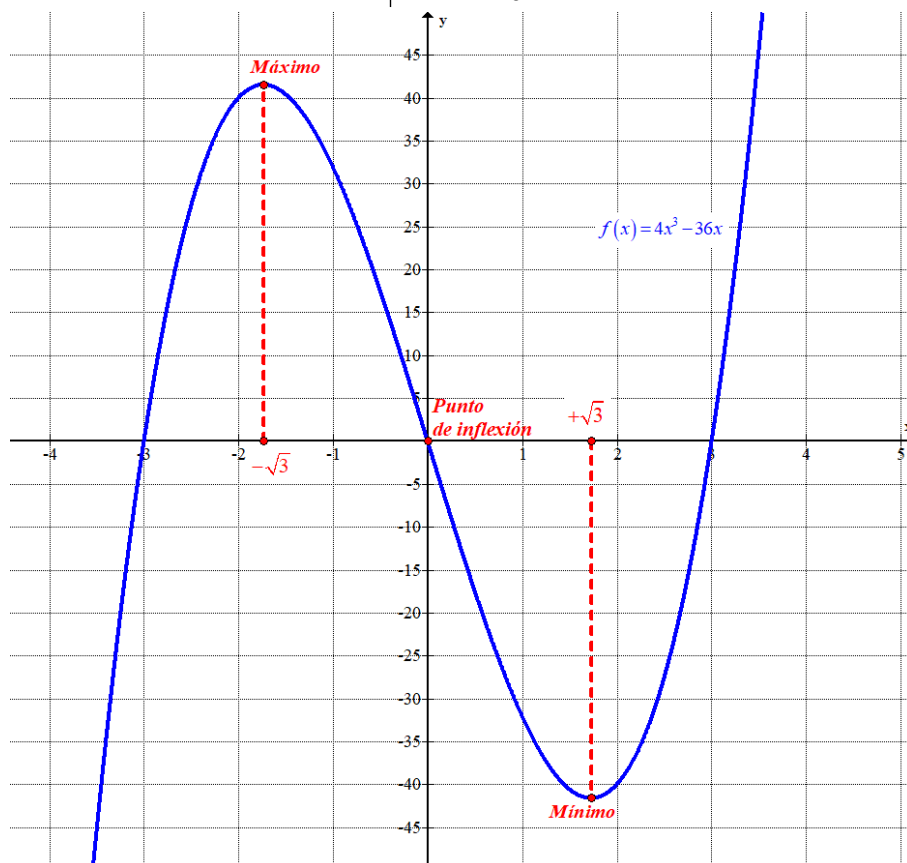
$$\left. \begin{aligned} f'(x) = 12x^2 - 36 &\Rightarrow f''(x) = 24x \\ f''(x) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 24x = 0 \Rightarrow \boxed{x = 0}$$

$$f'''(x) = 24 \Rightarrow f'''(0) = 24 \neq 0$$

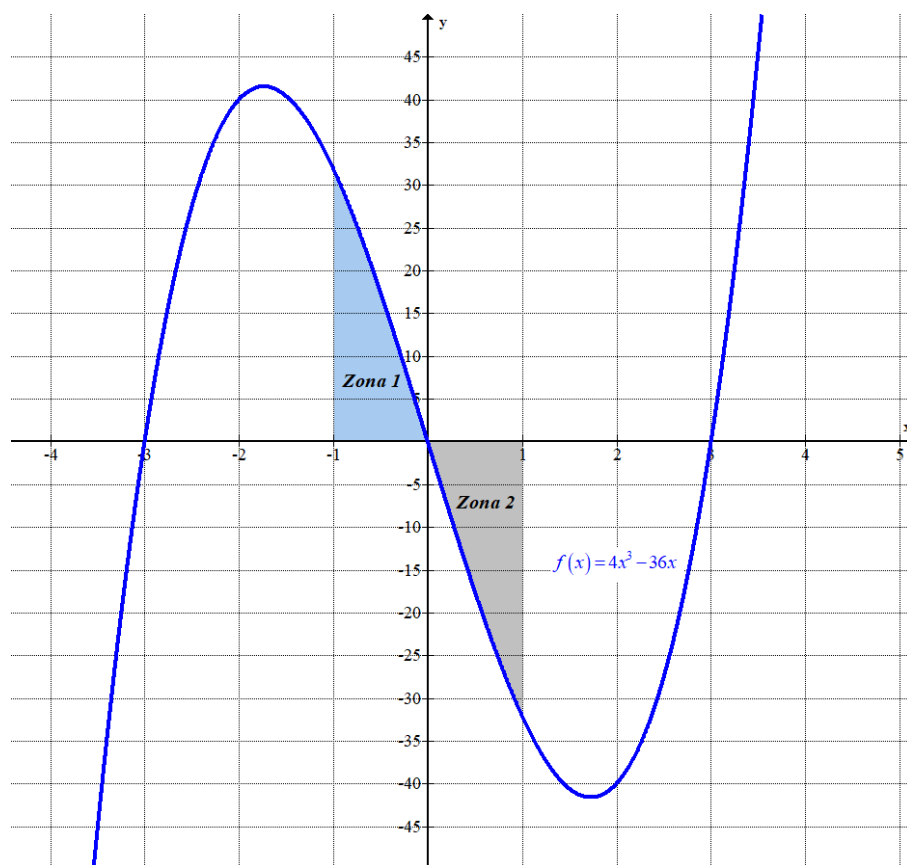
La función tiene un punto de inflexión en $x = 0$.

Hacemos una tabla de valores y dibujamos la gráfica de la función.

x	$f(x) = 4x^3 - 36x$
-2	40
$-\sqrt{3}$	41.57
0	0
$\sqrt{3}$	-41.57
2	-40



La región del plano limitada por la curva y el eje X entre $x = -1$ y $x = 1$ la coloreamos en el siguiente dibujo.



La región la dividimos en dos partes. Calculamos el área de cada trozo y el área total será la suma de las dos.

$$\text{Área 1} = \int_{-1}^0 4x^3 - 36x dx = \left[x^4 - 18x^2 \right]_{-1}^0 = \left[0^4 - 18 \cdot 0^2 \right] - \left[(-1)^4 - 18(-1)^2 \right] = \boxed{17u^2}$$

$$\text{Área 2} = \left| \int_0^1 4x^3 - 36x dx \right| = \left| \left[x^4 - 18x^2 \right]_0^1 \right| = \left| \left[1^4 - 18 \cdot 1^2 \right] - \left[0^4 - 18 \cdot 0^2 \right] \right| = \boxed{17u^2}$$

Tienen el mismo valor pues la función es impar. El área de la región del plano limitada por la curva y el eje X entre $x = -1$ y $x = 1$ tiene un valor de $17 + 17 = 34$ unidades cuadradas.

- 3.** En una clase formada por 10 chicos y 10 chicas, el 40% de los chicos tienen francés como asignatura optativa. Además, se sabe que el 5% de la clase son chicas que tienen francés como asignatura optativa.
- a) [1 punto] ¿Qué porcentaje de la clase tiene francés como asignatura optativa?
- b) [1 punto] Dentro del grupo de estudiantes que tiene francés como asignatura optativa, ¿qué porcentaje son chicas?

Si el 40% de los chicos (10) tienen francés como asignatura optativa son $0.4 \cdot 10 = 4$ chicos los que tienen francés como optativa.

Si el 5% de la clase ($10 + 10 = 20$) son chicas que tienen francés como asignatura optativa entonces $0.05 \cdot 20 = 1$ chica tiene francés como optativa.

- a) En la clase hay 20 alumnos y 4 chicos más 1 chica tienen el francés como asignatura optativa,

esto es un porcentaje de $\frac{4+1}{20} = 0.25 = 25\%$ de la clase.

- b) El grupo de estudiantes que tiene francés como asignatura optativa está compuesto por 5 personas. En ese grupo hay 1 chica y 4 chicos. Esto hace que el porcentaje de chicas sea

$$\frac{1}{5} = 0.2 = 20\% .$$

4. Para estimar la proporción de personas adultas que tienen determinada enfermedad en un país se considera una muestra aleatoria de 1000 adultos de dicho país, de los cuales 100 personas padecen dicha enfermedad.

- a) [1 punto] Halla, con un nivel de confianza del 90%, un intervalo para estimar la proporción de personas que padecen dicha enfermedad en ese país.
- b) [1 punto] En el intervalo anterior, ¿cuánto vale el error de estimación? ¿Qué le ocurriría al error de estimación si, manteniendo el mismo nivel de confianza y la misma proporción muestral, hubiese aumentado el tamaño muestral?

(Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1: $F(1,28) = 0,90$; $F(1,64) = 0,95$; $F(1,96) = 0,975$; $F(2,33) = 0,99$; $F(2,58) = 0,995$.)

- a) El tamaño muestral es $n = 1000$ personas adultas y la proporción muestral es $p = \frac{100}{1000} = 0.1$.

Para un nivel de confianza del 90% obtenemos el valor de $z_{\alpha/2}$.



$$1 - \alpha = 0,90 \rightarrow \alpha = 0,10 \rightarrow \alpha/2 = 0,05 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,95 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1.64$$

Determinamos el error.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = 1.64 \cdot \sqrt{\frac{0.1 \cdot 0.9}{1000}} \approx 0.0156$$

, por lo que el intervalo de confianza es:

$$(p - Error, p + Error) = (0.1 - 0.0156, 0.1 + 0.0156) = (0.0844, 0.1156)$$

Tenemos una confianza del 90% de que el porcentaje de personas con esa enfermedad está entre el 8.44% y el 11.56%.

- b) El error de estimación obtenido en el apartado anterior tiene un valor aproximado de 0.0156.

La fórmula del error es $Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$. En esta fórmula el tamaño muestral aparece en el denominador de la fracción, por lo que si mantenemos el mismo nivel de confianza y la misma proporción muestral y **aumentamos** el tamaño muestral **disminuye** el error.

$$Error = 1.64 \cdot \sqrt{\frac{0.1 \cdot 0.9}{n}} \left\{ \begin{array}{l} n' > n \end{array} \right\} \Rightarrow Error' = 1.64 \cdot \sqrt{\frac{0.1 \cdot 0.9}{n'}} < 1.64 \cdot \sqrt{\frac{0.1 \cdot 0.9}{n}} = Error$$