



Generalitat de Catalunya
Consell Interuniversitari de Catalunya

Oficina d'Accés a la Universitat

Proves d'accés a la universitat

2019

Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales

Serie 5

Responda a CINCO de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué.

Cada cuestión vale 2 puntos.

Puede utilizar calculadora, pero no se permite el uso de calculadoras u otros aparatos que pueden almacenar datos o que pueden transmitir o recibir información.

1. Se quiere enviar una fecha codificada. Para ello se considera el vector de tres componentes $X = (d \ m \ a)$, en el cual d expresa el día, m el mes y a el año. Seguidamente, se realiza la operación $X \cdot A + B$, donde A y B son las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } B = (5 \ -5 \ 5).$$

El resultado de esta operación es el vector codificado que enviamos.

- a) Si la fecha que se quiere enviar es el 1 de enero de 2019, es decir, si $X = (1 \ 1 \ 2019)$,

¿cuál es el vector codificado que se enviará? [0,75 puntos]

- b) Si el vector codificado que ha llegado es $(2036 \ 1 \ -13)$, ¿cuál es la fecha sin codificar? [1,25 puntos]

2. Para la campaña de este verano, una tienda de deportes que vende patinetes eléctricos espera vender 40 patinetes a un precio de 1.000 € por patinete. Según un estudio de mercado, la relación entre el número de veces que se rebaja el precio del patinete en 50 € y el número de patinetes vendidos es lineal, y, por cada 50 € de rebaja en el precio de venta de cada patinete, habrá un incremento de las ventas de 10 patinetes más.

- a) Escriba la función de ingresos de la tienda en función del número de veces que rebaje en 50 € el precio inicial de 1.000 € del patinete. [1 punto]

- b) Encuentre cuál debe ser el precio del patinete para obtener los ingresos máximos. Encuentre también el número de patinetes que se venderán y los ingresos que se obtendrán con este precio. [1 punto]

3. Se prevé un cambio importante en la población de una determinada zona por cuestiones medioambientales. El número de habitantes de la zona, en millones, vendrá dado por la

función $P(t) = \frac{t^2 + 28}{(t + 2)^2}$, donde t mide el tiempo en años desde el momento actual ($t = 0$).

- a) Diga cuál es el número de habitantes de la zona actualmente y cuál será este número a muy largo plazo. [1 punto]

- b) ¿En qué momento se llegará al número mínimo de habitantes? ¿Cuántos habitantes habrá en ese momento? ¿Cuál es el número máximo de habitantes que se alcanza en esta zona? [1 punto]

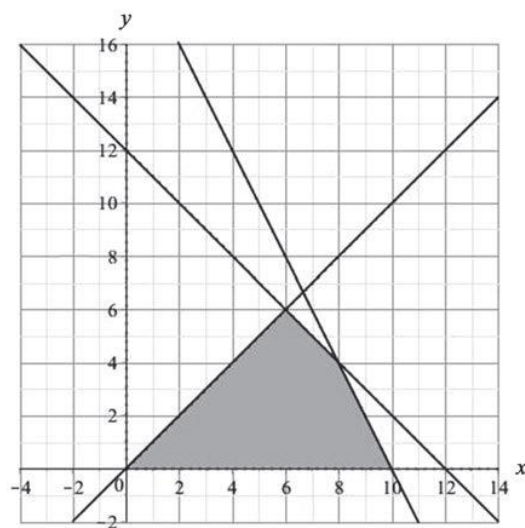
4. En tres sorteos consecutivos de la Lotto 6/49 ha habido 51 personas que han acertado los 6 números de la combinación ganadora en alguno de los tres sorteos. El número de personas que acertaron la combinación ganadora en el tercer sorteo es la mitad del total de personas que la acertaron en los dos primeros sorteos juntos. También sabemos que el número de personas que acertaron la combinación ganadora en el primer sorteo supera en 11 el total de personas que la acertaron en el segundo y en el tercer sorteos juntos. Con estos datos, calcule cuántas personas acertaron la combinación ganadora de la Lotto 6/49 en cada uno de los tres sorteos. [2 puntos]

5. Considere una función $f(x)$ cuya primera derivada es $f'(x) = 2x^2 + bx + 4$, donde b es un parámetro real.

- Determine el valor de b para que $f(x)$ tenga un extremo relativo en $x = -1$ y razone si se trata de un máximo o de un mínimo. [1 punto]
- Si se sabe que la gráfica de la función $f(x)$ pasa por el punto $(0, 3)$, encuentre la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en este punto. [1 punto]

6. Un horno artesano hace dos tipos de panecillos, los integrales y los de cereales. En su elaboración, además de la harina correspondiente, se usa levadura de masa madre y agua. La cantidad de levadura de masa madre y de agua que se utiliza en la elaboración de cada panecillo depende de si se trata de un panecillo integral o de cereales.

Se quiere saber cuántos panecillos de cada tipo se pueden hacer. Después de comprobar la cantidad de masa madre y de agua de que se dispone, y teniendo en cuenta que la cantidad de panecillos de cereales no puede superar la de panecillos integrales, se obtiene la siguiente región con todas las posibilidades.



En el gráfico, el eje de las x representa el número de panecillos integrales y el de las y , el número de panecillos de cereales.

- Escriba las inecuaciones que dan lugar a esta región factible. [1 punto]
- Si los panecillos integrales se venden a 8 € cada unidad y los de cereales a 10 €, ¿cuántos panecillos de cada tipo se tienen que vender para obtener los máximos ingresos? ¿Cuáles son estos máximos ingresos? [1 punto]

SOLUCIONES

1. Se quiere enviar una fecha codificada. Para ello se considera el vector de tres componentes $X = (d \ m \ a)$, en el cual d expresa el día, m el mes y a el año. Seguidamente, se realiza la operación $X \cdot A + B$, donde A y B son las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 5 & -5 & 5 \end{pmatrix}.$$

El resultado de esta operación es el vector codificado que enviamos.

- a)** Si la fecha que se quiere enviar es el 1 de enero de 2019, es decir, si $X = (1 \ 1 \ 2019)$, ¿cuál es el vector codificado que se enviará? [0,75 puntos]
b) Si el vector codificado que ha llegado es $(2036 \ 1 \ -13)$, ¿cuál es la fecha sin codificar? [1,25 puntos]

- a) Realizamos el cálculo correspondiente con $X = (1 \ 1 \ 2019)$.

$$\begin{aligned} X \cdot A + B &= (1 \ 1 \ 2019) \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & -5 & 5 \end{pmatrix} = \\ &= (1+0+2019 \ 0+1+0 \ -1-1) + (5 \ -5 \ 5) = (2025 \ -4 \ 3) \end{aligned}$$

El vector codificado que se enviaría es $(2025 \ -4 \ 3)$.

- b) Si el vector codificado es $(2036 \ 1 \ -13)$ resolvemos la ecuación matricial correspondiente.

$$X \cdot A + B = (2036 \ 1 \ -13) \Rightarrow (d \ m \ a) \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & -5 & 5 \end{pmatrix} = (2036 \ 1 \ -13) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (d \ m \ a) \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (2036 \ 1 \ -13) - \begin{pmatrix} 5 & -5 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (d+a \ m \ -d-m) = (2031 \ 6 \ -18) \Rightarrow \begin{cases} d+a = 2031 \\ m = 6 \\ -d-m = -18 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} d+a = 2031 \\ -d-6 = -18 \rightarrow 12 = d \end{cases} \Rightarrow 12+a = 2031 \Rightarrow a = 2019$$

La fecha sin codificar es día 12 del mes 6 (junio) del año 2019.

2. Para la campaña de este verano, una tienda de deportes que vende patinetes eléctricos espera vender 40 patinetes a un precio de 1.000 € por patinete. Según un estudio de mercado, la relación entre el número de veces que se rebaja el precio del patinete en 50 € y el número de patinetes vendidos es lineal, y, por cada 50 € de rebaja en el precio de venta de cada patinete, habrá un incremento de las ventas de 10 patinetes más.
- a) Escriba la función de ingresos de la tienda en función del número de veces que rebaje en 50 € el precio inicial de 1.000 € del patinete. [1 punto]
- b) Encuentre cuál debe ser el precio del patinete para obtener los ingresos máximos. Encuentre también el número de patinetes que se venderán y los ingresos que se obtendrán con este precio. [1 punto]

- a) Llamamos “ x ” al número de veces que se rebaja 50 € el precio del patinete (1000 €). Si rebajamos “ x ” veces 50 € el precio de venta de cada patinete el nuevo precio será de $1000 - 50x$, habrá un incremento de las ventas de 10 patinetes más ($40 + 10x$ patinetes vendidos) entonces la función de ingresos de la empresa será el número de patinetes multiplicado por el precio de cada patinete.

$$I(x) = (40 + 10x) \cdot (1000 - 50x)$$

Realizamos el producto y obtenemos la expresión polinómica de la función ingresos.

$$I(x) = (40 + 10x) \cdot (1000 - 50x) = 40000 - 2000x + 10000x - 500x^2 = -500x^2 + 8000x + 40000$$

La función ingresos es $I(x) = -500x^2 + 8000x + 40000$, siendo x el número de veces que se rebaja 50 € el precio del patinete.

- b) Derivamos la función ingresos y averiguamos cuando se anula la derivada.

$$I(x) = -500x^2 + 8000x + 40000 \Rightarrow I'(x) = -1000x + 8000$$

$$I'(x) = 0 \Rightarrow -1000x + 8000 = 0 \Rightarrow 1000x = 8000 \Rightarrow \boxed{x = 8}$$

Sustituimos el valor obtenido $x = 8$ en la segunda derivada para comprobar si es máximo o mínimo de la función.

$$I'(x) = -1000x + 8000 \Rightarrow I''(x) = -1000 \Rightarrow I''(8) = -1000 < 0$$

Al ser la segunda derivada negativa la función ingresos tiene un máximo relativo para $x = 8$.

Los ingresos son máximos con 8 rebajas de 50 € en el precio del patinete, es decir, si rebajamos su precio $50 \cdot 8 = 400$ €. El precio del patinete que nos proporciona unos ingresos máximos es de $1000 - 400 = 600$ €.

Los ingresos máximos tendrán un valor de $I(8) = -500 \cdot 8^2 + 8000 \cdot 8 + 40000 = 72000$ €.

3. Se prevé un cambio importante en la población de una determinada zona por cuestiones medioambientales. El número de habitantes de la zona, en millones, vendrá dado por la función $P(t) = \frac{t^2 + 28}{(t+2)^2}$, donde t mide el tiempo en años desde el momento actual ($t = 0$).
- a) Diga cuál es el número de habitantes de la zona actualmente y cuál será este número a muy largo plazo. [1 punto]
- b) ¿En qué momento se llegará al número mínimo de habitantes? ¿Cuántos habitantes habrá en ese momento? ¿Cuál es el número máximo de habitantes que se alcanza en esta zona? [1 punto]

a) El número de habitantes de la zona actualmente es el valor de $P(0)$.

$$P(0) = \frac{0^2 + 28}{(0+2)^2} = 7$$

Actualmente hay 7 millones de habitantes.

A muy largo plazo se supone que los años crecen hasta $+\infty$. Calculo el límite de la función cuando pasan un número de años grande.

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} P(t) &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^2 + 28}{(t+2)^2} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^2 + 28}{t^2 + 4t + 4} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\frac{t^2}{t^2} + \frac{28}{t^2}}{\frac{t^2}{t^2} + \frac{4t}{t^2} + \frac{4}{t^2}} = \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{28}{t^2}}{1 + \frac{4}{t} + \frac{4}{t^2}} = \frac{1 + \frac{28}{\infty}}{1 + \frac{4}{\infty} + \frac{4}{\infty}} = \frac{1+0}{1+0+0} = 1 \end{aligned}$$

El número de habitantes a largo plazo tiende a ser de 1 millón de habitantes.

b) Usamos la derivada para obtener los puntos críticos de la función $P(t)$.

$$P(t) = \frac{t^2 + 28}{(t+2)^2} \Rightarrow P'(t) = \frac{2t(t+2)^2 - 2(t+2)(t^2 + 28)}{(t+2)^4} = \frac{2t(t+2) - 2(t^2 + 28)}{(t+2)^3}$$

$$P'(t) = \frac{2t^2 + 4t - 2t^2 - 56}{(t+2)^3} = \frac{4t - 56}{(t+2)^3}$$

$$P'(t) = 0 \Rightarrow \frac{4t - 56}{(t+2)^3} = 0 \Rightarrow 4t - 56 = 0 \Rightarrow t = \frac{56}{4} = 14$$

La función presenta un punto crítico en $t = 14$. Estudiamos la evolución de la función antes y después de este valor.

- En el intervalo $(0,14)$ tomamos $t=1$ y su derivada vale $P'(1) = \frac{4-56}{(1+2)^3} = \frac{-52}{27} < 0$.

La función decrece en $(0,14)$.

- En el intervalo $(14, +\infty)$ tomamos $t=15$ y su derivada vale

$$P'(15) = \frac{4 \cdot 15 - 56}{(15+2)^3} = \frac{4}{4913} > 0. \text{ La función crece en } (14, +\infty).$$

Como la función decrece antes de $t=14$ y crece después de dicho valor tenemos un mínimo de la función al cabo de 14 años.

La población al cabo de 14 años será de $P(14) = \frac{14^2 + 28}{(14+2)^2} = 0.875$ millones, es decir, 875 000

habitantes.

La población alcanza un mínimo número de habitantes (875 000) pasados 14 años.

4. En tres sorteos consecutivos de la Lotto 6/49 ha habido 51 personas que han acertado los 6 números de la combinación ganadora en alguno de los tres sorteos. El número de personas que acertaron la combinación ganadora en el tercer sorteo es la mitad del total de personas que la acertaron en los dos primeros sorteos juntos. También sabemos que el número de personas que acertaron la combinación ganadora en el primer sorteo supera en 11 el total de personas que la acertaron en el segundo y en el tercer sorteos juntos. Con estos datos, calcule cuántas personas acertaron la combinación ganadora de la Lotto 6/49 en cada uno de los tres sorteos. [2 puntos]

Llamamos “x” al número de acertantes del primer sorteo, “y” al número de acertantes del segundo y “z” al número de acertantes del tercero.

Obtenemos las ecuaciones correspondientes a cada información proporcionada en el enunciado del problema.

En tres sorteos consecutivos de la Lotto 6/49 ha habido 51 personas que han acertado los 6 números de la combinación ganadora en alguno de los tres sorteos $\rightarrow x + y + z = 51$.

El número de personas que acertaron la combinación ganadora en el tercer sorteo es la mitad del total de personas que la acertaron en los dos primeros sorteos juntos $\rightarrow$

$$z = \frac{x + y}{2}.$$

El número de personas que acertaron la combinación ganadora en el primer sorteo supera en 11 el total de personas que la acertaron en el segundo y en el tercer sorteos juntos $\rightarrow$
 $x = y + z + 11$.

Juntamos las tres ecuaciones obtenidas en un sistema que resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 51 \\ z = \frac{x + y}{2} \\ x = y + z + 11 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 51 \\ 2z = x + y \\ x = y + z + 11 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y + z + 11 + y + z = 51 \\ 2z = y + z + 11 + y \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2y + 2z = 40 \\ z = 2y + 11 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} y + z = 20 \\ z = 2y + 11 \end{array} \right\} \Rightarrow y + 2y + 11 = 20 \Rightarrow 3y = 9 \Rightarrow \boxed{y = \frac{9}{3} = 3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{z = 2 \cdot 3 + 11 = 17} \Rightarrow \boxed{x = 3 + 17 + 11 = 31}$$

Acertaron 31 personas en el primer sorteo, 3 en el segundo y 17 en el tercero.

5. Considere una función $f(x)$ cuya primera derivada es $f'(x) = 2x^2 + bx + 4$, donde b es un parámetro real.
- a) Determine el valor de b para que $f(x)$ tenga un extremo relativo en $x = -1$ y razone si se trata de un máximo o de un mínimo. [1 punto]
- b) Si se sabe que la gráfica de la función $f(x)$ pasa por el punto $(0, 3)$, encuentre la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en este punto. [1 punto]

- a) Si $f(x)$ tiene un extremo relativo en $x = -1$ entonces la derivada se anula para dicho valor $\rightarrow f'(-1) = 0$.

$$\left. \begin{array}{l} f'(-1) = 0 \\ f'(x) = 2x^2 + bx + 4 \end{array} \right\} \Rightarrow 0 = 2(-1)^2 + b(-1) + 4 \Rightarrow -b + 6 = 0 \Rightarrow \boxed{b = 6}$$

Para este valor la función derivada queda $f'(x) = 2x^2 + 6x + 4$. Sustituimos el valor $x = -1$ en la segunda derivada.

$$f'(x) = 2x^2 + 6x + 4 \Rightarrow f''(x) = 4x + 6 \Rightarrow f''(-1) = 4(-1) + 6 = 2 > 0$$

Como la segunda derivada es positiva la función tiene un mínimo relativo en $x = -1$.

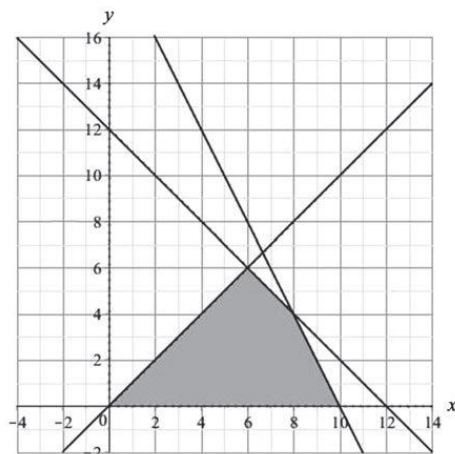
- b) Si la gráfica de la función $f(x)$ pasa por el punto $(0, 3)$ entonces se cumple que $f(0) = 3$. Además, podemos obtener el valor de la derivada en $x = 0 \rightarrow f'(0) = 2 \cdot 0^2 + 6 \cdot 0 + 4 = 4$. Con estos datos podemos obtener la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto $(0, 3)$.

$$\left. \begin{array}{l} f(0) = 3 \\ f'(0) = 4 \\ y - f(0) = f'(0)(x - 0) \end{array} \right\} \Rightarrow y - 3 = 4x \Rightarrow \boxed{y = 4x + 3}$$

La ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en el punto $(0, 3)$ tiene ecuación $y = 4x + 3$.

6. Un horno artesano hace dos tipos de panecillos, los integrales y los de cereales. En su elaboración, además de la harina correspondiente, se usa levadura de masa madre y agua. La cantidad de levadura de masa madre y de agua que se utiliza en la elaboración de cada panecillo depende de si se trata de un panecillo integral o de cereales.

Se quiere saber cuántos panecillos de cada tipo se pueden hacer. Después de comprobar la cantidad de masa madre y de agua de que se dispone, y teniendo en cuenta que la cantidad de panecillos de cereales no puede superar la de panecillos integrales, se obtiene la siguiente región con todas las posibilidades.

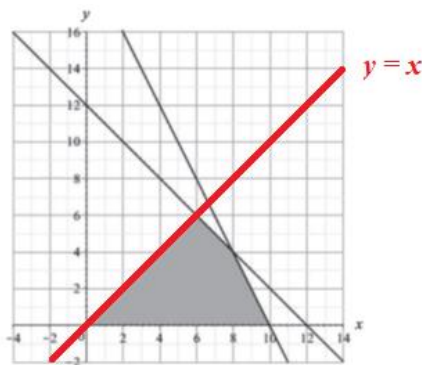


En el gráfico, el eje de las x representa el número de panecillos integrales y el de las y , el número de panecillos de cereales.

a) Escriba las inecuaciones que dan lugar a esta región factible. [1 punto]

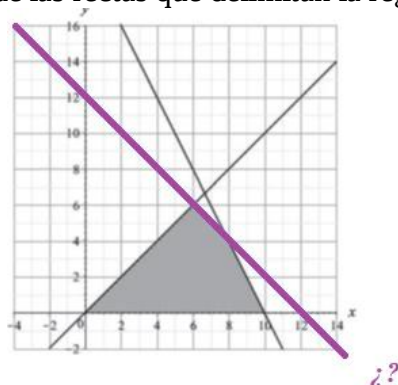
b) Si los panecillos integrales se venden a 8 € cada unidad y los de cereales a 10 €, ¿cuántos panecillos de cada tipo se tienen que vender para obtener los máximos ingresos? ¿Cuáles son estos máximos ingresos? [1 punto]

a) En la gráfica podemos identificar la recta de ecuación $y = x$ que marco de rojo en el siguiente dibujo.



Como nos dicen que la cantidad de panecillos de cereales no puede superar (debe ser menor) la de panecillos integrales podemos establecer que una de las restricciones será $y \leq x$.

Hallamos la ecuación de otra de las rectas que delimitan la región factible.

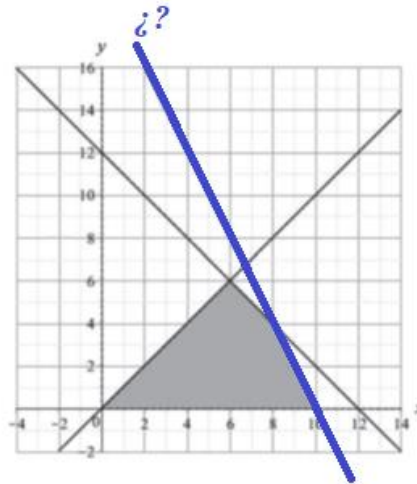


Esta recta pasa por los puntos (0, 12) y (12, 0).

$$\left. \begin{array}{l} y = mx + n \\ (0, 12) \\ (12, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} 0 = 12m + n \\ 12 = m \cdot 0 + n \rightarrow \boxed{n = 12} \end{cases} \Rightarrow 0 = 12m + 12 \Rightarrow 12m = -12 \Rightarrow \boxed{m = -1}$$

La recta tiene ecuación $y = -x + 12$. Como la región factible está situada por debajo de la recta la restricción es $y \leq -x + 12 \rightarrow x + y \leq 12$.

Repetimos el proceso para la tercera recta.



Esta recta pasa por los puntos (10, 0) y (8, 4).

$$\left. \begin{array}{l} y = mx + n \\ (10, 0) \\ (8, 4) \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} 0 = m \cdot 10 + n \\ 4 = m \cdot 8 + n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -10m = n \\ 4 = 8m + n \end{cases} \Rightarrow 4 = 8m - 10m \Rightarrow -2m = 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{m = -2} \Rightarrow \boxed{n = -10(-2) = 20}$$

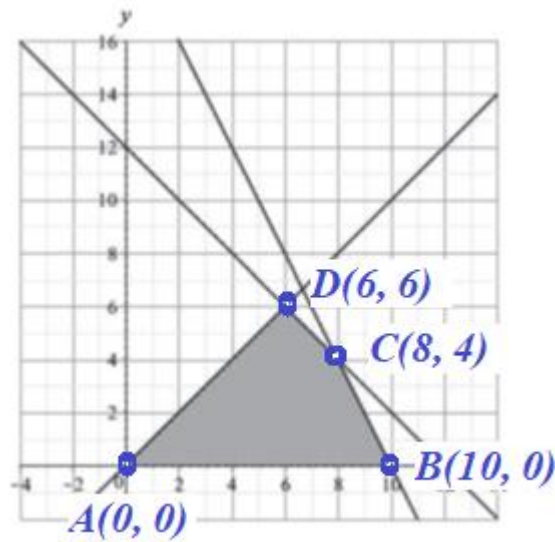
La recta tiene ecuación $y = -2x + 20$. Como la región factible está situada por debajo de la recta la restricción es $y \leq -2x + 20 \rightarrow 2x + y \leq 20$.

La región factible está situada en el primer cuadrante $\rightarrow x \geq 0; y \geq 0$.

Reunimos todas las restricciones en un sistema de inecuaciones

$$\left. \begin{array}{l} y \leq x \\ x + y \leq 12 \\ 2x + y \leq 20 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

- b) Si los panecillos integrales se venden a 8 € cada unidad y los de cereales a 10 € la función ingresos es $I(x, y) = 8x + 10y$. Valoramos esta función en los vértices de la región factible.



$$A(0, 0) \rightarrow I(0, 0) = 0$$

$$B(10, 0) \rightarrow I(10, 0) = 8 \cdot 10 + 10 \cdot 0 = 80$$

$$C(8, 4) \rightarrow I(8, 4) = 8 \cdot 8 + 10 \cdot 4 = 104$$

$$D(6, 6) \rightarrow I(6, 6) = 8 \cdot 6 + 10 \cdot 6 = 108 \text{ ¡Máximo!}$$

Los máximos ingresos que se pueden obtener son de 108 euros con la venta de 6 panecillos de cada tipo.