



Proves d'accés a la universitat

Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales

Serie 4

Responda a CUATRO de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué.

Cada cuestión vale 2,5 puntos.

Puede utilizar calculadora, pero no se permite el uso de calculadoras u otros aparatos que pueden almacenar datos o que pueden transmitir o recibir información.

Puede utilizar las páginas en blanco (páginas 14 y 15) para hacer esquemas, borradores, etc., o para acabar de responder a alguna cuestión si necesita más espacio. En este último caso, debe indicarlo claramente al final de la página de la cuestión correspondiente.

1. Consideramos la matriz $A = \begin{pmatrix} x & -2 \\ 5 & -x \end{pmatrix}$. Estudie para qué valores de x la matriz inversa de la matriz A coincide con su opuesta, es decir, $A^{-1} = -A$.
 [2,5 puntos]

2. Un fabricante tuvo un producto a la venta durante diez años. Durante este tiempo, el precio del producto P , en euros, estuvo relacionado con el tiempo que llevaba a la venta t , expresado en años, siguiendo la siguiente función:

$$P(t) = \begin{cases} 5(t+1)^2 - 5 & \text{si } 0 \leq t \leq 2 \\ -4t + 48 & \text{si } 3 < t \leq 10 \end{cases}$$

- a) Indique los intervalos de crecimiento y de decrecimiento del precio del producto durante estos diez años.
 [1,25 puntos]
- b) Halle el precio máximo que alcanzó el producto durante el tiempo que estuvo a la venta y calcule la tasa de variación media del precio del producto durante los últimos cinco años que estuvo a la venta.
 [1,25 puntos]
3. Una conocida marca fabrica dos versiones de una misma fragancia: el perfume, que es más concentrado y que se vende en frascos pequeños que cuestan 70 euros, y la colonia, que es más diluida y que se vende en frascos más grandes a 82 euros. En la fabricación hay que mezclar dos ingredientes: el ingrediente A (que contiene el aroma concentrado) y el ingrediente B (que contiene alcohol y otras sustancias). En estos momentos el fabricante dispone de 5.000 ml del ingrediente A y de 30.000 ml del ingrediente B. Para fabricar un frasco de perfume se necesitan 10 ml del ingrediente A y 40 ml del ingrediente B, y para fabricar uno de colonia necesitan 10 ml del ingrediente A y 90 ml del ingrediente B. Los pedidos actuales obligan a fabricar al menos 120 unidades de perfume y 70 unidades de colonia.
- a) Determine la función objetivo y las restricciones. Dibuje la región factible.
 [1,25 puntos]

- b)** ¿Cuántas unidades hay que producir de cada versión para obtener, una vez vendidas, unos ingresos máximos? ¿Cuáles son estos ingresos?
[1,25 puntos]
- 4.** Considere las funciones $f(x) = x^2 + ax + b$ y $g(x) = -x^2 + c$.
- a)** Calcule los valores de los parámetros a , b y c para que los gráficos de $f(x)$ y $g(x)$ se corten en los puntos $(-1, 3)$ y $(3, -5)$.
[1,25 puntos]
- b)** Para $c = 4$, encuentre la ecuación de la recta tangente a $g(x)$ en el punto de abscisa $x = -1$.
[1,25 puntos]
- 5.** Un triatlón consta de tres segmentos que hay que realizar consecutivamente practicando tres modalidades de deporte distintas: natación, ciclismo y carrera a pie. La distancia total que se recorrerá en el triatlón es de 75 km. Se sabe que el recorrido en bicicleta es igual a cuatro veces la distancia que hay que recorrer nadando y corriendo conjuntamente. Se sabe también que si sumamos 3 km a la distancia que se hace corriendo nos da lo mismo que cinco veces el recorrido que se hace nadando. Determine la distancia recorrida en cada modalidad.
[2,5 puntos]
- 6.** La función $Q(x) = (x+1)^2(32-x)$, donde $x \in [-1, 32]$, representa la producción, en kilogramos, de una hortaliza en un invernadero en función de la temperatura x , expresada en grados centígrados ($^{\circ}\text{C}$), que puede variar entre -1°C y 32°C .
- a)** Calcule cuál es la temperatura del invernadero con la que se obtiene la máxima producción. ¿Qué producción de hortaliza se obtendrá a esta temperatura?
[1,25 puntos]
- b)** Calcule a qué temperaturas se alcanza el nivel mínimo de producción y cuál es este valor mínimo.
[1,25 puntos]

SOLUCIONES

1. Consideramos la matriz $A = \begin{pmatrix} x & -2 \\ 5 & -x \end{pmatrix}$. Estudie para qué valores de x la matriz inversa de la matriz A coincide con su opuesta, es decir, $A^{-1} = -A$. [2,5 puntos]

Veamos si la matriz A tiene inversa.

$$|A| = \begin{vmatrix} x & -2 \\ 5 & -x \end{vmatrix} = -x^2 + 10$$

$$|A| = 0 \Rightarrow -x^2 + 10 = 0 \Rightarrow x^2 = 10 \Rightarrow x = \pm\sqrt{10}$$

Para que exista la inversa de A el determinante debe ser no nulo y por tanto $x \neq \pm\sqrt{10}$.

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^T)}{|A|} = \frac{\text{Adj}\begin{pmatrix} x & 5 \\ -2 & -x \end{pmatrix}}{-x^2 + 10} = \frac{\begin{pmatrix} -x & 2 \\ -5 & x \end{pmatrix}}{-x^2 + 10}$$

$$A^{-1} = -A \Rightarrow \frac{\begin{pmatrix} -x & 2 \\ -5 & x \end{pmatrix}}{-x^2 + 10} = \begin{pmatrix} -x & 2 \\ -5 & x \end{pmatrix} \Rightarrow -x^2 + 10 = 1 \Rightarrow -x^2 = -9 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow \boxed{x = \pm\sqrt{9} = \pm 3}$$

Los valores de x buscados son $x = 3$ o $x = -3$.

2. Un fabricante tuvo un producto a la venta durante diez años. Durante este tiempo, el precio del producto P , en euros, estuvo relacionado con el tiempo que llevaba a la venta t , expresado en años, siguiendo la siguiente función:

$$P(t) = \begin{cases} 5(t+1)^2 - 5 & \text{si } 0 \leq t \leq 2 \\ -4t + 48 & \text{si } 3 < t \leq 10 \end{cases}$$

- a) Indique los intervalos de crecimiento y de decrecimiento del precio del producto durante estos diez años. [1,25 puntos]
 b) Halle el precio máximo que alcanzó el producto durante el tiempo que estuvo a la venta y calcule la tasa de variación media del precio del producto durante los últimos cinco años que estuvo a la venta. [1,25 puntos]

- a) Calculamos la derivada de la función.

$$P'(t) = \begin{cases} 10(t+1) & \text{si } 0 \leq t < 2 \\ -4 & \text{si } 2 < t \leq 10 \end{cases}$$

La derivada en $0 \leq t < 2$ es positiva siempre, pues $t + 1$ solo es negativa cuando $t < -1$. La función crece en $[0, 2)$.

La derivada ($P'(t) = -4$) en $2 < t \leq 10$ es negativa siempre. La función decrece en $(2, 10]$.

En $t = 2$ la función es continua ($P(2) = 40 = \lim_{t \rightarrow 2} P(t)$) y cambia de crecer a decrecer. Es un máximo relativo.

Resumiendo: La función crece en $[0, 2)$ y decrece en $(2, 10]$.

- b) Por lo visto en el apartado anterior el precio máximo se alcanza en $t = 2$ (al cabo de 2 años) y este precio es de $P(2) = 40$ euros.

$$TVM[5,10] = \frac{P(10) - P(5)}{10 - 5} = \frac{(-40 + 48) - (-20 + 48)}{5} = \frac{-20}{5} = -4 \text{ euros por año.}$$

3. Una conocida marca fabrica dos versiones de una misma fragancia: el perfume, que es más concentrado y que se vende en frascos pequeños que cuestan 70 euros, y la colonia, que es más diluida y que se vende en frascos más grandes a 82 euros. En la fabricación hay que mezclar dos ingredientes: el ingrediente A (que contiene el aroma concentrado) y el ingrediente B (que contiene alcohol y otras sustancias). En estos momentos el fabricante dispone de 5.000 ml del ingrediente A y de 30.000 ml del ingrediente B. Para fabricar un frasco de perfume se necesitan 10 ml del ingrediente A y 40 ml del ingrediente B, y para fabricar uno de colonia necesitan 10 ml del ingrediente A y 90 ml del ingrediente B. Los pedidos actuales obligan a fabricar al menos 120 unidades de perfume y 70 unidades de colonia.
- a) Determine la función objetivo y las restricciones. Dibuje la región factible. [1,25 puntos]
- b) ¿Cuántas unidades hay que producir de cada versión para obtener, una vez vendidas, unos ingresos máximos? ¿Cuáles son estos ingresos? [1,25 puntos]

- a) Llamemos “x” al número de ampollas de perfume e “y” al número de ampollas de colonia. Realizamos una tabla con los datos del ejercicio.

	ml de ingrediente A	ml de ingrediente B	Ingresos
Nº ampollas de perfume (x)	10x	40x	70x
Nº ampollas de colonia (y)	10y	90y	82y
TOTALES	10x+10y	40x+90y	70x+82y

Se desean maximizar los ingresos que vienen expresados por la función objetivo $I(x, y) = 70x + 82y$.

Las restricciones del problema vienen expresadas por las inecuaciones:

“El fabricante dispone de 5.000 ml del ingrediente A” $\rightarrow 10x + 10y \leq 5000$

“El fabricante dispone de 30.000 ml del ingrediente B” $\rightarrow 40x + 90y \leq 30000$

“Los pedidos actuales obligan a fabricar al menos 120 unidades de perfume y 70 unidades de colonia” $\rightarrow x \geq 120; y \geq 70$

Reunimos estas restricciones en un sistema de inecuaciones.

$$\left. \begin{array}{l} 10x + 10y \leq 5000 \\ 40x + 90y \leq 30000 \\ x \geq 120; y \geq 70 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y \leq 500 \\ 4x + 9y \leq 3000 \\ x \geq 120; y \geq 70 \end{array} \right\}$$

Dibujamos las rectas asociadas a las inecuaciones.

$$x + y = 500$$

x	y = 500 - x
0	500
500	0

$$4x + 9y = 3000$$

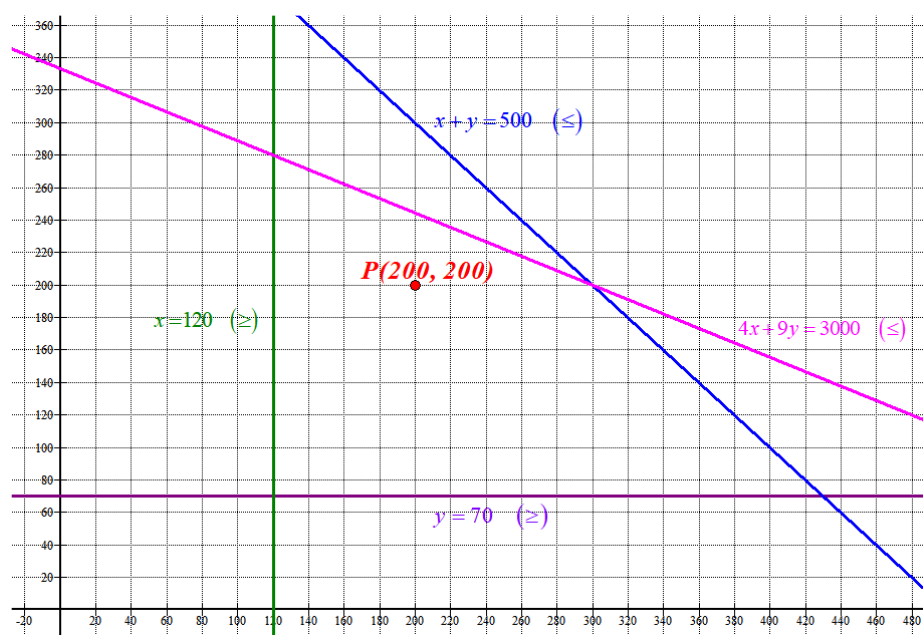
x	y = $\frac{3000 - 4x}{9}$
750	0
300	200

$$x = 120$$

x = 120	y
120	0
120	100

$$y = 70$$

x	y = 70
0	70
100	70



Comprobamos si el punto $P(200, 200)$ cumple las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 200 + 200 \leq 500 \\ 800 + 1800 \leq 3000 \\ 200 \geq 120; \quad 200 \geq 70 \end{array} \right\} \text{ Se cumplen todas}$$

La región factible es la región del plano que contiene el punto P y delimitada por las rectas dibujadas. La pintamos de rojo en la siguiente figura.



b) Valoramos la función objetivo en cada uno de los vértices en busca de unos ingresos máximos.

$$A(120, 70) \rightarrow I(120, 70) = 14140$$

$$B(120, 280) \rightarrow I(120, 280) = 31360$$

$$C(300, 200) \rightarrow I(300, 200) = 37400 \text{ €}$$

$$D(430, 70) \rightarrow I(430, 70) = 35840$$

Los ingresos máximos son de 37400 € que se obtienen con la fabricación de 300 ampollas de perfume y 200 de colonia.

4. Considere las funciones $f(x) = x^2 + ax + b$ y $g(x) = -x^2 + c$.

a) Calcule los valores de los parámetros a , b y c para que los gráficos de $f(x)$ y $g(x)$ se corten en los puntos $(-1, 3)$ y $(3, -5)$. [1,25 puntos]

b) Para $c = 4$, encuentre la ecuación de la recta tangente a $g(x)$ en el punto de abscisa $x = -1$. [1,25 puntos]

a) Las gráficas coinciden en $(-1, 3) \rightarrow f(-1) = g(-1) = 3 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} (-1)^2 + a(-1) + b = 3 \\ -(-1)^2 + c = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -a + b = 2 \\ c = 4 \end{cases}$$

$$\text{Las gráficas coinciden en } (3, -5) \rightarrow f(3) = g(3) = -5 \Rightarrow \begin{cases} 3^2 + 3a + b = -5 \\ -3^2 + c = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a + b = -14 \\ c = 4 \end{cases}$$

Juntamos las ecuaciones y resolvemos el sistema:

$$\begin{cases} -a + b = 2 \\ 3a + b = -14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3a + 3b = 6 \\ 3a + b = -14 \end{cases} \\ \hline 4b = -8 \Rightarrow \boxed{b = -2} \Rightarrow -a - 2 = 2 \Rightarrow \boxed{a = -4}$$

Los valores buscados son $a = -4$, $b = -2$ y $c = 4$.

b) Para $c = 4$ la función $g(x)$ queda $g(x) = -x^2 + 4$. Hallamos su derivada:

$$g(x) = -x^2 + 4 \Rightarrow g'(x) = -2x$$

La recta tangente en $x = -1$ de la gráfica de $g(x)$ tiene la expresión

$$y - g(-1) = g'(-1)(x - (-1))$$

Sustituimos x por -1 en la función y su derivada y obtenemos la ecuación de la recta tangente.

$$\left. \begin{aligned} g(-1) &= -(-1)^2 + 4 = 3 \\ g'(-1) &= -2(-1) = 2 \\ y - g(-1) &= g'(-1)(x - (-1)) \end{aligned} \right\} \Rightarrow y - 3 = 2(x + 1) \Rightarrow \boxed{y = 2x + 5}$$

5. Un triatlón consta de tres segmentos que hay que realizar consecutivamente practicando tres modalidades de deporte distintas: natación, ciclismo y carrera a pie. La distancia total que se recorrerá en el triatlón es de 75 km. Se sabe que el recorrido en bicicleta es igual a cuatro veces la distancia que hay que recorrer nadando y corriendo conjuntamente. Se sabe también que si sumamos 3 km a la distancia que se hace corriendo nos da lo mismo que cinco veces el recorrido que se hace nadando. Determine la distancia recorrida en cada modalidad.
[2,5 puntos]

Llamamos “x” a la distancia a recorrer nadando, “y” a la distancia a recorrer en bici y “z” a la distancia a recorrer corriendo.

“La distancia total que se recorrerá en el triatlón es de 75 km” $\rightarrow x + y + z = 75$

“El recorrido en bicicleta es igual a cuatro veces la distancia que se recorre nadando y corriendo conjuntamente” $\rightarrow y = 4(x + z)$

“Si sumamos 3 km a la distancia que se va a correr se obtiene lo mismo que cinco veces el recorrido que se hace nadando” $\rightarrow z + 3 = 5x$

Reunimos las ecuaciones en un sistema y resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 75 \\ y = 4(x + z) \\ z + 3 = 5x \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 4(x + z) + z = 75 \\ z + 3 = 5x \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 4x + 4z + z = 75 \\ z = 5x - 3 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 5x + 5z = 75 \\ z = 5x - 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + z = 15 \\ z = 5x - 3 \end{array} \right\} \Rightarrow x + 5x - 3 = 15 \Rightarrow 6x = 18 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x = 3} \Rightarrow \boxed{z = 15 - 3 = 12} \Rightarrow \boxed{y = 4(3 + 12) = 60}$$

El triatlón consta de 3 km nadando, 60 km en bicicleta y 12 nadando.

- 6.** La función $Q(x) = (x+1)^2 (32-x)$, donde $x \in [-1, 32]$, representa la producción, en kilogramos, de una hortaliza en un invernadero en función de la temperatura x , expresada en grados centígrados ($^{\circ}\text{C}$), que puede variar entre -1°C y 32°C .
- a)** Calcule cuál es la temperatura del invernadero con la que se obtiene la máxima producción. ¿Qué producción de hortaliza se obtendrá a esta temperatura? [1,25 puntos]
- b)** Calcule a qué temperaturas se alcanza el nivel mínimo de producción y cuál es este valor mínimo. [1,25 puntos]

a) Utilizamos la derivada.

$$Q(x) = (x+1)^2 (32-x) \Rightarrow Q'(x) = 2(x+1)(32-x) - (x+1)^2 =$$

$$= 64x - 2x^2 + 64 - 2x - (x^2 + 2x + 1) = -3x^2 + 60x + 63$$

$$Q'(x) = 0 \Rightarrow -3x^2 + 60x + 63 = 0 \Rightarrow x^2 - 20x - 21 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{20 \pm \sqrt{(-20)^2 + 84}}{2} = \frac{20 \pm 22}{2} = \begin{cases} \frac{20+22}{2} = 21 = x \\ \frac{20-22}{2} = -1 = x \end{cases}$$

Los dos valores obtenidos como puntos críticos de la función están en el dominio de definición.

Calculamos la derivada segunda y comprobamos los valores en los extremos del intervalo de definición $[-1, 32]$.

$$Q''(x) = -6x + 60 \Rightarrow \begin{cases} Q''(-1) = -6(-1) + 60 = 66 > 0 \rightarrow x = -1 \text{ es mínimo} \\ Q''(21) = -6(21) + 60 = -66 < 0 \rightarrow x = 21 \text{ es máximo} \end{cases}$$

Obtenemos la producción con -1°C , en 21°C y en 32°C .

$$Q(-1) = (-1+1)^2 (32+1) = 0$$

$$Q(21) = (21+1)^2 (32-21) = 5324$$

$$Q(32) = (32+1)^2 (32-32) = 0$$

La producción máxima se produce con 21°C y es de 5324 kg de hortalizas.

b) En el apartado anterior hemos visto que para -1°C y a 32°C la producción es 0 Kg. Esta es la producción mínima que se puede obtener.

La función $Q(x) = (x+1)^2 (32-x)$, $x \in [-1, 32]$ es siempre positiva en este intervalo pues es el producto de un cuadrado (positivo) y una resta que siempre es positiva en los valores $x \in [-1, 32]$.