



Proves d'accés a la universitat

Matemàtiques

Serie 2

Responda a CINCO de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué.

Cada cuestión vale 2 puntos.

Puede utilizar calculadora, pero no se autorizará el uso de calculadoras u otros aparatos que permitan almacenar datos o que puedan transmitir o recibir información.

1. Considere el plano $\pi: x + y + z = 1$ y la recta r que pasa por los puntos $P = (0, 0, 6)$ y

$$Q = (1, 2, 3).$$

a) Estudie la posición relativa de la recta r y el plano π .

[1 punto]

b) Calcule la distancia entre la recta r y el plano π .

[1 punto]

NOTA: Puede calcular la distancia de un punto de coordenadas (x_0, y_0, z_0) al plano de ecuación

$$Ax + By + Cz + D = 0 \text{ con la expresión } \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

2. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ -1 & -4 & 3 \\ 0 & -4 & 4 \end{pmatrix}$.

a) Compruebe que satisfacen la igualdad $A^2 - \frac{1}{2}A \cdot B = I$, donde I es la matriz identidad de orden 3.

[1 punto]

b) Haciendo uso de la anterior igualdad, encuentre la matriz inversa de A : A^{-1} .

[1 punto]

3. Considere el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x + y - z = 1 \\ 2x + ay = 2a \end{cases}$$

a) Discuta el sistema para los distintos valores del parámetro real a .

[1 punto]

b) Resuelva el sistema para el caso $a = 2$.

[1 punto]

4. Dadas las funciones $f(x)$, $f'(x)$, $g(x)$ y $g'(x)$ se conocen los siguientes valores:

x	$f(x)$	$f'(x)$	x	$g(x)$	$g'(x)$
0	2	1	0	1	1
1	0	-6	1	3	3

a) De la función $f(x)$ se sabe también que la pendiente de la recta tangente a un punto de abscisa x es $4x^3 - 9x^2 - 2x + 1$. Encuentre $f(x)$.

[1 punto]

b) Calcule $(g \circ f)'(1)$.

[1 punto]

5. En $\mathbb{R}^3$, sean la recta $r: \begin{cases} x - z = 2 \\ 2y + z = 4 \end{cases}$ y el punto $P = (0, 1, -1)$.

a) Calcule la ecuación general (es decir, la que tiene la forma $Ax + By + Cz = D$) del plano π perpendicular a la recta r y que pasa por el punto P .

[1 punto]

b) Calcule el punto simétrico del punto P respecto del plano $x + y + z = -3$.

[1 punto]

6. Sea la función $f(x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$.

a) Calcule una primitiva de la función $f(x)$.

[1 punto]

b) Calcule el área limitada por la función $f(x)$ y el eje de abscisas entre las abscisas $x = 0$ y

$$x = \frac{\pi}{4}.$$

[1 punto]

SOLUCIONES

1. Considere el plano $\pi : x + y + z = 1$ y la recta r que pasa por los puntos $P = (0, 0, 6)$ y $Q = (1, 2, 3)$.

a) Estudie la posición relativa de la recta r y el plano π .

[1 punto]

b) Calcule la distancia entre la recta r y el plano π .

[1 punto]

NOTA: Puede calcular la distancia de un punto de coordenadas (x_0, y_0, z_0) al plano de ecuación

$$Ax + By + Cz + D = 0 \text{ con la expresión } \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

a) Hallamos un vector director y la ecuación de la recta.

$$\left. \begin{array}{l} P(0, 0, 6) \in r \\ Q(1, 2, 3) \in r \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} P(0, 0, 6) \in r \\ \vec{v}_r = \overrightarrow{PQ} = (1, 2, 3) - (0, 0, 6) = (1, 2, -3) \end{array} \right\} \Rightarrow r : \begin{cases} x = \lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 6 - 3\lambda \end{cases} ; \lambda \in \mathbb{R}$$

Realizamos el producto escalar del vector director de la recta y el normal del plano.

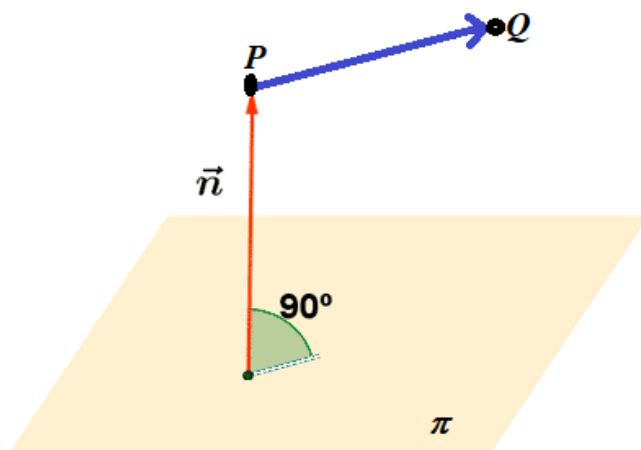
$$\left. \begin{array}{l} \pi : x + y + z = 1 \rightarrow \vec{n} = (1, 1, 1) \\ \vec{v}_r = (1, 2, -3) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{n} \cdot \vec{v}_r = (1, 1, 1) \cdot (1, 2, -3) = 1 + 2 - 3 = 0$$

Al ser el producto escalar nulo los vectores son perpendiculares, por lo que recta y plano son paralelos o la recta está contenida en el plano.

Comprobamos si el punto $P = (0, 0, 6)$ de la recta pertenece al plano.

$$\left. \begin{array}{l} \pi : x + y + z = 1 \\ \text{¿} P = (0, 0, 6) \in \pi? \end{array} \right\} \Rightarrow \text{¿} 0 + 0 + 6 = 1? \Rightarrow \text{¡No es cierto!}$$

Como el punto P no pertenece al plano podemos afirmar que recta y plano son paralelos.



- b) Como recta y plano son paralelos la distancia de la recta al plano es la distancia de cualquier punto de la recta al plano.

$$\left. \begin{array}{l} \pi : x + y + z - 1 = 0 \\ P = (0, 0, 6) \in r \end{array} \right\} \Rightarrow d(r, \pi) = d(P, \pi) = \frac{|0 + 0 + 6 - 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{5}{\sqrt{3}} \approx 2.887 u$$

La distancia de la recta r al plano π tiene un valor de $\frac{5}{\sqrt{3}} \approx 2.887$ unidades.

2. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ -1 & -4 & 3 \\ 0 & -4 & 4 \end{pmatrix}$.

a) Compruebe que satisfacen la igualdad $A^2 - \frac{1}{2}A \cdot B = I$, donde I es la matriz identidad de orden

3. [1 punto]

b) Haciendo uso de la anterior igualdad, encuentre la matriz inversa de A : A^{-1} . [1 punto]

a) Realizamos los cálculos indicados en la expresión $A^2 - \frac{1}{2}A \cdot B = I$.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0+1 & 1-2-1 & 1+1+1 \\ 0+0+1 & 0+4-1 & 0-2+1 \\ 1+0+1 & 1+2-1 & 1-1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ -1 & -4 & 3 \\ 0 & -4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-1+0 & 4-4-4 & -1+3+4 \\ 0+2+0 & 0+8-4 & 0-6+4 \\ 3+1+0 & 4+4-4 & -1-3+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 2 & 4 & -2 \\ 4 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^2 - \frac{1}{2}A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 2 & 4 & -2 \\ 4 & 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

b) Sacamos A como factor común de la igualdad.

$$A^2 - \frac{1}{2}A \cdot B = I \Rightarrow A \left(A - \frac{1}{2}B \right) = I$$

La matriz inversa de A es $A - \frac{1}{2}B$.

Hallamos la expresión de la matriz inversa.

$$\begin{aligned} A^{-1} &= A - \frac{1}{2}B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ -1 & -4 & 3 \\ 0 & -4 & 4 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1-3/2 & 1-2 & 1+1/2 \\ 1/2 & -2+2 & 1-3/2 \\ 1 & -1+2 & 1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & -1 & 3/2 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3. Considere el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x + y - z = 1 \\ 2x + ay = 2a \end{cases}$$

a) Discuta el sistema para los distintos valores del parámetro real a . [1 punto]

b) Resuelva el sistema para el caso $a = 2$. [1 punto]

a) La matriz de coeficientes del sistema es $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & a & 0 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & a & 0 & 2a \end{pmatrix}.$$

Averiguamos cuando se anula el determinante de la matriz de coeficientes.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & a & 0 \end{vmatrix} = 0 - 2 + a - 2 - 0 + a = 2a - 4$$

$$|A| = 0 \Rightarrow 2a - 4 = 0 \Rightarrow 2a = 4 \Rightarrow \boxed{a = 2}$$

Analizamos los dos casos distintos que se nos plantean.

CASO 1. $a \neq 2$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3. El rango de la matriz ampliada también es 3, al igual que el número de incógnitas. El sistema es compatible determinado (una única solución).

CASO 2. $a = 2$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango es menor de 3.

La matriz de coeficientes queda $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. Consideramos el menor de orden 2 que

resulta de quitar la primera fila y la primera columna $\rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$. El rango de A es 2.

La matriz ampliada queda $A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. Consideramos el menor de orden 3 que

resulta de quitar la primera columna (igual que la segunda columna) $\rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -4 + 2 + 0 + 6 - 4 - 0 = 0$. Como este determinante es nulo el rango de A/B es

menor de 3, por lo que es 2, igual que el rango de A , pero menor que el número de incógnitas. El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

b) Para $a = 2$ el sistema es compatible indeterminado. Lo resolvemos.

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x + y - z = 1 \\ 2x + 2y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 3 \\ x + y - z = 1 \\ x + y = 2 \rightarrow y = 2 - x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2 - x + z = 3 \\ x + 2 - x - z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 3 - 2 = 1 \\ 2 - 1 = z \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{z=1} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x = \lambda \\ y = 2 - \lambda; \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 1 \end{cases}}$$

Para $a = 2$ las infinitas soluciones del sistema tienen la expresión $x = \lambda$; $y = 2 - \lambda$; $z = 1$, siendo $\lambda \in \mathbb{R}$.

4. Dadas las funciones $f(x)$, $f'(x)$, $g(x)$ y $g'(x)$ se conocen los siguientes valores:

x	$f(x)$	$f'(x)$	x	$g(x)$	$g'(x)$
0	2	1	0	1	1
1	0	-6	1	3	3

a) De la función $f(x)$ se sabe también que la pendiente de la recta tangente a un punto de abscisa x es $4x^3 - 9x^2 - 2x + 1$. Encuentre $f(x)$. [1 punto]

b) Calcule $(g \circ f)'(1)$. [1 punto]

a) Si la pendiente de la recta tangente a un punto de abscisa x es $4x^3 - 9x^2 - 2x + 1$ se cumple que la derivada de la función es $f'(x) = 4x^3 - 9x^2 - 2x + 1$. Hallamos la función calculando la primitiva de la derivada.

$$f'(x) = 4x^3 - 9x^2 - 2x + 1 \Rightarrow f(x) = \int 4x^3 - 9x^2 - 2x + 1 dx = x^4 - 3x^3 - x^2 + x + K$$

Determinamos el valor de K . Usando los valores de la tabla

x	$f(x)$	$f'(x)$
0	2	1
1	0	-6

sabemos que

$$f(0) = 2 \text{ y } f(1) = 0.$$

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= x^4 - \frac{9}{3}x^3 - x^2 + x + K \\ f(0) &= 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2 = 0^4 - 3 \cdot 0^3 - 0^2 + 0 + K \Rightarrow \boxed{K = 2}$$

La función tiene la expresión $f(x) = x^4 - 3x^3 - x^2 + x + 2$.

Esta función cumple también que $f(1) = 0$.

$$f(x) = x^4 - 3x^3 - x^2 + x + 2 \Rightarrow f(1) = 1^4 - 3 \cdot 1^3 - 1^2 + 1 + 2 = 1 - 3 - 1 + 1 + 2 = 0$$

b) Usamos que $(g \circ f)'(1) = g'(f(1)) \cdot f'(1)$ y los datos proporcionados en las tablas del enunciado.

$$\left. \begin{aligned} (g \circ f)'(1) &= g'(f(1)) \cdot f'(1) \\ \text{Tabla} \rightarrow f'(1) &= -6 \\ \text{Tabla} \rightarrow f(1) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow (g \circ f)'(1) = g'(0) \cdot (-6) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Tabla} \\ g'(0) = 1 \end{array} \right\} = 1 \cdot (-6) = -6$$

Hemos comprobado que $(g \circ f)'(1) = -6$.

5. En $\mathbb{R}^3$, sean la recta $r: \begin{cases} x - z = 2 \\ 2y + z = 4 \end{cases}$ y el punto $P = (0, 1, -1)$.

a) Calcule la ecuación general (es decir, la que tiene la forma $Ax + By + Cz = D$) del plano π perpendicular a la recta r y que pasa por el punto P . [1 punto]

b) Calcule el punto simétrico del punto P respecto del plano $x + y + z = -3$. [1 punto]

a) Si el plano es perpendicular a la recta el vector director de la recta es un vector normal del plano. Hallamos un vector director de la recta.

$$r: \begin{cases} x - z = 2 \\ 2y + z = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 + z \\ 2y = 4 - z \rightarrow y = \frac{4}{2} - \frac{1}{2}z \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 2 - \frac{1}{2}\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_r(2, 2, 0) \\ \vec{v}_r = \left(1, -\frac{1}{2}, 1\right) \end{cases}$$

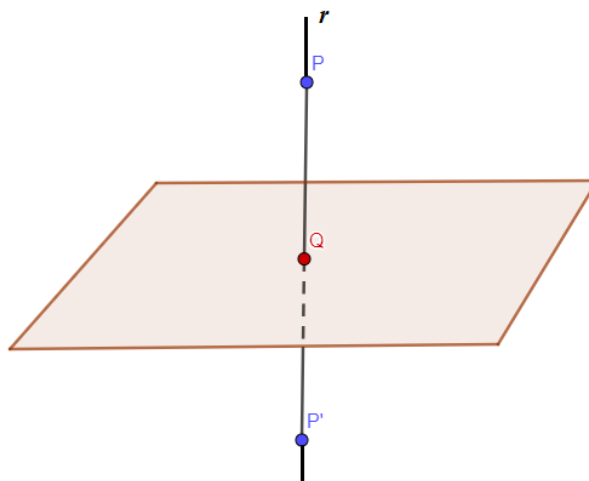
Hallamos la ecuación del plano que pasa por $P = (0, 1, -1)$ y con vector normal $\vec{v}_r = \left(1, -\frac{1}{2}, 1\right)$.

$$\left. \begin{array}{l} P = (0, 1, -1) \in \pi \\ \vec{n} = \vec{v}_r = \left(1, -\frac{1}{2}, 1\right) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} P = (0, 1, -1) \in \pi \\ \pi: x - \frac{1}{2}y + z + D = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 0 - \frac{1}{2} \cdot 1 - 1 + D = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{3}{2} + D = 0 \Rightarrow D = \frac{3}{2} \Rightarrow \pi: x - \frac{1}{2}y + z + \frac{3}{2} = 0 \Rightarrow \boxed{\pi: 2x - y + 2z + 3 = 0}$$

La ecuación del plano buscado es $\pi: 2x - y + 2z + 3 = 0$.

b) Obtenemos el punto P' simétrico de P respecto del plano usando los pasos indicados en el dibujo.



Hallamos la recta r perpendicular al plano $x + y + z = -3$ que pasa por el punto P . Sabemos que el vector normal del plano es un vector director de la recta.

$$x + y + z = -3 \Rightarrow \vec{n} = (1, 1, 1)$$

$$\left. \begin{array}{l} P(0, 1, -1) \in r \\ \vec{v}_r = \vec{n} = (1, 1, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow r: \begin{cases} x = \alpha \\ y = 1 + \alpha \\ z = -1 + \alpha \end{cases}$$

Hallamos el punto Q intersección de recta y plano.

$$\left. \begin{array}{l} r: \begin{cases} x = \alpha \\ y = 1 + \alpha \\ z = -1 + \alpha \end{cases} \\ x + y + z = -3 \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha + 1 + \alpha - 1 + \alpha = -3 \Rightarrow 3\alpha = -3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{-3}{3} = -1 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 - 1 = 0 \\ z = -1 - 1 = -2 \end{cases} \Rightarrow Q(-1, 0, -2)$$

El punto P' se obtiene sumando al punto Q el vector $\overrightarrow{PQ}$.

$$\left. \begin{array}{l} Q(-1, 0, -2) \\ P(0, 1, -1) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{PQ} = (-1, 0, -2) - (0, 1, -1) = (-1, -1, -1)$$

$$P' = Q + \overrightarrow{PQ} = (-1, 0, -2) + (-1, -1, -1) = (-2, -1, -3)$$

El punto P' simétrico del punto P respecto del plano $x + y + z = -3$ tiene coordenadas $P'(-2, -1, -3)$.

6. Sea la función $f(x) = \frac{\text{sen}x}{\cos^2 x}$.

a) Calcule una primitiva de la función $f(x)$. [1 punto]

b) Calcule el área limitada por la función $f(x)$ y el eje de abscisas entre las abscisas $x = 0$ y $x = \frac{\pi}{4}$. [1 punto]

a) Calculamos la primitiva de la función usando un cambio de variable.

$$F(x) = \int f(x) dx = \int \frac{\text{sen}x}{\cos^2 x} dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Cambio de variable} \\ \cos x = t \rightarrow -\text{sen}x dx = dt \rightarrow \\ \rightarrow dx = \frac{dt}{-\text{sen}x} \end{array} \right\} = \int \frac{\cancel{\text{sen}x}}{t^2} \cdot \frac{dt}{-\cancel{\text{sen}x}} =$$

$$= - \int \frac{1}{t^2} \cdot dt = - \int t^{-2} \cdot dt = - \frac{t^{-1}}{-1} = t^{-1} = \frac{1}{t} = \frac{1}{\cos x} + K$$

b) Buscamos los puntos de corte de la función con el eje de abscisas.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = \frac{\text{sen}x}{\cos^2 x} \\ \text{Eje OX} \rightarrow y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\text{sen}x}{\cos^2 x} = 0 \Rightarrow \text{sen}x = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pi \\ x = 2\pi \\ \dots \end{array} \right.$$

La gráfica de la función no corta el eje de abscisas entre $x = 0$ y $x = \frac{\pi}{4}$.

Como en el intervalo pedido la función es positiva el área limitada por la función $f(x)$ y el eje de abscisas entre las abscisas $x = 0$ y $x = \frac{\pi}{4}$ es el valor de la

integral definida entre $x = 0$ y $x = \frac{\pi}{4}$ de la función.

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_0^{\pi/4} f(x) dx = \int_0^{\pi/4} \frac{\text{sen}x}{\cos^2 x} dx = \left[\frac{1}{\cos x} \right]_0^{\pi/4} = \\ &= \frac{1}{\cos \frac{\pi}{4}} - \frac{1}{\cos 0} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} - \frac{1}{1} = \frac{2}{\sqrt{2}} - 1 = -1 + \sqrt{2} \approx 0.41 u^2 \end{aligned}$$

El área limitada por la función $f(x)$ y el eje de abscisas entre las abscisas $x = 0$ y $x = \frac{\pi}{4}$ tiene un valor de $-1 + \sqrt{2} \approx 0.41$ unidades cuadradas.

