



Proves d'accés a la universitat

Matemàtiques

Serie 3

Responda a CINCO de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué.

Cada cuestión vale 2 puntos.

Puede utilizar calculadora, pero no se autorizará el uso de calculadoras u otros aparatos que permitan almacenar datos o que puedan transmitir o recibir información.

1. Considere la función polinómica $f(x) = x^3 - ax^2 + bx + c$.

a) Calcule los valores de los parámetros a , b y c , sabiendo que la función tiene un extremo relativo en el punto de abscisa $x = 1$ y que la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x = 0$ es la recta $y = x + 3$.

[1 punto]

b) Para los valores $a = 2$, $b = 1$ y $c = 3$, calcule las abscisas de los extremos relativos de la función y clasifíquelos.

[1 punto]

2. Considere el siguiente sistema de ecuaciones lineales, que depende del parámetro real a .

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x + y - z = 1 \\ 2x + ay = 2a \end{cases}$$

a) Discuta el sistema para los distintos valores del parámetro a .

[1 punto]

b) Resuelva el sistema para el caso $a = 1$.

[1 punto]

3. Considere el plano que tiene como vectores directores $u = (-1, 3, 2)$ y $v = (2, 1, 0)$ y que pasa por el punto $A = (1, 0, 3)$.

a) Calcule la ecuación de la recta que es perpendicular al plano y pasa por el punto A .

[1 punto]

b) Calcule la distancia del punto $P = (1, 5, 0)$ al plano.

[1 punto]

NOTA: Puede calcular la distancia de un punto de coordenadas (x_0, y_0, z_0) al plano de

ecuación $Ax + By + Cz + D = 0$ con la expresión $\frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

4. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ \alpha & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, en la que α es un parámetro real.

a) Existe algún valor $\alpha \in \mathbb{R}$ de tal que A no tenga inversa para este valor?
[1 punto]

b) Calcule la matriz inversa de A^2 para $\alpha = 0$.
[1 punto]

5. Considere los puntos del espacio tridimensional $A = (1, 1, 0)$, $B = (3, 5, 0)$ y $C = (1, 0, 0)$ y la recta $r : x = y - 1 = \frac{z}{2}$.

a) Encuentre el punto de intersección de la recta r con el plano que pasa por los puntos A , B y C .
[1 punto]

b) Encuentre los puntos P de la recta r para los cuales el tetraedro de vértices P , A , B y C tiene un volumen de $2u^3$.
[1 punto]

NOTA: El volumen de un tetraedro de vértices P , Q , R y S puede calcularse con la expresión

$$\frac{1}{6} \left| \det(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}, \overrightarrow{PS}) \right|.$$

6. Sean las funciones $f(x) = x^2 - 1$ y $g(x) = 3 - x^2$.

a) Esboce las gráficas de las parábolas $y = f(x)$ e $y = g(x)$ en un mismo sistema de ejes cartesianos y encuentre los puntos de corte con el eje de abscisas, los vértices y los puntos de corte entre las dos gráficas.
[1 punto]

b) Calcule el área de la región del semiplano $y \geq 0$ comprendida entre las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$.
[1 punto]

SOLUCIONES

1. Considere la función polinómica $f(x) = x^3 - ax^2 + bx + c$.

a) Calcule los valores de los parámetros a , b y c , sabiendo que la función tiene un extremo relativo en el punto de abscisa $x = 1$ y que la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x = 0$ es la recta $y = x + 3$. [1 punto]

b) Para los valores $a = 2$, $b = 1$ y $c = 3$, calcule las abscisas de los extremos relativos de la función y clasifíquelos. [1 punto]

a) Si función tiene un extremo relativo en el punto de abscisa $x = 1$ significa que $f'(1) = 0$.

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = 3x^2 - 2ax + b \\ f'(1) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 0 = 3 \cdot 1^2 - 2a \cdot 1 + b \Rightarrow \boxed{3 - 2a + b = 0}$$

Si la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x = 0$ es la recta $y = x + 3$ significa que la función y la recta tienen la misma pendiente y coinciden en $x = 0$.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = x^3 - ax^2 + bx + c \\ y = x + 3 \end{array} \right\} \Rightarrow f(0) = 0 + 3 \Rightarrow 0^3 - a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 3 \Rightarrow \boxed{c = 3}$$

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = 3x^2 - 2ax + b \rightarrow f'(0) = b \\ y = 1 \cdot x + 3 \rightarrow \text{pendiente} = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow f'(0) = b = 1 \Rightarrow \boxed{b = 1}$$

Juntando todo lo obtenido obtenemos el valor de a .

$$\left. \begin{array}{l} 3 - 2a + b = 0 \\ b = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow 3 - 2a + 1 = 0 \Rightarrow 4 = 2a \Rightarrow \boxed{a = 2}$$

Los valores que cumplen lo pedido son $a = 2$, $b = 1$ y $c = 3$.

b) Para los valores $a = 2$, $b = 1$ y $c = 3$ la función queda $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 3$.

Hallamos los puntos críticos de la función usando la derivada.

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = 3x^2 - 4x + 1 \\ f'(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 3x^2 - 4x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1}}{2 \cdot 3} = \frac{4 \pm 2}{6} = \begin{cases} \frac{4+2}{6} = \boxed{1 = x} \\ \frac{4-2}{6} = \boxed{\frac{1}{3} = x} \end{cases}$$

Clasificamos los puntos críticos usando el signo de la segunda derivada.

$$f'(x) = 3x^2 - 4x + 1 \Rightarrow f''(x) = 6x - 4 \Rightarrow \begin{cases} f''(1) = 6(1) - 4 = 2 > 0 \rightarrow \text{Mínimo} \\ f''\left(\frac{1}{3}\right) = 6\left(\frac{1}{3}\right) - 4 = -2 < 0 \rightarrow \text{Máximo} \end{cases}$$

La función presenta un máximo relativo en $x = \frac{1}{3}$ y un mínimo relativo en $x = 1$.

2. Considere el siguiente sistema de ecuaciones lineales, que depende del parámetro real a .

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x + y - z = 1 \\ 2x + ay = 2a \end{cases}$$

a) Discuta el sistema para los distintos valores del parámetro a . [1 punto]

b) Resuelva el sistema para el caso $a = 1$. [1 punto]

a) El sistema tiene asociada la matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & a & 0 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & a & 0 & 2a \end{pmatrix}.$$

Averiguamos cuando se anula el determinante de la matriz de coeficientes.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & a & 0 \end{vmatrix} = 0 - 2 + a - (2 + 0 - a) = -4 + 2a$$

$$|A| = 0 \Rightarrow -4 + 2a = 0 \Rightarrow 2a = 4 \Rightarrow \boxed{a = 2}$$

Estudiamos por separado las dos situaciones distintas que se nos plantean.

CASO 1. $a \neq 2$

En este caso el determinante de la matriz A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada y el número de incógnitas. El sistema es compatible determinado (una única solución).

CASO 2. $a = 2$

En este caso el determinante de la matriz A es nulo y su rango es menor de 3.

La matriz de coeficientes queda $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. Esta matriz tiene rango 2 pues tiene un

menor de orden 2 con determinante no nulo, consideramos el menor que resulta de quitar la fila y columna primeras $\rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$.

La matriz ampliada queda $A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. Consideramos el menor de orden 3 que

resulta de quitar la primera columna (igual que la segunda columna) $\rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -4 + 2 + 0 + 6 - 4 - 0 = 0$. Al ser nulo el determinante de este menor el rango de

la matriz ampliada no es 3. El rango de A/B es 2.

Rango de la matriz ampliada igual al rango de la matriz de coeficientes (2) menor que el número de incógnitas (3). El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

b) Para $a = 1$ el sistema queda
$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x + y - z = 1 \\ 2x + y = 2 \end{cases} . \text{ Lo resolvemos.}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x + y - z = 1 \\ 2x + y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 3 \\ x + y - z = 1 \\ y = 2 - 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2 - 2x + z = 3 \\ x + 2 - 2x - z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x + z = 1 \\ -x - z = -1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z = 1 + x \\ -x - z = -1 \end{cases} \Rightarrow -x - 1 - x = -1 \Rightarrow -2x = 0 \Rightarrow \boxed{x = 0} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{z = 1 + 0 = 1} \\ \boxed{y = 2 - 2 \cdot 0 = 2} \end{cases}$$

La solución del sistema para $a = 1$ es $x = 0, y = 2, z = 1$.

3. Considere el plano que tiene como vectores directores $u = (-1, 3, 2)$ y $v = (2, 1, 0)$ y que pasa por el punto $A = (1, 0, 3)$.

a) Calcule la ecuación de la recta que es perpendicular al plano y pasa por el punto A. [1 punto]

b) Calcule la distancia del punto $P = (1, 5, 0)$ al plano. [1 punto]

NOTA: Puede calcular la distancia de un punto de coordenadas (x_0, y_0, z_0) al plano de ecuación

$$Ax + By + Cz + D = 0 \text{ con la expresión } \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

a) Hallamos la ecuación del plano π que tiene como vectores directores $\vec{u} = (-1, 3, 2)$ y $\vec{v} = (2, 1, 0)$ y que pasa por el punto $A(1, 0, 3)$.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} = (-1, 3, 2) \\ \vec{v} = (2, 1, 0) \\ A(1, 0, 3) \end{array} \right\} \Rightarrow \pi: \begin{vmatrix} x-1 & y & z-3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 4y - (z-3) - 6(z-3) - 2(x-1) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4y - z + 3 - 6z + 18 - 2x + 2 = 0 \Rightarrow \boxed{\pi: -2x + 4y - 7z + 23 = 0}$$

La recta r perpendicular al plano $\pi: -2x + 4y - 7z + 23 = 0$ tiene como vector director el vector normal del plano $\vec{v}_r = \vec{n} = (-2, 4, -7)$.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = \vec{n} = (-2, 4, -7) \\ A(1, 0, 3) \in r \end{array} \right\} \Rightarrow r: \begin{cases} x = 1 - 2\lambda \\ y = 4\lambda \\ z = 3 - 7\lambda \end{cases}; \lambda \in \mathbb{R}$$

b) Usamos la fórmula de la distancia de un punto a un plano.

$$\left. \begin{array}{l} \pi: -2x + 4y - 7z + 23 = 0 \\ P(1, 5, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow d(P, \pi) = \frac{|-2 \cdot 1 + 4 \cdot 5 - 7 \cdot 0 + 23|}{\sqrt{(-2)^2 + 0^2 + (-7)^2}} = \frac{41}{\sqrt{63}}$$

La distancia del punto P al plano tiene un valor de $\frac{41}{\sqrt{63}} \simeq 4.94$ unidades.

4. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ \alpha & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, en la que α es un parámetro real.

a) Existe algún valor $\alpha \in \mathbb{R}$ de tal que A no tenga inversa para este valor? [1 punto]

b) Calcule la matriz inversa de A^2 para $\alpha = 0$. [1 punto]

a) Para que la matriz no tenga inversa su determinante debe ser nulo.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ \alpha & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 + 0 - \alpha^2 - 0 - 0 - 1 = -\alpha^2 - 1$$

$$|A| = 0 \Rightarrow -\alpha^2 - 1 = 0 \Rightarrow \alpha^2 = -1 \Rightarrow \alpha = \sqrt{-1} = \text{No existe}$$

El determinante de la matriz A nunca se anula y por tanto, no existe ningún valor de α para el cual la matriz A no tenga inversa.

b) Para $\alpha = 0$ la matriz queda $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Determinamos la expresión de la matriz A^2 .

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0+0 & 0+0-0 & 0+0+0 \\ 0+0-2 & 0+0+1 & 0+0-1 \\ 2-0+2 & 0+0-1 & 0+1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Calculamos la matriz inversa de A^2 .

$$(A^2)^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^2)^T}{|A^2|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Considere los puntos del espacio tridimensional $A = (1, 1, 0)$, $B = (3, 5, 0)$ y $C = (1, 0, 0)$ y la recta $r : x = y - 1 = \frac{z}{2}$.

a) Encuentre el punto de intersección de la recta r con el plano que pasa por los puntos A , B y C . [1 punto]

b) Encuentre los puntos P de la recta r para los cuales el tetraedro de vértices P , A , B y C tiene un volumen de $2u^3$. [1 punto]

NOTA: El volumen de un tetraedro de vértices P , Q , R y S puede calcularse con la expresión

$$\frac{1}{6} \left| \det(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}, \overrightarrow{PS}) \right|.$$

a) Hallamos la ecuación del plano que pasa por los puntos A , B y C .

$$\left. \begin{array}{l} A(1,1,0) \\ B(3,5,0) \\ C(1,0,0) \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (3,5,0) - (1,1,0) = (2,4,0) \\ \overrightarrow{AC} = (1,0,0) - (1,1,0) = (0,-1,0) \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} = \overrightarrow{AB} = (2,4,0) \\ \vec{v} = \overrightarrow{AC} = (0,-1,0) \\ C(1,0,0) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \pi : \begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -2z = 0 \Rightarrow \boxed{\pi : z = 0}$$

Obtenemos las ecuaciones paramétricas de la recta r .

$$r : \frac{x-0}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-0}{2} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \vec{u}_r = (1,1,2) \\ P_r(0,1,0) \end{array} \right. \Rightarrow r : \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 2\lambda \end{cases} ; \lambda \in \mathbb{R}$$

Hallamos el punto de intersección de recta y plano resolviendo el sistema formado por sus respectivas ecuaciones.

$$\left. \begin{array}{l} \pi : z = 0 \\ r : \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 2\lambda \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow 2\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 + 0 = 1 \\ z = 2 \cdot 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{P_r(0,1,0)}$$

El punto de corte de recta y plano es el punto $P_r(0,1,0)$.

b) Un punto de la recta r tiene coordenadas $(\lambda, 1 + \lambda, 2\lambda)$.

Utilizamos la fórmula del volumen del tetraedro para los puntos P , A , B y C .

$$\left. \begin{array}{l} A(1,1,0) \\ B(3,5,0) \\ C(1,0,0) \\ P(\lambda, 1 + \lambda, 2\lambda) \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (3,5,0) - (1,1,0) = (2,4,0) \\ \overrightarrow{AC} = (1,0,0) - (1,1,0) = (0,-1,0) \\ \overrightarrow{AP} = (\lambda, 1 + \lambda, 2\lambda) - (1,1,0) = (\lambda - 1, \lambda, 2\lambda) \end{array} \right.$$

$$\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AP}) = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ \lambda - 1 & \lambda & 2\lambda \end{vmatrix} = -4\lambda$$

$$\text{Volumen } PABC = \frac{1}{6} |\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AP})| = \frac{1}{6} |-4\lambda| = \frac{4|\lambda|}{6} = \frac{2|\lambda|}{3}$$

Obtenemos los valores del parámetro λ para los cuales este volumen vale 2 unidades cúbicas.

$$\text{Volumen } PABC = 2 \Rightarrow \frac{2|\lambda|}{3} = 2 \Rightarrow |\lambda| = 3 \Rightarrow \begin{cases} \lambda = -3 \\ \lambda = 3 \end{cases}$$

Para $\lambda = -3$ el punto buscado es $P_1(-3, 1-3, 2(-3)) = (-3, -2, -6)$.

Para $\lambda = 3$ el punto buscado es $P_2(3, 1+3, 2 \cdot 3) = (3, 4, 6)$.

6. Sean las funciones $f(x) = x^2 - 1$ y $g(x) = 3 - x^2$.

- a) Esboce las gráficas de las parábolas $y = f(x)$ e $y = g(x)$ en un mismo sistema de ejes cartesianos y encuentre los puntos de corte con el eje de abscisas, los vértices y los puntos de corte entre las dos gráficas. [1 punto]
- b) Calcule el área de la región del semiplano $y \geq 0$ comprendida entre las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$. [1 punto]

a) Las gráficas de las dos funciones son dos parábolas. Hallamos los puntos de corte de ambas gráficas.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = x^2 - 1 \\ g(x) = 3 - x^2 \\ f(x) = g(x) \end{array} \right\} \Rightarrow x^2 - 1 = 3 - x^2 \Rightarrow 2x^2 = 4 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow \boxed{x = \pm\sqrt{2}}$$

Hallamos los puntos de corte con el eje de abscisas.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = x^2 - 1 \\ \text{Eje abscisas} \rightarrow y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \sqrt{1} = \pm 1 \Rightarrow A(-1, 0) \text{ y } B(1, 0)$$

$$\left. \begin{array}{l} g(x) = 3 - x^2 \\ \text{Eje abscisas} \rightarrow y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 3 - x^2 = 0 \Rightarrow 3 = x^2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3} \Rightarrow C(-\sqrt{3}, 0) \text{ y } D(\sqrt{3}, 0)$$

Hallamos los vértices de las parábolas usando la derivada.

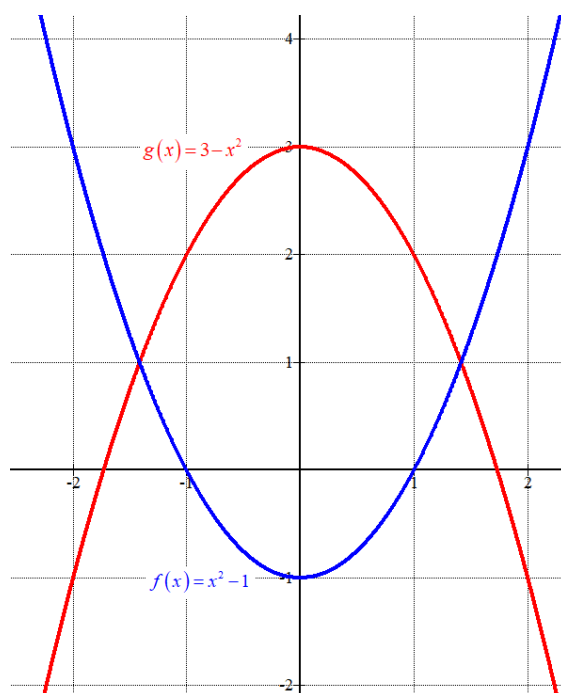
$$\left. \begin{array}{l} f(x) = x^2 - 1 \Rightarrow f'(x) = 2x \\ f'(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow V_f(0, -1)$$

$$\left. \begin{array}{l} g(x) = 3 - x^2 \Rightarrow g'(x) = -2x \\ g'(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow -2x = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow V_g(0, 3)$$

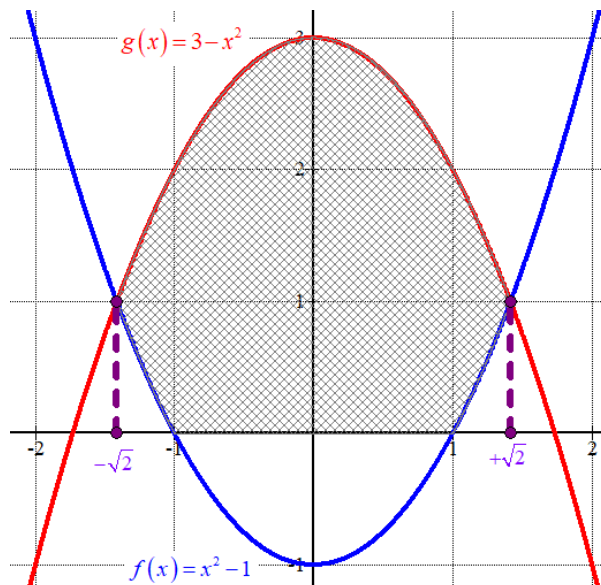
Obtenemos una tabla de valores y dibujamos ambas gráficas.

x	$f(x) = x^2 - 1$
-2	3
-1	0
0	-1
1	0
2	3

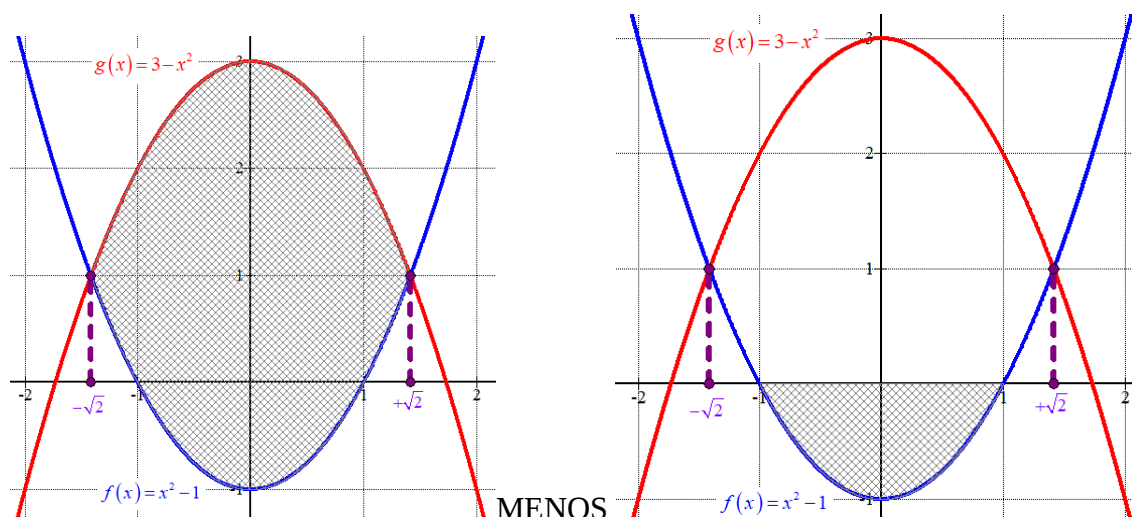
x	$g(x) = 3 - x^2$
-2	-1
-1	2
0	3
1	2
2	-1



b) Nos piden calcular el área de la zona coloreada del dibujo.



Calculamos el área hallando el área de la región del plano limitada por ambas gráficas menos el área de la región limitada entre el eje de abscisas y la gráfica de la función $f(x) = x^2 - 1$.



$$\text{Área grande} = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} g(x) - f(x) dx = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} 3 - x^2 - (x^2 - 1) dx = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} 4 - 2x^2 dx = \left[4x - \frac{2}{3}x^3 \right]_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} =$$

$$= \left[4\sqrt{2} - \frac{2}{3}\sqrt{2}^3 \right] - \left[4(-\sqrt{2}) - \frac{2}{3}(-\sqrt{2})^3 \right] = 4\sqrt{2} - \frac{4}{3}\sqrt{2} + 4\sqrt{2} - \frac{4}{3}\sqrt{2} = \frac{16\sqrt{2}}{3}$$

$$\text{Área pequeña} = \left| \int_{-1}^1 f(x) dx \right| = \left| \int_{-1}^1 x^2 - 1 dx \right| = \left| \left[\frac{x^3}{3} - x \right]_{-1}^1 \right| = \left| \left[\frac{1}{3} - 1 \right] - \left[\frac{(-1)^3}{3} - (-1) \right] \right| = \left| \frac{-4}{3} \right| = \frac{4}{3}$$

El área de la región del semiplano $y \geq 0$ comprendida entre las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$ tiene un valor de $\frac{16\sqrt{2}}{3} - \frac{4}{3} \approx 6.21$ unidades cuadradas.