



Proves d'accés a la universitat

Matemàtiques

Sèrie 4

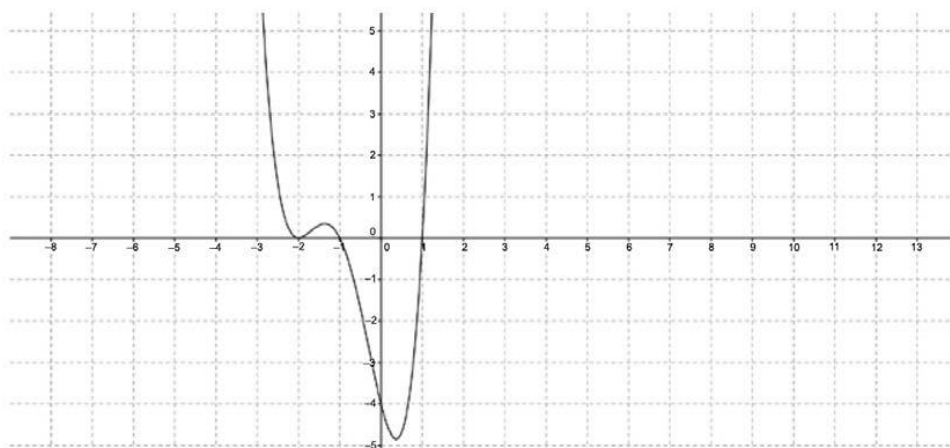
Responda a CUATRO de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué.

Cada cuestión vale 2,5 puntos.

Puede utilizar calculadora, pero no se permite el uso de calculadoras u otros aparatos que pueden almacenar datos o que pueden transmitir o recibir información.

Puede utilizar las páginas en blanco (páginas 14 y 15) para hacer esquemas, borradores, etc., o para acabar de responder a alguna cuestión si necesita más espacio. En este último caso, debe indicarlo claramente al final de la página de la cuestión correspondiente.

1. Sean las funciones $f(x) = x^3$ y $g(x) = a \cdot x^2$ donde a es un número real positivo.
 - a) Encuentre, en función del parámetro a , los puntos de corte entre las dos curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$ y haga un esbozo de la región limitada por las dos gráficas. [1,25 puntos]
 - b) Calcule el valor de a para que el área comprendida entre $y = f(x)$ e $y = g(x)$ sea $\frac{27}{4} u^2$. [1,25 puntos]
2. Un avión se desplace desde un punto $A = (0, 3, 1)$ hacia una plataforma plana de ecuación $\pi: x - 2y + z = 1$ siguiendo una recta r paralela al vector $\mathbf{v} = (1, -1, 0)$.
 - a) Calcule las coordenadas del punto de contacto B del avión con el plano y la distancia recorrida. [1,25 puntos]
 - b) Calcule la ecuación general del plano perpendicular a la plataforma y que contiene la recta r seguida por el avión desde el punto A . [1,25 puntos]
3. Sea $f(x)$ una función derivable cuya gráfica pasa por el punto $(0, 1)$. La gráfica de su derivada, $f'(x)$, es la que se muestra en la figura.

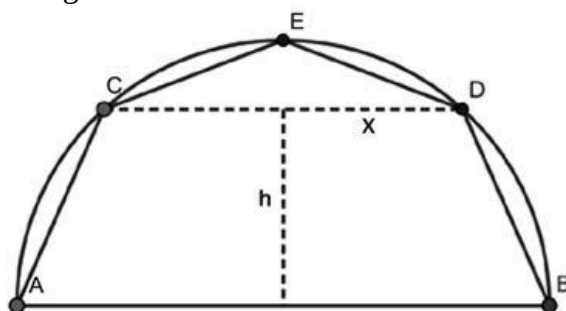


- a) Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)$ en el punto de la gráfica de abscisa $x = 0$. [1,25 puntos]
- b) Encuentre las abscisas de los puntos singulares de la función $f(x)$ y clasifíquelos. [1,25 puntos]

4. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} a & -3 & 0 \\ 4 & a-7 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, en la que a es un parámetro real.

- a) Estudie el rango de la matriz A para los distintos valores del parámetro a . [1,25 puntos]
- b) Compruebe que para $a = 4$ la matriz A es invertible y que se verifica que $A^{-1} = A^2$. [1,25 puntos]

5. Una empresa está trabajando en el diseño de unas cápsulas de café. La empresa ha construido la sección transversal de las cápsulas inscribiéndola en una semicircunferencia de radio 1, trazando a continuación una cuerda CD paralela al diámetro AB e incorporando el punto E en el punto medio del arco CD . De esta manera queda trazado el pentágono $ACEDB$, tal como se muestra en la figura.



- a) Exprese en función de x y h el área del pentágono $ACEDB$. [1,25 puntos]
- b) ¿Cuál debe ser la distancia (indicada en la figura por h) a la que debe situarse la cuerda CD de AB para que el área del pentágono $ACEDB$ sea máxima? [1,25 puntos]

6. Sean las rectas r y s , expresadas por $\frac{x-3}{2} = y = z-1$ y $(\mu, -\mu, \mu)$, respectivamente.

- a) Determine la posición relativa de las rectas. [1,25 puntos]
- b) Calcule la distancia entre la recta r y la recta s . [1,25 puntos]

SOLUCIONES

1. Sean las funciones $f(x) = x^3$ y $g(x) = a \cdot x^2$ donde a es un número real positivo.
- a) Encuentre, en función del parámetro a , los puntos de corte entre las dos curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$ y haga un esbozo de la región limitada por las dos gráficas. [1,25 puntos]
- b) Calcule el valor de a para que el área comprendida entre $y = f(x)$ e $y = g(x)$ sea $\frac{27}{4} u^2$. [1,25 puntos]

a) Igualamos las expresiones de las dos funciones y resolvemos la ecuación.

$$f(x) = g(x) \Rightarrow x^3 = a \cdot x^2 \Rightarrow x^3 - a \cdot x^2 = 0 \Rightarrow x^2(x - a) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x - a = 0 \Rightarrow x = a \end{cases}$$

$$x = 0 \rightarrow f(0) = 0 \rightarrow P(0, 0)$$

$$x = a \rightarrow f(a) = a^3 \rightarrow Q(a, a^3)$$

Los puntos de corte de ambas gráficas son $P(0, 0)$ y $Q(a, a^3)$.

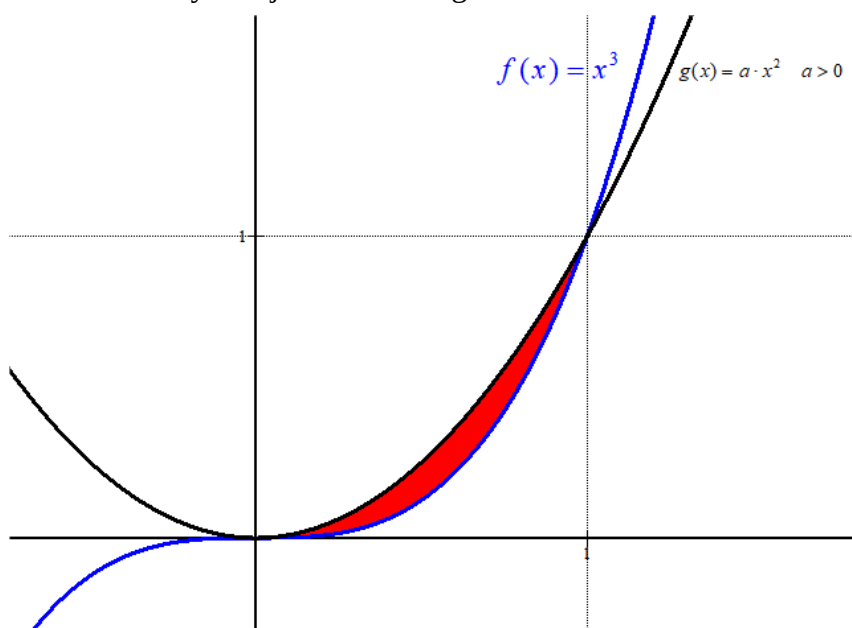
Completamos una tabla de valores y dibujamos las dos gráficas.

$$f(x) = x^3$$

x	$y = x^3$
-2	-8
-1	-1
0	0
1	1
2	8

$$g(x) = a \cdot x^2 \quad a > 0$$

x	$y = x^2 \quad (a=1)$
-2	4
-1	1
0	0
1	1



b) El área del recinto rojo es el valor de la integral definida entre 0 y a de $g(x) - f(x)$.

$$\text{Área} = \int_0^a ax^2 - x^3 dx = \left[\frac{ax^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right]_0^a = \left[\frac{a \cdot a^3}{3} - \frac{a^4}{4} \right] - \left[\frac{a \cdot 0^3}{3} - \frac{0^4}{4} \right] = \frac{a^4}{3} - \frac{a^4}{4} = \frac{4a^4 - 3a^4}{12} = \frac{a^4}{12} u^2$$

Como nos piden que el área valga $\frac{27}{4} u^2$, tenemos que $\frac{a^4}{12} = \frac{27}{4} \Rightarrow a^4 = 81 \Rightarrow a = \sqrt[4]{81} = \pm 3$

Descartamos el valor negativo, ya que el enunciado dice que a es positivo.

El valor buscado de a es 3.

2. Un avión es deslaza desde un punto $A=(0,3,1)$ hacia una plataforma plana de ecuación $\pi : x - 2y + z = 1$ siguiendo una recta r paralela al vector $\mathbf{v} = (1, -1, 0)$.
- a) Calcule las coordenadas del punto de contacto B del avión con el plano y la distancia recorrida. [1,25 puntos]
- b) Calcule la ecuación general del plano perpendicular a la plataforma y que contiene la recta r seguida por el avión desde el punto A . [1,25 puntos]

- a) Hallamos la ecuación de la recta r con vector director $\mathbf{v} = (1, -1, 0)$ y que pasa por el punto $A(0,3,1)$.

$$\left. \begin{array}{l} A(0,3,1) \in r \\ \vec{v}_r = (1, -1, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow r : \begin{cases} x = \lambda \\ y = 3 - \lambda \\ z = 1 \end{cases}$$

El punto B será el punto de corte de la recta r y el plano $\pi : x - 2y + z = 1$. Hallamos ese punto resolviendo el sistema:

$$\left. \begin{array}{l} r : \begin{cases} x = \lambda \\ y = 3 - \lambda \\ z = 1 \end{cases} \\ \pi : x - 2y + z = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \lambda - 2(3 - \lambda) + 1 = 1 \Rightarrow \lambda - 6 + 2\lambda + 1 = 1 \Rightarrow 3\lambda = 6 \Rightarrow \lambda = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 - 2 = 1 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{B(2,1,1)}$$

La distancia recorrida es la longitud del segmento $\overline{AB}$ que es el valor del módulo del vector $\overline{AB}$.

$$\overline{AB} = (2,1,1) - (0,3,1) = (2, -2, 0)$$

$$\text{Distancia}(A, B) = |\overline{AB}| = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 0^2} = \boxed{\sqrt{8} = 2,83 u}$$

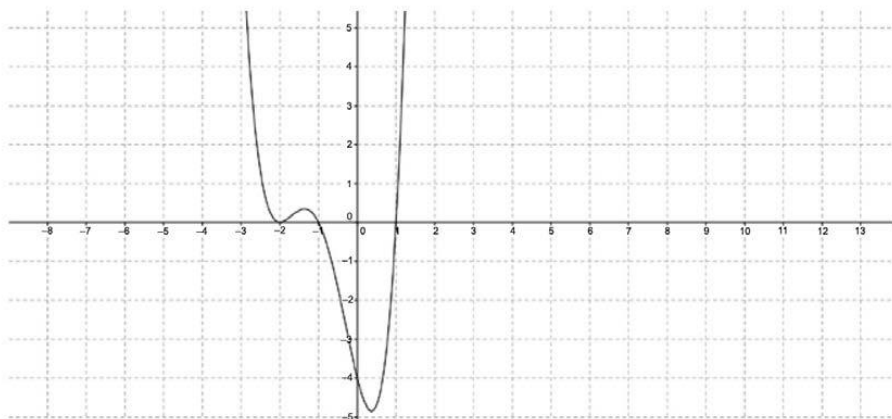
- b) El plano π' pedido tiene como vector director el vector normal al plano $\pi : x - 2y + z = 1$ que tiene coordenadas $\vec{n} = (1, -2, 1)$ y el vector director de la recta r que tiene coordenadas $\vec{v}_r = (1, -1, 0)$.

Como contiene a la recta r entonces el punto $A(0, 3, 1)$ pertenece al plano π' .

$$\left. \begin{array}{l} A(0,3,1) \in \pi' \\ \vec{u} = \vec{n} = (1, -2, 1) \\ \vec{v} = \vec{v}_r = (1, -1, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow \pi' : \begin{vmatrix} x-0 & y-3 & z-1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y - 3 - z + 1 + 2z - 2 + x = 0 \Rightarrow \boxed{\pi' : x + y + z - 4 = 0}$$

3. Sea $f(x)$ una función derivable cuya gráfica pasa por el punto $(0, 1)$. La gráfica de su derivada, $f'(x)$, es la que se muestra en la figura.



- a) Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)$ en el punto de la gráfica de abscisa $x = 0$. [1,25 puntos]
 b) Encuentre las abscisas de los puntos singulares de la función $f(x)$ y clasifíquelos. [1,25 puntos]

- a) Mirando la gráfica de $f'(x)$ vemos que $f'(0) = -4$ y nos dicen que la función $f(x)$ pasa por el punto $(0, 1)$, por lo que $f(0) = 1$.

Aplicamos todo esto a la fórmula de la tangente en $x = 0$.

$$y - f(0) = f'(0)(x - 0) \Rightarrow y - 1 = -4x \Rightarrow \boxed{y = -4x + 1}$$

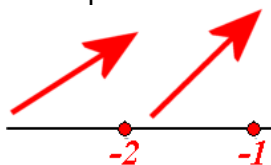
- b) Los puntos singulares son aquellos en los que se anula la derivada $\rightarrow f'(x) = 0$

Son los puntos de la gráfica de $f'(x)$ que cortan el eje OX.

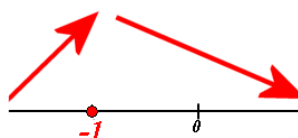
Observando la gráfica vemos que ocurre en $x = -2$, en $x = -1$ y en $x = 1$.

Estos son los puntos singulares de la función $f(x)$.

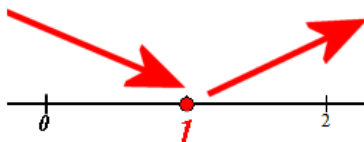
En el entorno de $x = -2$ la derivada es positiva antes de $x = -2$ y también después de -2 , por lo que la función crece antes y después de -2 . No puede ser ni un máximo ni mínimo relativo, por lo que la función presenta un punto de inflexión en $x = -2$.



En el entorno de $x = -1$ la derivada es positiva antes de -1 y negativa después de -1 , por lo que la función crece antes y decrece después de -1 . La función presenta un punto máximo en $x = -1$.



En el entorno de $x = 1$ la derivada es negativa antes de 1 y positiva después de 1, por lo que la función decrece antes y crece después de 1. La función presenta un punto mínimo en $x = 1$.



La función tiene un punto de inflexión en $x = -2$, un máximo relativo en $x = -1$ y un mínimo relativo en $x = 1$.

4. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} a & -3 & 0 \\ 4 & a-7 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, en la que a es un parámetro real.

a) Estudie el rango de la matriz A para los distintos valores del parámetro a . [1,25 puntos]

b) Compruebe que para $a = 4$ la matriz A es invertible y que se verifica que $A^{-1} = A^2$. [1,25 puntos]

a) La matriz A es de dimensión 3×3 , por lo que su rango puede ser 3, 2 o 1.

¿El rango de A es 3?

Calculamos su determinante y comprobamos si es nulo o no.

$$|A| = \begin{vmatrix} a & -3 & 0 \\ 4 & a-7 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -a^2 + 7a - 3 - 12 + a = -a^2 + 8a - 15$$

$$|A| = 0 \Rightarrow -a^2 + 8a - 15 = 0 \Rightarrow a = \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 60}}{-2} = \frac{-8 \pm \sqrt{4}}{-2} = \begin{cases} \frac{-8+2}{-2} = 3 = a \\ \frac{-8-2}{-2} = 5 = a \end{cases}$$

Existen tres situaciones distintas que analizamos por separado.

Situación 1ª. $a \neq 3$ y $a \neq 5$.

En esta situación el determinante de la matriz A es no nulo y su rango es 3.

Situación 2ª. $a = 3$.

En esta situación el determinante de la matriz A es nulo y su rango es menor que 3.

Para $a = 3$ la matriz A queda $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 4 & -4 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

¿El rango de A es 2?

Se observa que la columna 1ª y 2ª son proporcionales, tomamos el menor de orden 2 que

resulta de quitar la fila y columna 1ª $\rightarrow \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ con determinante

$$\begin{vmatrix} -4 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 4 + 1 = 5 \neq 0. \text{ El rango de } A \text{ es } 2.$$

Situación 3ª. $a = 5$.

En esta situación el determinante de la matriz A es nulo y su rango es menor que 3.

Para $a = 5$ la matriz A queda $A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

¿El rango de A es 2?

Se observa que la fila 1ª es la suma de 2ª y 3ª, tomamos el menor de orden 2 que resulta

de quitar la fila y columna 1ª $\rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ con determinante $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 2 + 1 = 3 \neq 0$. El

rango de A es 2.

Resumiendo: Para $a \neq 3$ y $a \neq 5$ el rango de A es 3, para $a = 3$ o $a = 5$ el rango de A es 2.

b) Para $a = 4$ la matriz A queda $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -4^2 + 32 - 15 = 1 \neq 0$$

El determinante es no nulo y por tanto tiene inversa.

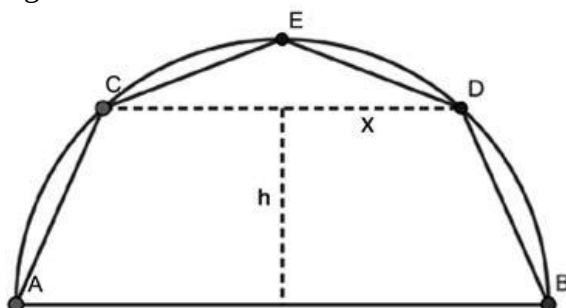
$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^T)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ -3 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} -3 & -3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ -3 & -3 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 5 & -4 & -4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculamos también A^2 .

$$A^2 = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16-12+0 & -12+9+0 & 0-3+0 \\ 16-12+1 & -12+9-1 & 0-3-1 \\ 4-4-1 & -3+3+1 & 0-1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 5 & -4 & -4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

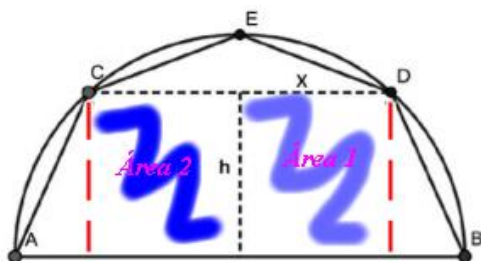
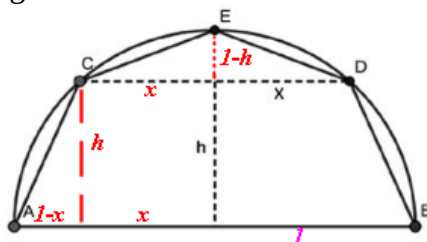
Como se observan se obtiene el mismo resultado y se cumple que $A^{-1} = A^2$

5. Una empresa está trabajando en el diseño de unas cápsulas de café. La empresa ha construido la sección transversal de las cápsulas inscribiéndola en una semicircunferencia de radio 1, trazando a continuación una cuerda CD paralela al diámetro AB e incorporando el punto E en el punto medio del arco CD . De esta manera queda trazado el pentágono $ACEDB$, tal como se muestra en la figura.

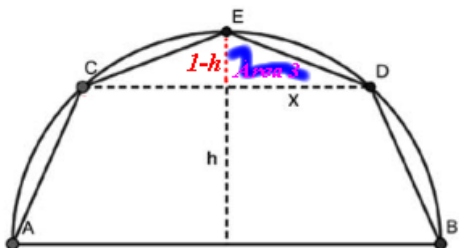


- a) Expresa en función de x y h el área del pentágono $ACEDB$. [1,25 puntos]
 b) ¿Cuál debe ser la distancia (indicada en la figura por h) a la que debe situarse la cuerda CD de AB para que el área del pentágono $ACEDB$ sea máxima? [1,25 puntos]

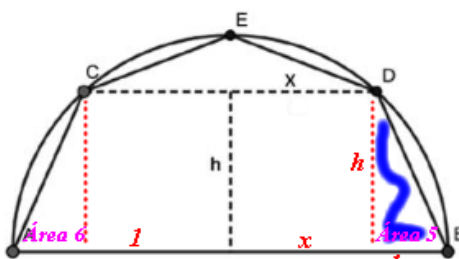
- a) Añadimos al dibujo los datos necesarios para calcular el área del pentágono como la suma de áreas de cuadrados y triángulos.



$$\text{Área 1} = \text{Área 2} = h \cdot x$$



$$\text{Área 3} = \frac{(1-h)x}{2} \quad . \text{ Hay dos triángulos como este.}$$



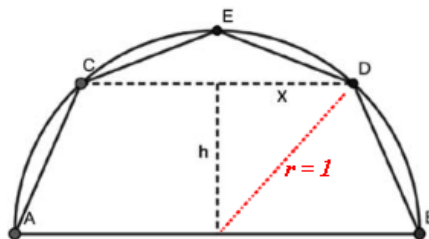
$$\text{Área 5} = \frac{(1-x)h}{2} \quad . \text{ Hay dos triángulos como este.}$$

El área del pentágono es la suma del área de los dos rectángulos (área 1 y 2), el área de los 2 triángulos superiores (área 3 y 4) y el área de los dos triángulos laterales (área 5 y 6).

$$\text{Área} = 2hx + 2 \frac{(1-h)x}{2} + 2 \frac{(1-x)h}{2} = 2hx + (1-h)x + (1-x)h = 2hx + x - hx + h - hx$$

$$\text{Área} = h + x$$

- b) Si dibujamos el radio que va al punto D tenemos un triángulo rectángulo de catetos “x” y “h” y de hipotenusa radio = 1.



Aplicamos el teorema de Pitágoras a este triángulo rectángulo y tenemos:

$$x^2 + h^2 = 1^2 \Rightarrow x^2 = 1 - h^2 \Rightarrow x = \sqrt{1 - h^2}$$

Sustituimos en la fórmula del área del pentágono.

$$\left. \begin{array}{l} A(h) = h + x \\ x = \sqrt{1 - h^2} \end{array} \right\} \Rightarrow A(h) = h + \sqrt{1 - h^2}$$

Derivamos e igualamos a cero en busca del máximo relativo.

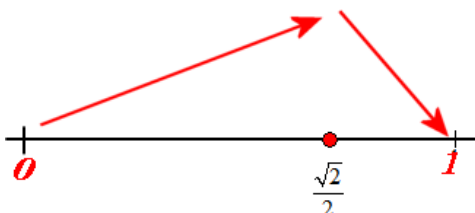
$$A'(h) = 1 + \frac{-2h}{2\sqrt{1-h^2}} = 1 - \frac{h}{\sqrt{1-h^2}}$$

$$A'(h) = 0 \Rightarrow 1 - \frac{h}{\sqrt{1-h^2}} = 0 \Rightarrow 1 = \frac{h}{\sqrt{1-h^2}} \Rightarrow h = \sqrt{1-h^2} \Rightarrow h^2 = 1-h^2 \Rightarrow 2h^2 = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow h = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.707$$

Como h puede variar de $h = 0$ hasta $h = 1$. Estudiamos que pasa antes y después de $h = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

- En $\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ tomamos $x = 0.5$ y la derivada vale $A'(0.5) = 1 - \frac{0.5}{\sqrt{1-0.5^2}} = 0.42 > 0$. La función Área crece en $\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.
- En $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$ tomamos $x = 0.8$ y la derivada vale $A'(0.8) = 1 - \frac{0.8}{\sqrt{1-0.8^2}} = -0.33 < 0$. La función Área decrece en $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$.



El área del pentágono es máxima para $h = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.707$.

6. Sean las rectas r y s , expresadas por $\frac{x-3}{2} = y = z-1$ y $(\mu, -\mu, \mu)$, respectivamente.

a) Determine la posición relativa de las rectas. [1,25 puntos]

b) Calcule la distancia entre la recta r y la recta s . [1,25 puntos]

a) Obtenemos los vectores directores y un punto de ambas rectas.

$$r: \frac{x-3}{2} = y = z-1 \Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_r = (2, 1, 1) \\ P_r(3, 0, 1) \end{cases}$$

$$s: (\mu, -\mu, \mu) \Rightarrow s: \begin{cases} x = \mu \\ y = -\mu \\ z = \mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_s = (1, -1, 1) \\ P_s(0, 0, 0) \end{cases}$$

Las rectas no son paralelas ni coincidentes pues los vectores directores no son proporcionales.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = (2, 1, 1) \\ \vec{v}_s = (1, -1, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{2}{1} \neq \frac{1}{-1} \neq \frac{1}{1}$$

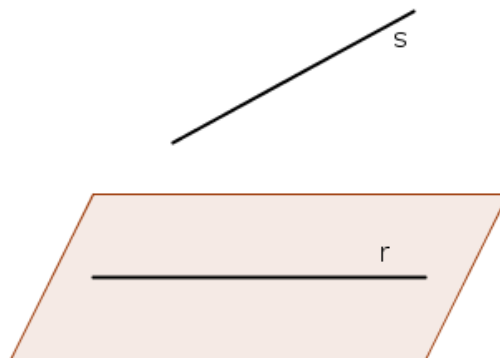
Las rectas se cortan o se cruzan.

Calculamos el producto mixto de los vectores $\vec{v}_s = (1, -1, 1)$, $\vec{v}_r = (2, 1, 1)$ y $\overrightarrow{P_r P_s}$. Si ese producto mixto es cero las rectas se cortan, en caso contrario, se cruzan.

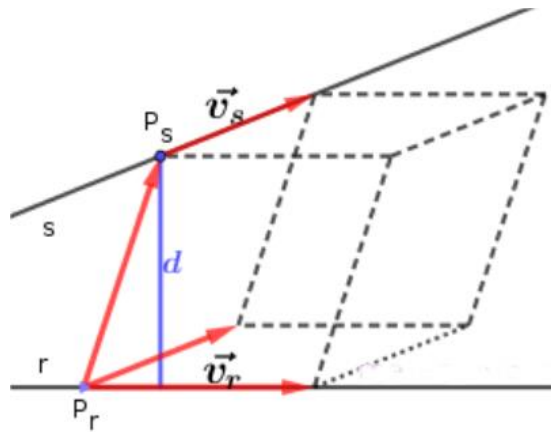
$$\overrightarrow{P_s P_r} = (3, 0, 1) - (0, 0, 0) = (3, 0, 1)$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_s = (1, -1, 1) \\ \vec{v}_r = (2, 1, 1) \\ \overrightarrow{P_s P_r} = (3, 0, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow [\vec{v}_s, \vec{v}_r, \overrightarrow{P_s P_r}] = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 3 + 0 - 3 + 2 + 0 = -3$$

Las rectas se cruzan.



b) Para calcular la distancia utilizamos la fórmula que es el valor absoluto del producto mixto de los tres vectores anteriores (volumen del paralelepípedo definido por ellos) dividido entre el módulo del producto vectorial de los vectores directores de las rectas utilizados en el producto mixto (área de la base del paralelepípedo).



$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_s = (1, -1, 1) \\ \vec{v}_r = (2, 1, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{v}_s \times \vec{v}_r = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -i + 2j + k + 2k - j - i = -2i + k + 3k = (-2, 1, 3)$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_s = (1, -1, 1) \\ \vec{v}_r = (2, 1, 1) \\ \overrightarrow{P_s P_r} = (3, 0, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow d(r, s) = \frac{|\left[\vec{v}_s, \vec{v}_r, \overrightarrow{P_s P_r} \right]|}{|\vec{v}_s \times \vec{v}_r|} = \frac{3}{\sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 3^2}} = \frac{3}{\sqrt{14}} = \frac{3\sqrt{14}}{14} = 0.802 u$$

La distancia entre las rectas r y s es de $\frac{3\sqrt{14}}{14}$ unidades.