



**PRUEBA DE EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL
ACCESO A LA UNIVERSIDAD Y PRUEBAS DE ADMISIÓN
ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS
CURSO 2023-2024**

**MATEMÁTICAS
APLICADAS A LAS
CIENCIAS SOCIALES II**

- Instrucciones:**
- a) Duración: 1 hora y 30 minutos
 - b) Elija un único ejercicio de cada bloque. En caso de responder a dos ejercicios de un mismo bloque, se corregirá solo el que aparezca en primer lugar.
 - c) En cada ejercicio, parte o apartado se indica la puntuación máxima asignada.
 - d) Todos los resultados deben estar suficientemente justificados.
 - e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. Si obtiene resultados directamente con la calculadora, explique con detalle los pasos necesarios para su obtención sin el uso de la misma.

BLOQUE A

EJERCICIO 1

Se consideran las matrices

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad N = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 5 & 2 & 1 \\ 7 & 4 & 0 \end{pmatrix} \quad V = \begin{pmatrix} 5 - a^2 \\ a - 1 \\ a^2 \end{pmatrix}, \text{ siendo } a \text{ un número real.}$$

- a) **(0.75 puntos)** Halle el valor de a para que se verifique que $M^t \cdot V = (5 \ 1 \ 5)^t$.
- b) **(1.25 puntos)** Calcule M^{-1} y resuelva la ecuación matricial $X \cdot M - I_3 = N$.
- c) **(0.5 puntos)** Razone si las operaciones $2 \cdot V \cdot N^t$ y $(N + M^t) \cdot V$ se pueden realizar y, en aquellos casos en que sea posible, indique la dimensión de la matriz resultante.

EJERCICIO 2

(2.5 puntos) Para un proyecto de software libre se dispone de 150 desarrolladores de Javascript y 120 de Python. Es necesario formar equipos de trabajo de dos tipos. El primer tipo estará compuesto por 2 desarrolladores de Javascript y 3 de Python, y el segundo tipo por 6 de Javascript y 4 de Python. Se requieren al menos 6 equipos del segundo tipo. Determine cuántos equipos de cada tipo se podrán formar para obtener el mayor número de equipos posible. En tal caso, ¿cuántos desarrolladores de Javascript y Python se utilizarán?

BLOQUE B

EJERCICIO 3

Se considera la función $f(x) = 1 - \frac{4}{3+x}$.

- a) **(0.75 puntos)** Halle el dominio de f y los puntos de corte de su gráfica con los ejes de coordenadas.
- b) **(0.5 puntos)** Calcule las asíntotas de la función f .
- c) **(0.75 puntos)** Obtenga los puntos donde la recta tangente a la gráfica de f tiene pendiente 1.
- d) **(0.5 puntos)** Estudie la curvatura de la función f .

EJERCICIO 4

Se considera la función

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2x & \text{si } x < 2 \\ x^2 - 2x & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

- a) **(1 punto)** Estudie la continuidad y derivabilidad de f .

- b) **(1.5 puntos)** Represente el recinto limitado por las rectas $y = 2x$, $x = -1$, $x = 1$ y la gráfica de f . Calcule su área.

BLOQUE C

EJERCICIO 5

Un grupo de 15 amigas se van a pasar un fin de semana a una casa rural. Al llegar reparten las tareas: 3 irán al mercado, 2 a comprar leña y el resto se quedarán en la casa. Para realizar el reparto de las tareas se introducen 15 papeletas en una urna de las que 3 tienen la palabra “mercado”, 2 la palabra “leña” y el resto la palabra “casa”. Cada una coge una papeleta de forma ordenada y sin reposición. Calcule la probabilidad de los siguientes sucesos:

- a) **(0.75 puntos)** Las dos primeras papeletas extraídas tienen escrita la palabra “mercado”.
b) **(0.75 puntos)** Las dos primeras papeletas extraídas no tienen escrita la palabra “casa”.
c) **(1 punto)** Si la segunda papeleta extraída tiene escrita “leña”, ¿cuál es la probabilidad de que la primera también tenga escrita “leña”?

EJERCICIO 6

Una empresa ha instalado 50 alarmas de las que 30 son de tipo básico y el resto de tipo superior. Se sabe que el 80% de todas las alarmas no presentan incidencias y que de las de tipo básico un 30% presentan alguna incidencia. Se elige al azar una de estas alarmas. Calcule la probabilidad de que:

- a) **(1 punto)** Sea de tipo básico y no presente incidencias.
b) **(0.5 puntos)** No presente incidencias siendo de tipo superior.
c) **(0.5 puntos)** Teniendo incidencias sea de tipo básico.
d) **(0.5 puntos)** Sea de "tipo básico y tenga incidencias" o sea de "tipo superior y no tenga incidencias".

BLOQUE D

EJERCICIO 7

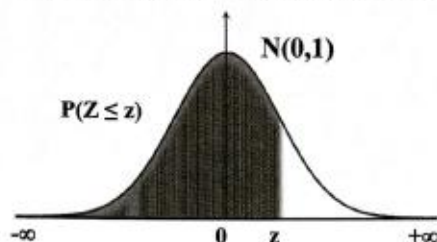
Una tienda decide evaluar a su empresa de transporte para determinar si está cumpliendo con sus estándares de calidad. Para ello, se analizan 400 de sus envíos y se comprueba que 370 han sido entregados a tiempo.

- a) **(1.5 puntos)** Si los estándares de calidad de dicha empresa requieren que al menos el 88% de los envíos sean entregados a tiempo, estime, mediante un intervalo de confianza al 93%, si la empresa de transporte cumple con los estándares de calidad.
b) **(1 punto)** Si se mantiene la misma proporción muestral y se aumenta el nivel de confianza al 95%, ¿cuántos envíos, como mínimo, habrá que analizar para que la amplitud del intervalo de confianza sea inferior a 0.03?

EJERCICIO 8

- a) **(1.25 puntos)** El tiempo que un carpintero necesita para fabricar una mesa sigue una distribución Normal de media 60 minutos y desviación típica de 30 minutos. Si en un mes ese carpintero ha fabricado 100 mesas, calcule la probabilidad de que el tiempo medio de fabricación de las mesas de esa muestra sea superior a 54 minutos.
b) **(1.25 puntos)** El tiempo que un carpintero necesita para fabricar una puerta sigue una distribución Normal de media desconocida y desviación típica de 20 minutos. En un mes ese carpintero ha fabricado 25 puertas, obteniendo un tiempo medio de fabricación de 40 minutos. Halle un intervalo de confianza para el tiempo medio de fabricación de una puerta con un nivel de confianza del 97%. Determine el error máximo cometido al realizar la estimación.

FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN NORMAL $N(0,1)$



z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9975	0,9976	0,9977	0,9978	0,9979	0,9980	0,9981	0,9982	0,9983	0,9984
2,9	0,9985	0,9986	0,9987	0,9988	0,9989	0,9990	0,9991	0,9992	0,9993	0,9994
3,0	0,9995	0,9996	0,9997	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,1	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,2	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,3	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,4	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,5	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,6	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,7	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,8	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,9	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
4,0	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999

Nota: En el interior de la tabla se da la probabilidad de que la variable aleatoria Z , con distribución $N(0,1)$, esté por debajo del valor z .

SOLUCIONES

EJERCICIO 1

Se consideran las matrices

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad N = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 5 & 2 & 1 \\ 7 & 4 & 0 \end{pmatrix} \quad V = \begin{pmatrix} 5-a^2 \\ a-1 \\ a^2 \end{pmatrix}, \text{ siendo } a \text{ un número real.}$$

- a) **(0.75 puntos)** Halle el valor de a para que se verifique que $M^t \cdot V = (5 \ 1 \ 5)^t$.
 b) **(1.25 puntos)** Calcule M^{-1} y resuelva la ecuación matricial $X \cdot M - I_3 = N$.
 c) **(0.5 puntos)** Razone si las operaciones $2 \cdot V \cdot N^t$ y $(N + M^t) \cdot V$ se pueden realizar y, en aquellos casos en que sea posible, indique la dimensión de la matriz resultante.

a) Resolvemos el sistema matricial.

$$M^t \cdot V = (5 \ 1 \ 5)^t \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5-a^2 \\ a-1 \\ a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 5 - \cancel{a^2} + 2a - 2 + \cancel{a^2} \\ a - 1 + a^2 \\ 5 - \cancel{a^2} + \cancel{a^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 3+2a \\ a^2+a-1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 3+2a=5 \\ a^2+a-1=1 \\ 5=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a=2 \rightarrow \boxed{a=1} \\ a^2+a-2=0 \end{cases} \Rightarrow 1^2+1-2=0 \Rightarrow \text{¡OK!}$$

El valor de a que cumple lo pedido es $a=1$.

b) Comprobamos que la matriz M tiene inversa y la calculamos.

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1+0+2-1-0-0 = 2 \neq 0$$

$$M^{-1} = \frac{\text{Adj}(M^T)}{|M|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}{2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Despejamos X de la ecuación matricial y obtenemos su expresión.

$$X \cdot M - I_3 = N \Rightarrow X \cdot M = N + I_3 \Rightarrow X = (N + I_3) M^{-1}$$

$$X = \left[\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 5 & 2 & 1 \\ 7 & 4 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \\ 7 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4-4+2 & 4+0-2 & -4+4+2 \\ 5-6+1 & 5+0-1 & -5+6+1 \\ 7-8+1 & 7+0-1 & -7+8+1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 6 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

- c) Comprobamos la viabilidad de las operaciones indicadas. M y N son de dimensión 3×3 y V es de dimensión 3×1 .

$$2 \cdot V \cdot N^t$$

$$3 \times \boxed{1 \cdot 3} \times 3$$

No es posible realizar el producto de matrices al no coincidir el número de columnas de V con el de filas de N^t .

$$(N + M^t) \cdot V$$

$$3 \times 3 + 3 \times 3 \rightarrow 3 \times \boxed{3 \cdot 3} \times 1 \rightarrow 3 \times 1$$

Es posible realizar la suma pues N y M^t tienen la misma dimensión obteniéndose una matriz 3×3 . El producto también es posible al coincidir el número de columnas de $(N + M^t)$ con el número de filas de V.

Es posible calcular $(N + M^t) \cdot V$ obteniéndose una matriz de dimensión 3×1 y no es posible calcular $2 \cdot V \cdot N^t$.

EJERCICIO 2

(2.5 puntos) Para un proyecto de software libre se dispone de 150 desarrolladores de Javascript y 120 de Python. Es necesario formar equipos de trabajo de dos tipos. El primer tipo estará compuesto por 2 desarrolladores de Javascript y 3 de Python, y el segundo tipo por 6 de Javascript y 4 de Python. Se requieren al menos 6 equipos del segundo tipo. Determine cuántos equipos de cada tipo se podrán formar para obtener el mayor número de equipos posible. En tal caso, ¿cuántos desarrolladores de Javascript y Python se utilizarán?

Llamemos x = “número de equipos del primer tipo”, y = “número de equipos del segundo tipo”. Realizamos una tabla para obtener las restricciones del problema.

	Desarrolladores Javascript	Desarrolladores Python
Nº equipos tipo 1 (x)	$2x$	$3x$
Nº equipos tipo 2 (y)	$6y$	$4y$
	$2x + 6y$	$3x + 4y$

Deseamos maximizar el número de equipos que viene expresado como $N(x, y) = x + y$. Las restricciones son:

“Se dispone de 150 desarrolladores de Javascript y 120 de Python” $\rightarrow$

$$2x + 6y \leq 150; 3x + 4y \leq 120.$$

“Se requieren al menos 6 equipos del segundo tipo” $\rightarrow y \geq 6$

“Las cantidades deben ser positivas” $\rightarrow x \geq 0; y \geq 0$

Reunimos todas las restricciones formando un sistema de inecuaciones.

$$\left. \begin{array}{l} 2x + 6y \leq 150 \\ 3x + 4y \leq 120 \\ y \geq 6 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 3y \leq 75 \\ 3x + 4y \leq 120 \\ y \geq 6 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Dibujamos las rectas asociadas a las inecuaciones y que delimitan la región factible.

$$x + 3y = 75$$

$$3x + 4y = 120$$

$$y = 6$$

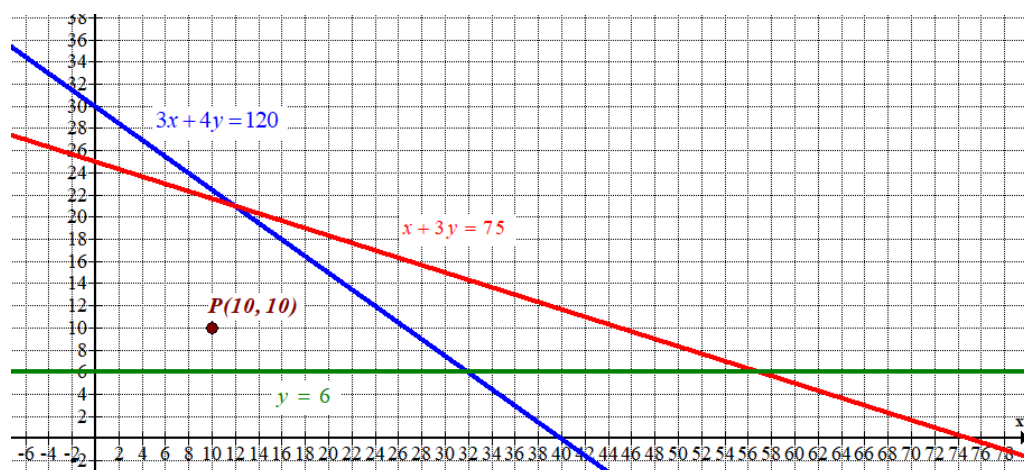
$$x \geq 0; y \geq 0$$

x	$y = \frac{75-x}{3}$
0	25
12	21
75	0

x	$y = \frac{120-3x}{4}$
0	30
12	21
40	0

x	$y = 6$
0	6
10	6
32	6

Primer cuadrante

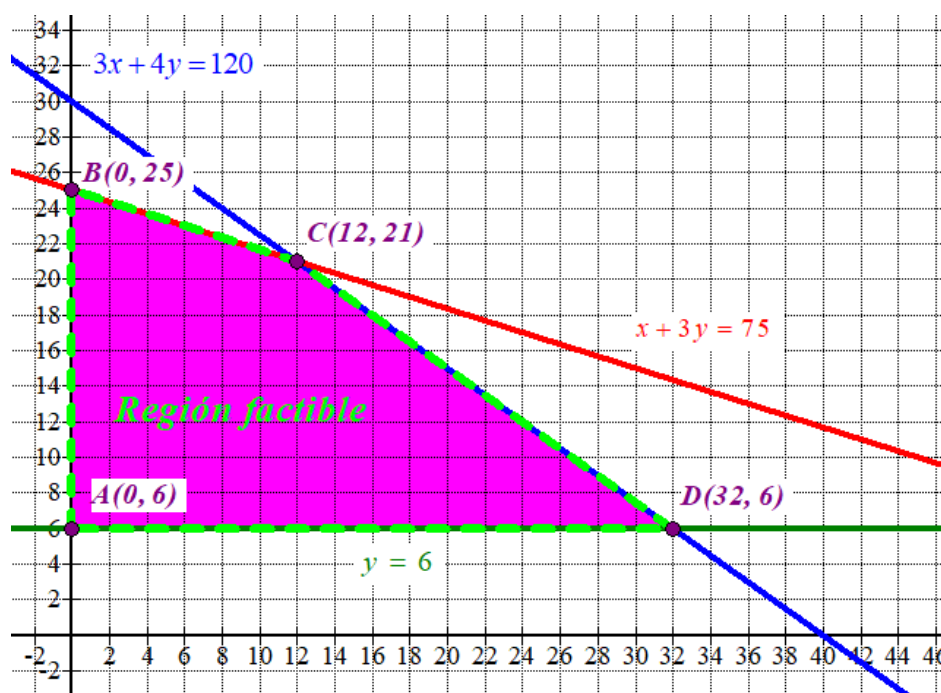


Como las restricciones son
$$\left. \begin{array}{l} x + 3y \leq 75 \\ 3x + 4y \leq 120 \\ y \geq 6 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \text{ la región factible es la zona del primer cuadrante}$$

situada por debajo de las dos rectas oblicuas y por encima de la recta horizontal. Lo comprobamos viendo si el punto $P(10,10)$ perteneciente a dicha región cumple todas las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 10 + 30 \leq 75 \\ 30 + 40 \leq 120 \\ 10 \geq 6 \\ 10 \geq 0; 10 \geq 0 \end{array} \right\} \text{ Se cumplen todas}$$

Coloreamos de rosa la región factible en el siguiente dibujo.



Las coordenadas del vértice C se obtienen de resolver el sistema
$$\left. \begin{array}{l} 3x + 4y = 120 \\ x + 3y = 75 \end{array} \right\}.$$

$$\left. \begin{array}{l} 3x + 4y = 120 \\ x = 75 - 3y \end{array} \right\} \Rightarrow 225 - 9y + 4y = 120 \Rightarrow -5y = -125 \Rightarrow \boxed{y = 21} \Rightarrow \boxed{x = 75 - 63 = 12}$$

Valoramos el número de equipos $N(x, y) = x + y$ en cada vértice de la región factible en busca del valor máximo.

$$A(0, 6) \rightarrow N(0, 6) = 0 + 6 = 6$$

$$B(0, 25) \rightarrow N(0, 25) = 0 + 25 = 25$$

$$C(12, 21) \rightarrow N(12, 21) = 12 + 21 = 33$$

$$D(32, 6) \rightarrow N(32, 6) = 32 + 6 = 38 \text{ ¡Máximo!}$$

El mayor número de equipos que se puede formar cumpliendo con las restricciones es de 38, siendo 32 equipos del primer tipo y 6 del segundo.

Utilizamos $2 \cdot 32 + 6 \cdot 6 = 100$ desarrolladores de Javascript y $3 \cdot 32 + 4 \cdot 6 = 120$ desarrolladores de Python.

EJERCICIO 3

Se considera la función $f(x) = 1 - \frac{4}{3+x}$.

- a) **(0.75 puntos)** Halle el dominio de f y los puntos de corte de su gráfica con los ejes de coordenadas.
 b) **(0.5 puntos)** Calcule las asíntotas de la función f .
 c) **(0.75 puntos)** Obtenga los puntos donde la recta tangente a la gráfica de f tiene pendiente 1.
 d) **(0.5 puntos)** Estudie la curvatura de la función f .

a) El dominio de la función son todos los números reales menos los que anulan el denominador.

$$\text{Dominio} = \mathbb{R} - \{-3\}$$

Hallamos los puntos de corte de la gráfica de la función con los ejes de coordenadas.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = 1 - \frac{4}{3+x} \\ \text{Eje OY} \rightarrow x = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f(0) = 1 - \frac{4}{3+0} = 1 - \frac{4}{3} = \frac{-1}{3} \Rightarrow A\left(0, \frac{-1}{3}\right)$$

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = 1 - \frac{4}{3+x} \\ \text{Eje OX} \rightarrow y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 1 - \frac{4}{3+x} = 0 \Rightarrow 1 = \frac{4}{3+x} \Rightarrow 3+x = 4 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow B(1, 0)$$

Los puntos de corte con los ejes de coordenadas son $A\left(0, \frac{-1}{3}\right)$ y $B(1, 0)$.

b) **Asíntota vertical.** $x = a$

¿ $x = -3$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3} 1 - \frac{4}{3+x} = 1 - \frac{4}{0} = \infty$$

$x = -3$ es asíntota vertical.

Asíntota horizontal. $y = b$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} 1 - \frac{4}{3+x} = 1 - \frac{4}{\infty} = 1 - 0 = 1$$

La gráfica de la función tiene una asíntota horizontal: $y = 1$.

Asíntota oblicua. $y = mx + n$

Al tener asíntota horizontal no tiene asíntota oblicua.

c) Para que la recta tangente a la gráfica de f tenga pendiente 1 la derivada de la función debe valer 1 $\Rightarrow f'(x) = 1$.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = 1 - \frac{4}{3+x} \Rightarrow f'(x) = -\frac{-4}{(3+x)^2} = \frac{4}{(3+x)^2} \\ f'(x) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{4}{(3+x)^2} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4 = (3+x)^2 \Rightarrow 3+x = \sqrt{4} = \pm 2 \Rightarrow \begin{cases} 3+x = -2 \rightarrow \boxed{x = -5} \\ 3+x = 2 \rightarrow \boxed{x = -1} \end{cases}$$

Como $f(-1) = 1 - \frac{4}{3-1} = -1$ uno de los puntos que cumple lo pedido es $P(-1, -1)$.

Como $f(-5) = 1 - \frac{4}{3-5} = 3$ el otro punto tiene coordenadas $Q(-5, 3)$.

d) Averiguamos cuando se anula la derivada segunda.

$$f'(x) = \frac{4}{(3+x)^2} = 4(3+x)^{-2} \Rightarrow f''(x) = -8(3+x)^{-3} = \frac{-8}{(3+x)^3}$$

Esta expresión de la derivada segunda nunca se anula.

Estudiamos el signo de la derivada segunda antes y después de $x = -3$ (discontinuidad de la función).

- En el intervalo $(-\infty, -3)$ tomamos $x = -4$ y la derivada segunda vale

$$f''(-4) = \frac{-8}{(3-4)^3} = 8 > 0. \text{ La función es convexa } (\cup) \text{ en el intervalo } (-\infty, -3).$$

- En el intervalo $(-3, +\infty)$ tomamos $x = -1$ y la derivada segunda vale

$$f''(-1) = \frac{-8}{(3-1)^3} = -1 < 0. \text{ La función es cóncava } (\cap) \text{ en el intervalo } (-3, +\infty).$$

La función es convexa ($\cup$) en el intervalo $(-\infty, -3)$ y cóncava ($\cap$) en el intervalo $(-3, +\infty)$.

EJERCICIO 4

Se considera la función

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2x & \text{si } x < 2 \\ x^2 - 2x & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

a) **(1 punto)** Estudie la continuidad y derivabilidad de f .

b) **(1.5 puntos)** Represente el recinto limitado por las rectas $y = 2x$, $x = -1$, $x = 1$ y la gráfica de f . Calcule su área.

a) En el intervalo $(-\infty, 2)$ la función tiene una expresión polinómica $f(x) = -x^2 + 2x$ que es continua. En el intervalo $(2, +\infty)$ la función tiene una expresión polinómica $f(x) = x^2 - 2x$, por lo que es continua. Estudiamos la continuidad en $x = 2$.

$$\left. \begin{array}{l} f(2) = 2^2 - 2 \cdot 2 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} -x^2 + 2x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} x^2 - 2x = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2) = 0$$

La función es continua en $x = 2$ y por tanto continua en $\mathbb{R}$.

La función es derivable en $\mathbb{R} - \{2\}$ siendo su derivada $f'(x) = \begin{cases} -2x + 2 & \text{si } x < 2 \\ 2x - 2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$.

Estudiamos la derivabilidad en $x = 2$.

$$\left. \begin{array}{l} f'(2^-) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} -2x + 2 = -4 + 2 = -2 \\ f'(2^+) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} 2x - 2 = 4 - 2 = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow f'(2^-) = -2 \neq 2 = f'(2^+)$$

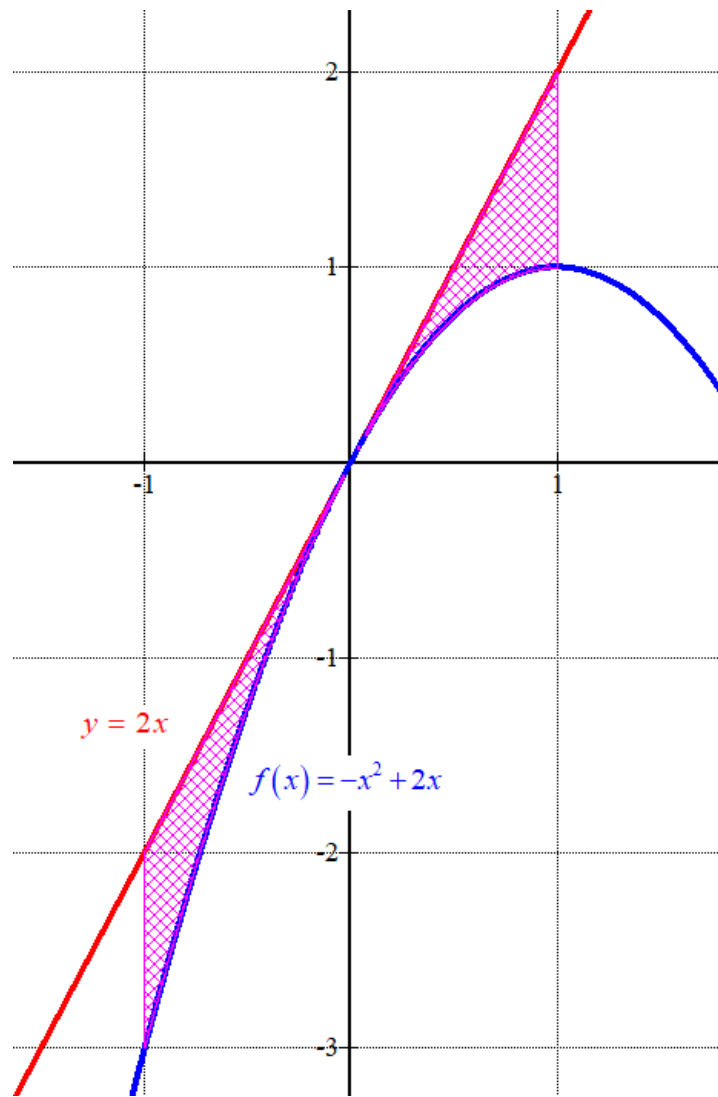
La función no es derivable en $x = 2$. La función es derivable en $\mathbb{R} - \{2\}$.

La función es continua en $\mathbb{R}$ y derivable en $\mathbb{R} - \{2\}$.

b) Entre -1 y 1 la función tiene la expresión $f(x) = -x^2 + 2x$.

Dibujamos la gráfica de la función, las rectas indicadas en el ejercicio y la región de la cual queremos hallar el área.

x	$f(x) = -x^2 + 2x$	x	$y = 2x$
-1	-3	-1	-2
0	0	0	0
1	1	1	2



El área pedida es el valor de la integral definida de la diferencia entre la recta y la función de -1 a 1 .

$$\text{Área} = \int_{-1}^1 2x - f(x) dx = \int_{-1}^1 2x - (-x^2 + 2x) dx = \int_{-1}^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-1}^1 =$$

$$= \frac{1^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3} = \frac{2}{3} \approx 0.6666 u^2$$

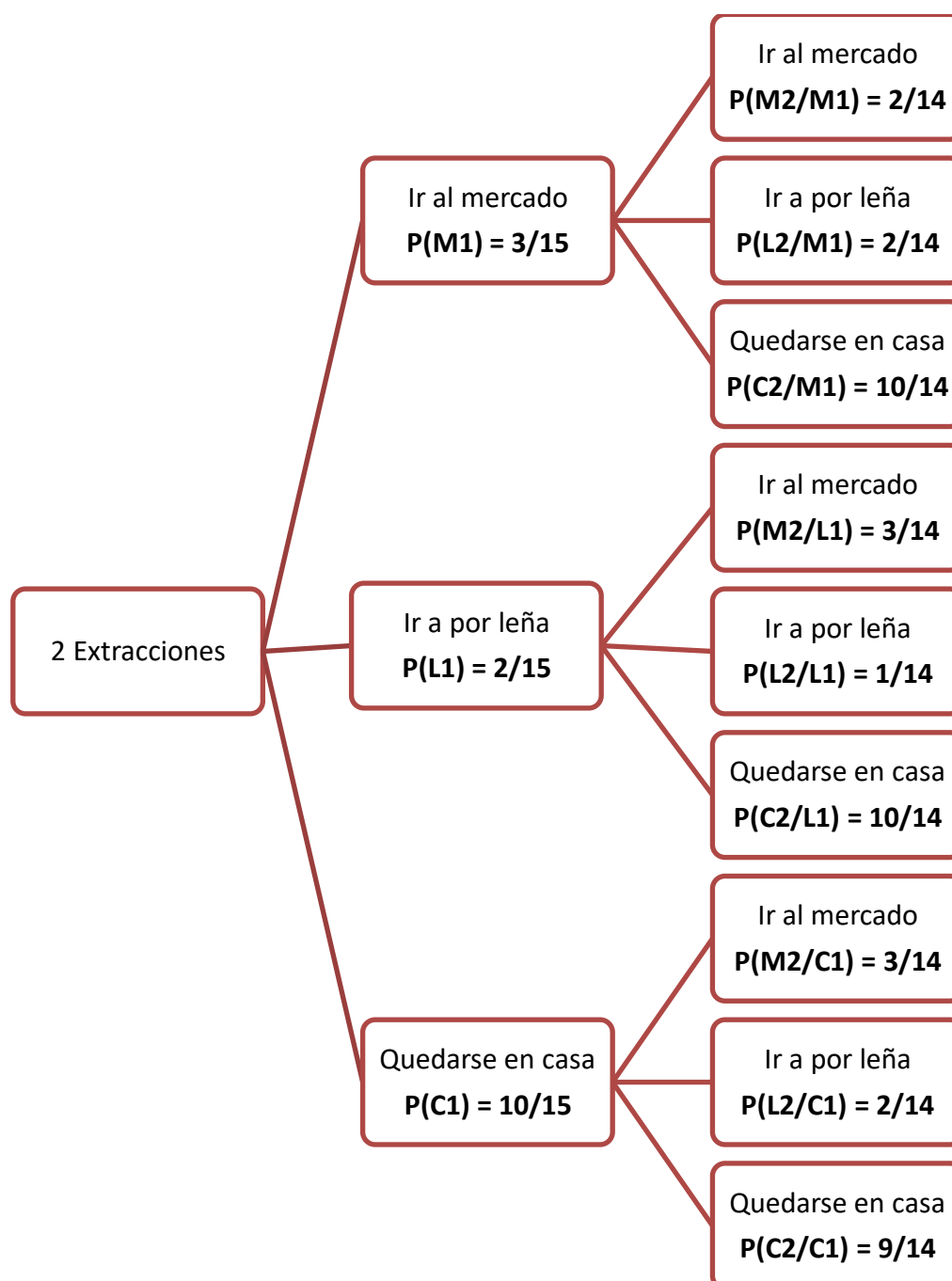
EJERCICIO 5

Un grupo de 15 amigas se van a pasar un fin de semana a una casa rural. Al llegar reparten las tareas: 3 irán al mercado, 2 a comprar leña y el resto se quedarán en la casa. Para realizar el reparto de las tareas se introducen 15 papeletas en una urna de las que 3 tienen la palabra “mercado”, 2 la palabra “leña” y el resto la palabra “casa”. Cada una coge una papeleta de forma ordenada y sin reposición. Calcule la probabilidad de los siguientes sucesos:

- (0.75 puntos)** Las dos primeras papeletas extraídas tienen escrita la palabra “mercado”.
- (0.75 puntos)** Las dos primeras papeletas extraídas no tienen escrita la palabra “casa”.
- (1 punto)** Si la segunda papeleta extraída tiene escrita “leña”, ¿cuál es la probabilidad de que la primera también tenga escrita “leña”?

Llamamos M1 y M2 a los sucesos “Sacar la papeleta ir al mercado en 1ª o 2ª extracción”, L1 y L2 a “sacar la papeleta ir a por leña en 1ª o 2ª extracción” y C1 y C2 a “sacar la papeleta quedarse en casa en 1ª o 2ª extracción”.

Realizamos un diagrama de árbol.



a) Es el suceso que aparece reflejado en la rama superior.

$$P(M1 \cap M2) = P(M1)P(M2 / M1) = \frac{3}{15} \cdot \frac{2}{14} = \boxed{\frac{1}{35} \approx 0.0286}$$

b) Este suceso aparece en cuatro de las ramas del diagrama de árbol.

$$\begin{aligned} P(\overline{C1} \cap \overline{C2}) &= P(M1)P(M2 / M1) + P(M1)P(L2 / M1) + P(L1)P(M2 / L1) + \\ &+ P(L1)P(L2 / L1) = \frac{3}{15} \cdot \frac{2}{14} + \frac{3}{15} \cdot \frac{2}{14} + \frac{2}{15} \cdot \frac{3}{14} + \frac{2}{15} \cdot \frac{1}{14} = \frac{20}{15 \cdot 14} = \boxed{\frac{2}{21} \approx 0.095} \end{aligned}$$

c) Nos piden calcular $P(L1 / L2)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes

$$\begin{aligned} P(L1 / L2) &= \frac{P(L1 \cap L2)}{P(L2)} = \frac{P(L1)P(L2 / L1)}{P(M1)(L2 / M1) + P(L1)(L2 / L1) + P(C1)(L2 / C1)} = \\ &= \frac{\frac{2}{15} \cdot \frac{1}{14}}{\frac{3}{15} \cdot \frac{2}{14} + \frac{2}{15} \cdot \frac{1}{14} + \frac{10}{15} \cdot \frac{2}{14}} = \frac{2}{6 + 2 + 20} = \boxed{\frac{1}{14} \approx 0.0714} \end{aligned}$$

EJERCICIO 6

Una empresa ha instalado 50 alarmas de las que 30 son de tipo básico y el resto de tipo superior. Se sabe que el 80% de todas las alarmas no presentan incidencias y que de las de tipo básico un 30% presentan alguna incidencia. Se elige al azar una de estas alarmas. Calcule la probabilidad de que:

- a) **(1 punto)** Sea de tipo básico y no presente incidencias.
 b) **(0.5 puntos)** No presente incidencias siendo de tipo superior.
 c) **(0.5 puntos)** Teniendo incidencias sea de tipo básico.
 d) **(0.5 puntos)** Sea de "tipo básico y tenga incidencias" o sea de "tipo superior y no tenga incidencias".

Se sabe que el 80% de todas las alarmas (50) no presentan incidencias, por lo que $0.80 \cdot 50 = 40$ alarmas no presentan incidencias y que de las de tipo básico (30) un 30% presentan alguna incidencia, por lo que $0.30 \cdot 30 = 9$ alarmas de tipo básico presentan incidencias. Realizamos una tabla de contingencia para obtener todos los datos del problema.

	Con incidencias	Sin incidencias	
Alarmas tipo básico	9		30
Alarmas tipo superior			
Totales		40	50

Completamos la tabla.

	Con incidencias	Sin incidencias	
Alarmas tipo básico	9	21	30
Alarmas tipo superior	1	19	20
Totales	10	40	50

- a) Hay 50 alarmas, de las cuales 21 son de tipo básico sin incidencias. Aplicando la regla de Laplace la probabilidad de que al elegir al azar una alarma sea de tipo básico y no presente incidencias es $\frac{21}{50} = 0.42$.
- b) Hay 20 alarmas de tipo superior. De las cuales 19 no presentan incidencias. Aplicamos la regla de Laplace y la probabilidad de que al elegir al azar una alarma de entre las de tipo superior esta no presente incidencias es $\frac{19}{20} = 0.95$.
- c) Hay 10 alarmas que presentan incidencias, de las cuales 9 son de tipo básico. Aplicamos la regla de Laplace y la probabilidad de que al elegir al azar una alarma de entre las que presentan incidencias esta sea de tipo básico es $\frac{9}{10} = 0.9$.
- d) De las 50 alarmas hay 9 que son de "tipo básico y tienen incidencias" y 19 que son de "tipo superior y no tienen incidencias". Aplicando la regla de Laplace la probabilidad pedida vale $\frac{9+19}{50} = 0.56$.

EJERCICIO 7

Una tienda decide evaluar a su empresa de transporte para determinar si está cumpliendo con sus estándares de calidad. Para ello, se analizan 400 de sus envíos y se comprueba que 370 han sido entregados a tiempo.

a) **(1.5 puntos)** Si los estándares de calidad de dicha empresa requieren que al menos el 88% de los envíos sean entregados a tiempo, estime, mediante un intervalo de confianza al 93%, si la empresa de transporte cumple con los estándares de calidad.

b) **(1 punto)** Si se mantiene la misma proporción muestral y se aumenta el nivel de confianza al 95%, ¿cuántos envíos, como mínimo, habrá que analizar para que la amplitud del intervalo de confianza sea inferior a 0.03?

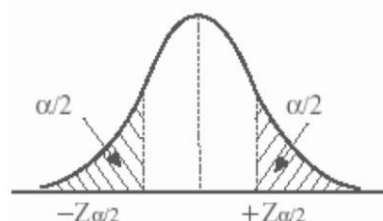
Tamaño de la muestra $n = 400$ envíos.

La proporción de envíos que llegan a tiempo es $pr = \frac{370}{400} = 0.925$ y la proporción de los que no llegan a tiempo es $qr = 1 - pr = 1 - 0.925 = 0.075$.

a) Con un nivel de confianza del 93 % tenemos

$$1 - \alpha = 0,93 \rightarrow \alpha = 0,07 \rightarrow \alpha/2 = 0,035 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,965 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1,81$$

z	0,00	0,01	0,02
0,0	0,5000	0,5040	0,5080
0,1	0,5398	0,5438	0,5478
0,2	0,5793	0,5832	0,5871
0,3	0,6179	0,6217	0,6255
0,4	0,6554	0,6591	0,6628
0,5	0,6915	0,6950	0,6985
0,6	0,7257	0,7291	0,7324
0,7	0,7580	0,7611	0,7642
0,8	0,7881	0,7910	0,7939
0,9	0,8159	0,8186	0,8213
1,0	0,8413	0,8438	0,8461
1,1	0,8643	0,8665	0,8686
1,2	0,8849	0,8869	0,8888
1,3	0,9032	0,9049	0,9066
1,4	0,9192	0,9207	0,9222
1,5	0,9332	0,9345	0,9357
1,6	0,9452	0,9463	0,9474
1,7	0,9554	0,9564	0,9573
1,8	0,9641	0,9649	0,9656
1,9	0,9713	0,9719	0,9726
2,0	0,9772	0,9778	0,9783



Hallamos el error.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pr \cdot qr}{n}} = 1.81 \cdot \sqrt{\frac{0.925 \cdot 0.075}{400}} \approx 0.02384$$

El intervalo de confianza para la proporción es:

$$(pr - Error, pr + Error) = (0.925 - 0.02384, 0.925 + 0.02384) = (0.90116, 0.94884)$$

Con un nivel de confianza del 93% se puede decir que el porcentaje de envíos que llegan a tiempo está entre el 90.116% y el 94.884%.

Los estándares de calidad de dicha empresa requieren que al menos el 88% de los envíos sean entregados a tiempo. Se cumplen los estándares de calidad pues el porcentaje de envíos que llegan a tiempo es superior al 88%.

b) Con un nivel de confianza del 95 % tenemos

$$1 - \alpha = 0,95 \rightarrow \alpha = 0,05 \rightarrow \alpha/2 = 0,025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,975 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$$

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803

Para que la amplitud del intervalo de confianza sea inferior a 0.03 el error máximo debe ser la mitad de 0.03, lo sustituimos en la fórmula del error y despejamos n .

$$\begin{aligned}
 \text{Error} &= z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pr \cdot qr}{n}} \Rightarrow 0.015 = 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.925 \cdot 0.075}{n}} \Rightarrow \frac{0.015}{1.96} = \sqrt{\frac{0.925 \cdot 0.075}{n}} \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \left(\frac{0.015}{1.96} \right)^2 = \frac{0.925 \cdot 0.075}{n} \Rightarrow n = \frac{0.925 \cdot 0.075}{\left(\frac{0.015}{1.96} \right)^2} \approx 1184.4
 \end{aligned}$$

El tamaño mínimo de la muestra es de 1185 envíos.

EJERCICIO 8

a) **(1.25 puntos)** El tiempo que un carpintero necesita para fabricar una mesa sigue una distribución Normal de media 60 minutos y desviación típica de 30 minutos. Si en un mes ese carpintero ha fabricado 100 mesas, calcule la probabilidad de que el tiempo medio de fabricación de las mesas de esa muestra sea superior a 54 minutos.

b) **(1.25 puntos)** El tiempo que un carpintero necesita para fabricar una puerta sigue una distribución Normal de media desconocida y desviación típica de 20 minutos. En un mes ese carpintero ha fabricado 25 puertas, obteniendo un tiempo medio de fabricación de 40 minutos. Halle un intervalo de confianza para el tiempo medio de fabricación de una puerta con un nivel de confianza del 97%. Determine el error máximo cometido al realizar la estimación.

a) X = El tiempo en minutos que un carpintero necesita para fabricar una mesa.

$$X = N(60, 30).$$

La media muestral de tamaño n sigue una distribución normal que tiene la misma media, pero su desviación típica es $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

$$\overline{X}_{100} = N\left(60, \frac{30}{\sqrt{100}}\right) \Rightarrow \overline{X}_{100} = N(60, 3)$$

Nos piden calcular $P(\overline{X}_{100} \geq 54)$.

$$P(\overline{X}_{100} \geq 54) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Tipificamos} \\ Z = \frac{X - 60}{3} \end{array} \right\} = P\left(Z \geq \frac{54 - 60}{3}\right) =$$

$$= P(Z \geq -2) = P(Z \leq 2) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = 0.9772$$

z	0,00	0,01
0,0	0,5000	0,5040
0,1	0,5398	0,5438
0,2	0,5793	0,5832
0,3	0,6179	0,6217
0,4	0,6554	0,6591
0,5	0,6915	0,6950
0,6	0,7257	0,7291
0,7	0,7580	0,7611
0,8	0,7881	0,7910
0,9	0,8159	0,8186
1,0	0,8413	0,8438
1,1	0,8643	0,8665
1,2	0,8849	0,8869
1,3	0,9032	0,9049
1,4	0,9192	0,9207
1,5	0,9332	0,9345
1,6	0,9452	0,9463
1,7	0,9554	0,9564
1,8	0,9641	0,9649
1,9	0,9713	0,9719
2,0	0,9772	0,9778
2,1	0,9801	0,9804
2,2	0,9818	0,9821

b) X = El tiempo en minutos que un carpintero necesita para fabricar una puerta.

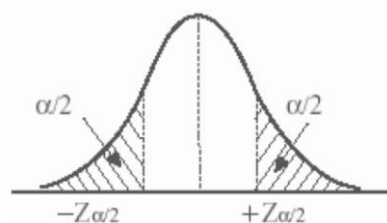
$$X = N(\mu, 20).$$

El tamaño de la muestra es $n = 25$ puertas. La media muestral es $\bar{x} = 40$ minutos.

Con un nivel de confianza del 97% determinamos el valor de $z_{\alpha/2}$.

$$1 - \alpha = 0.97 \rightarrow \alpha = 0.03 \rightarrow \alpha/2 = 0.015 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.985 \rightarrow z_{\alpha/2} = 2.17$$

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808
2,1	0,9824	0,9829	0,9834	0,9838	0,9843	0,9847	0,9851	0,9854
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911



Determinamos el error del intervalo de confianza.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.17 \cdot \frac{20}{\sqrt{25}} = 8.68 \text{ minutos}$$

El intervalo de confianza es:

$$(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error) = (40 - 8.68, 40 + 8.68) = (41.32, 48.68)$$

Según el intervalo obtenido, se puede admitir con una confianza del 97% que el tiempo medio de fabricación de una puerta está entre 41.32 y 48.68 minutos.

El error máximo cometido es de 8.68 minutos.