



Proves d'accés a la universitat Convocatoria 2017

Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales

Serie 2

Responda a CINCO de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué.

Cada cuestión vale 2 puntos.

Puede utilizar calculadora, pero no se permite el uso de calculadoras u otros aparatos que pueden almacenar datos o que pueden transmitir o recibir información.

1. Una empresa fabrica dos tipos de helados, G1 y G2. En el proceso de elaboración utiliza dos tipos de ingredientes, A y B. Dispone de 90 kg del ingrediente A y de 150 kg del ingrediente B. Para fabricar una caja de helados del tipo G1, emplea 1 kg del ingrediente A y 2 kg del ingrediente B. Para fabricar una caja de helados del tipo G2, emplea 2 kg del ingrediente A y 1 kg del ingrediente B. Si la caja de helados del tipo G1 se vende a 10 euros y la del tipo G2 se vende a 15 euros, ¿cuántas cajas de helados de cada tipo deben fabricarse para maximizar los ingresos?
[2 puntos]
2. Un gimnasio cobra una cuota de 42 euros mensuales y cuenta con 2.000 usuarios. Un estudio de mercado afirma que por cada euro que sube (o se baja) la cuota se pierden (o se ganan) 20 usuarios.
 - a) Exprese el número de usuarios del gimnasio en función de la cuota, teniendo en cuenta que la relación entre ambas variables es lineal. ¿Para qué valor de la cuota el gimnasio se quedaría sin usuarios?
[1 punto]
 - b) Determine en qué precio se debe fijar la cuota para obtener un beneficio mensual máximo. ¿Cuál sería ese beneficio y cuántos usuarios tendría el gimnasio en este caso?
[1 punto]
3. Consideramos una función $f(x)$ tal que su primera derivada es $f'(x) = x^2 + bx - 3$, donde b es un parámetro real.
 - a) Determine el valor de b para que $f(x)$ tenga un extremo relativo en $x = -3$ y razone si se trata de un máximo o mínimo.
[1 punto]
 - b) Para $b = -8$, encuentre la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en el punto $(0, 2)$.
[1 punto]

4. Un grupo inversor quiere invertir 6.000 euros en letras, bonos y acciones que tienen una rentabilidad del 10%, del 8% y del 4%, respectivamente. Teniendo en cuenta que desea obtener una rentabilidad global del 7%:
- a) Encuentre la cantidad que debe invertir en letras y en bonos en función de la cantidad invertida en acciones. ¿Qué valores puede tomar la cantidad invertida en acciones sabiendo que las cantidades invertidas en cada uno de los productos deben ser siempre mayores o iguales que cero?
[1 punto]
 - b) Cuánto debe invertir en cada una de las tres opciones si quiere invertir en letras tanto como en los otros dos productos juntos?
[1 punto]
5. Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 7 & -3 \end{pmatrix}$.
- a) Compruebe que $A^3 - I = 0$ donde I es la matriz identidad de orden 2.
[1 punto]
 - b) Calcule A^{11} utilizando la información del apartado a.
[1 punto]
6. El vértice de una parábola es el punto (1, 2).
- a) Si la parábola corta el eje de abscisas en el punto $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$, ¿cuál será el otro punto de corte de la parábola con el eje de abscisas?
[1 punto]
 - b) Encuentre la ecuación de la parábola
[1 punto]

SOLUCIONES

1. Una empresa fabrica dos tipos de helados, G1 y G2. En el proceso de elaboración utiliza dos tipos de ingredientes, A y B. Dispone de 90 kg del ingrediente A y de 150 kg del ingrediente B. Para fabricar una caja de helados del tipo G1, emplea 1 kg del ingrediente A y 2 kg del ingrediente B. Para fabricar una caja de helados del tipo G2, emplea 2 kg del ingrediente A y 1 kg del ingrediente B. Si la caja de helados del tipo G1 se vende a 10 euros y la del tipo G2 se vende a 15 euros, ¿cuántas cajas de helados de cada tipo deben fabricarse para maximizar los ingresos? [2 puntos]

a) Llamamos “x” al número de cajas de helados G1 e “y” al número de cajas de helados G2 que se elaboran.

Realizamos una tabla para organizar toda la información del ejercicio.

	Ingrediente A	Ingrediente B	Ingresos
Nº helados G1 (x)	x	2x	10x
Nº helados G2 (y)	2y	y	15y
TOTALES	$x + 2y$	$2x + y$	$10x + 15y$

La función objetivo son los ingresos que deseamos maximizar y que viene expresado como $I(x, y) = 10x + 15y$.

Las restricciones son:

- Dispone de 90 kg del ingrediente A y de 150 kg del ingrediente B $\rightarrow x + 2y \leq 90; 2x + y \leq 150$.
- Las cantidades deben ser positivas $\rightarrow x \geq 0; y \geq 0$.

Reunimos las restricciones en un sistema de inecuaciones.

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y \leq 90 \\ 2x + y \leq 150 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2y \leq 90 - x \\ y \leq 150 - 2x \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Dibujamos las rectas que delimitan la región factible (la región de las posibles opciones de la escuela).

$$2y = 90 - x$$

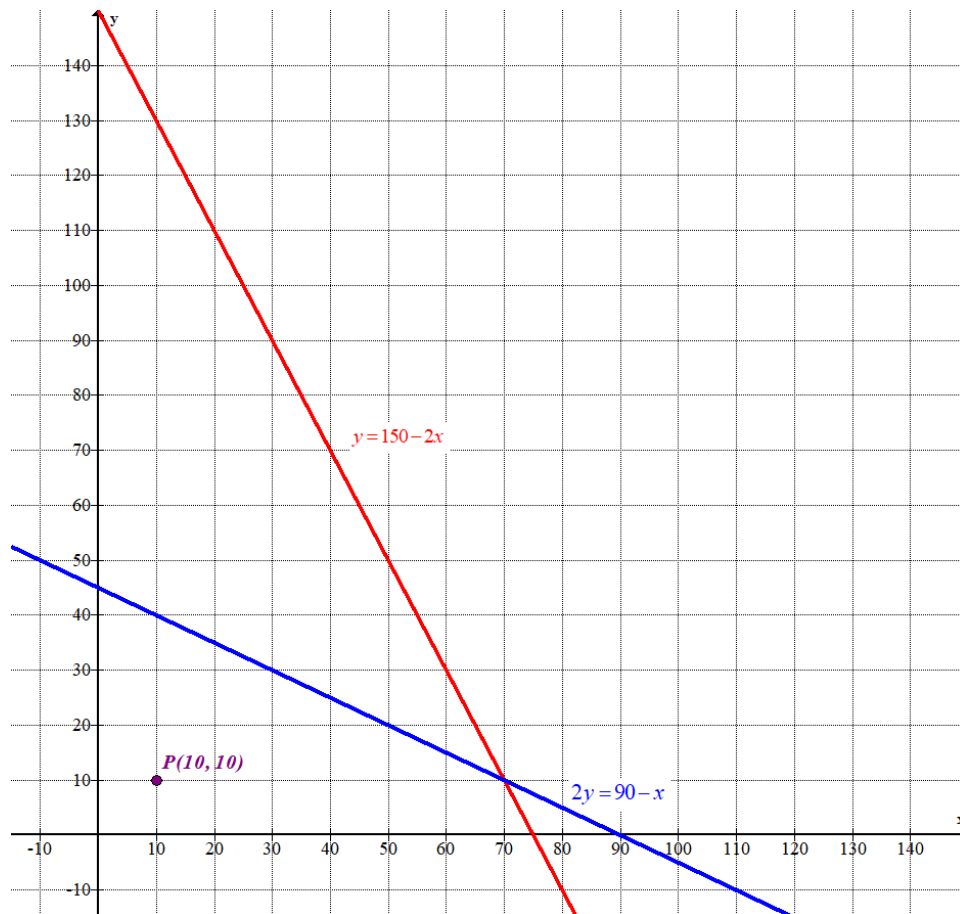
x	$y = \frac{90 - x}{2}$
0	45
70	10
90	0

$$y = 150 - 2x$$

x	$y = 150 - 2x$
0	150
70	10
75	0

$$x \geq 0; y \geq 0$$

Primer
cuadrante

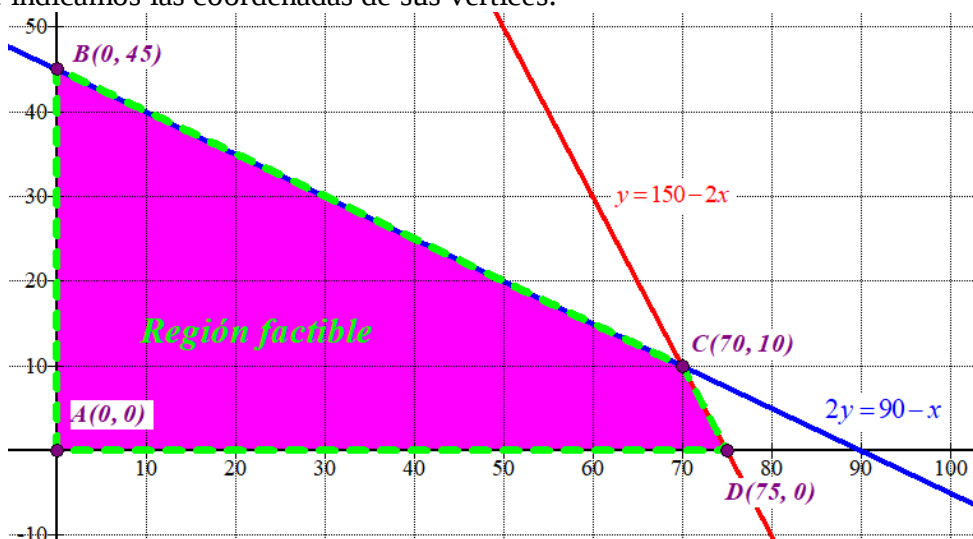


Como las restricciones son $\left. \begin{array}{l} 2y \leq 90 - x \\ y \leq 150 - 2x \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$ la región factible es la región del primer cuadrante

situada por debajo de las rectas azul y roja. Lo comprobamos viendo si el punto $P(10, 10)$ perteneciente a esta región cumple las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 20 \leq 90 - 10 \\ 10 \leq 150 - 20 \\ 10 \geq 0; 10 \geq 0 \end{array} \right\}$$

Se cumplen todas las desigualdades. Coloreamos de rosa la región factible en el siguiente dibujo e indicamos las coordenadas de sus vértices.



b) Valoramos la función ingresos $I(x, y) = 10x + 15y$ en cada uno de los vértices en busca del valor máximo.

$$A(0, 0) \rightarrow I(0, 0) = 0$$

$$B(0, 45) \rightarrow I(0, 45) = 10 \cdot 0 + 15 \cdot 45 = 675$$

$$C(70, 10) \rightarrow I(70, 10) = 10 \cdot 70 + 15 \cdot 10 = 850 \text{ ¡Máximo!}$$

$$D(75, 0) \rightarrow I(75, 0) = 10 \cdot 75 + 15 \cdot 0 = 750$$

Los ingresos máximos que se pueden conseguir cumpliendo con las restricciones son de 850 euros y se consigue con la preparación de 70 cajas de helado G1 y 10 cajas de helado G2.

2. Un gimnasio cobra una cuota de 42 euros mensuales y cuenta con 2.000 usuarios. Un estudio de mercado afirma que por cada euro que sube (o se baja) la cuota se pierden (o se ganan) 20 usuarios.

a) Exprese el número de usuarios del gimnasio en función de la cuota, teniendo en cuenta que la relación entre ambas variables es lineal. ¿Para qué valor de la cuota el gimnasio se quedaría sin usuarios? [1 punto]

b) Determine en qué precio se debe fijar la cuota para obtener un beneficio mensual máximo. ¿Cuál sería ese beneficio y cuántos usuarios tendría el gimnasio en este caso? [1 punto]

a) Con una cuota de 42 euros se tienen 2000 usuarios.

Si la cuota es de $42 + 1 = 43$ euros se tienen $2000 - 20 = 1980$ usuarios.

Si la cuota es de $42 + 2 = 44$ euros se tienen $2000 - 2 \cdot 20$ usuarios.

Si la cuota es de $42 + c$ se tienen $2000 - c \cdot 20$ usuarios.

Si la cuota es de $42 - 1 = 41$ euros se tienen $2000 + 20$ usuarios.

Si la cuota es de $42 - 2 = 40$ euros se tienen $2000 + 2 \cdot 20$ usuarios.

Si llamamos x a la cuota mensual la subida o bajada respecto de la cuota inicial de 42 euros es $x - 42$ el número de usuarios es

$$N(x) = 2000 - (x - 42)20 = 2000 - 20x + 840 = 2840 - 20x.$$

Averiguamos cuando $N(x) = 0$.

$$\left. \begin{array}{l} N(x) = 0 \\ N(x) = 2840 - 20x \end{array} \right\} \Rightarrow 2840 - 20x = 0 \Rightarrow 20x = 2840 \Rightarrow x = \frac{2840}{20} = 142$$

Con una cuota mensual de 142 euros el gimnasio se quedaría sin usuarios.

b) El beneficio mensual es el producto de la cuota mensual por el número de usuarios.

$$B(x) = x \cdot N(x) = x(2840 - 20x) = 2840x - 20x^2$$

Hallamos los puntos críticos de la función beneficio.

$$\left. \begin{array}{l} B(x) = 2840x - 20x^2 \Rightarrow B'(x) = 2840 - 40x \\ B'(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 2840 - 40x = 0 \Rightarrow x = \frac{2840}{40} = 71$$

Hemos obtenido un punto crítico para $x = 71$. Sustituimos este valor en la segunda derivada.

$$B'(x) = 2840 - 40x \Rightarrow B''(x) = -40 \Rightarrow B''(71) = -40 < 0$$

Como la segunda derivada es negativa la función beneficios tiene un máximo relativo en $x = 71$. El beneficio mensual para esta cuota es de $B(71) = 2840 \cdot 71 - 20 \cdot 71^2 = 100820$. El número de usuarios sería $N(71) = 2840 - 20 \cdot 71 = 1420$.

Los beneficios máximos se alcanzan con una cuota de 71 euros mensuales obteniendo 100820 euros de los 1420 usuarios del gimnasio con esa cuota.

3. Consideramos una función $f(x)$ tal que su primera derivada es $f'(x) = x^2 + bx - 3$, donde b es un parámetro real.

a) Determine el valor de b para que $f(x)$ tenga un extremo relativo en $x = -3$ y razone si se trata de un máximo o mínimo. [1 punto]

b) Para $b = -8$, encuentre la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en el punto $(0, 2)$. [1 punto]

a) Si $f(x)$ tiene un extremo relativo en $x = -3$ la derivada debe anularse $\rightarrow f'(-3) = 0$.

$$\left. \begin{array}{l} f'(-3) = 0 \\ f'(x) = x^2 + bx - 3 \end{array} \right\} \Rightarrow 0 = (-3)^2 - 3b - 3 \Rightarrow 9 - 3b - 3 = 0 \Rightarrow 6 - 3b = 0 \Rightarrow \boxed{b = 2}$$

El valor buscado es $b = 2$. Para este valor la derivada de la función es $f'(x) = x^2 + 2x - 3$. Sustituimos $x = -3$ en la segunda derivada para comprobar si es máximo o mínimo.

$$f'(x) = x^2 + 2x - 3 \Rightarrow f''(x) = 2x + 2 \Rightarrow f''(-3) = 2(-3) + 2 = -4 < 0$$

Como la segunda derivada es negativa la función tiene un máximo en $x = -3$.

b) Para $b = -8$ la derivada queda $f'(x) = x^2 - 8x - 3$.

Como la función pasa por el punto $(0, 2)$ tenemos que $f(0) = 2$.

También tenemos que $f'(0) = 0^2 - 8 \cdot 0 - 3 = -3$.

Hallamos la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en el punto $(0, 2)$.

$$\left. \begin{array}{l} f(0) = 2 \\ f'(0) = -3 \\ y - f(0) = f'(0)(x - 0) \end{array} \right\} \Rightarrow y - 2 = -3x \Rightarrow \boxed{y = -3x + 2}$$

4. Un grupo inversor quiere invertir 6.000 euros en letras, bonos y acciones que tienen una rentabilidad del 10%, del 8% y del 4%, respectivamente. Teniendo en cuenta que desea obtener una rentabilidad global del 7%:
- a) Encuentre la cantidad que debe invertir en letras y en bonos en función de la cantidad invertida en acciones. ¿Qué valores puede tomar la cantidad invertida en acciones sabiendo que las cantidades invertidas en cada uno de los productos deben ser siempre mayores o iguales que cero? [1 punto]
- b) Cuánto debe invertir en cada una de las tres opciones si quiere invertir en letras tanto como en los otros dos productos juntos? [1 punto]

a) Llamamos “x”, “y”, “z” a lo invertido en letras, bonos y acciones respectivamente. Obtenemos las ecuaciones con la información proporcionada en el problema.

- Un grupo inversor quiere invertir 6.000 euros $\rightarrow x + y + z = 6000$.
- Invierte en letras, bonos y acciones que tienen una rentabilidad del 10%, del 8% y del 4%, respectivamente. Teniendo en cuenta que desea obtener una rentabilidad global del 7% $\rightarrow 0.10 \cdot x + 0.08 \cdot y + 0.04 \cdot z = 0.07 \cdot 6000 \rightarrow 10x + 8y + 4z = 42000$.

Tenemos dos ecuaciones que forman un sistema que resolvemos dejando las soluciones en función de la cantidad invertida en acciones “z”.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 6000 \\ 10x + 8y + 4z = 42000 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 6000 - y - z \\ 5x + 4y + 2z = 21000 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5(6000 - y - z) + 4y + 2z = 21000 \Rightarrow 30000 - 5y - 5z + 4y + 2z = 21000 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9000 = y + 3z \Rightarrow \boxed{y = 9000 - 3z} \Rightarrow \boxed{x = 6000 - 9000 + 3z - z = 2z - 3000}$$

Las cantidades invertidas son $x = 2z - 3000$ e $y = 9000 - 3z$.

Como los valores del dinero invertido debe ser positivo deben cumplirse las desigualdades:

$$\left. \begin{array}{l} z \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} z \geq 0 \\ 9000 - 3z \geq 0 \\ 2z - 3000 \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} z \geq 0 \\ 9000 \geq 3z \\ 2z \geq 3000 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} z \geq 0 \\ 3000 \geq z \\ z \geq 1500 \end{array} \right\} \Rightarrow 1500 \leq z \leq 3000$$

El dinero invertido en acciones debe estar comprendido entre 1500 y 3000 euros.

b) Añadimos una nueva ecuación al sistema anterior y lo resolvemos.

Quiere invertir en letras (x) tanto como en los otros dos productos juntos $\rightarrow x = y + z$

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 6000 \\ 5x + 4y + 2z = 21000 \\ x = y + z \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 2z - 3000 \\ y = 9000 - 3z \\ x = y + z \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2z - 3000 = 9000 - 3z + z \\ 2z - 3000 = 9000 - 2z \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4z = 12000 \Rightarrow \boxed{z = 3000} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \boxed{x = 2 \cdot 3000 - 3000 = 3000} \\ \boxed{y = 9000 - 3 \cdot 3000 = 0} \end{array} \right.$$

Debe invertir 3000 € en letras, 0 € en bonos y otros 3000 € en acciones.

5. Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 7 & -3 \end{pmatrix}$.

a) Compruebe que $A^3 - I = 0$ donde I es la matriz identidad de orden 2. [1 punto]

b) Calcule A^{11} utilizando la información del apartado a. [1 punto]

a) Para que se cumpla $A^3 - I = 0$ debe cumplirse que $A^3 = I$.

Determinamos la expresión de A^3 y comprobamos si obtenemos la matriz identidad.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 7 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 7 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-7 & -2+3 \\ 14-21 & -7+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -7 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -7 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 7 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6+7 & 3-3 \\ -14+14 & 7-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

Es cierto que $A^3 - I = 0$.

b) Como sabemos que $A^3 = I$ lo aplicamos al cálculo de A^{11} .

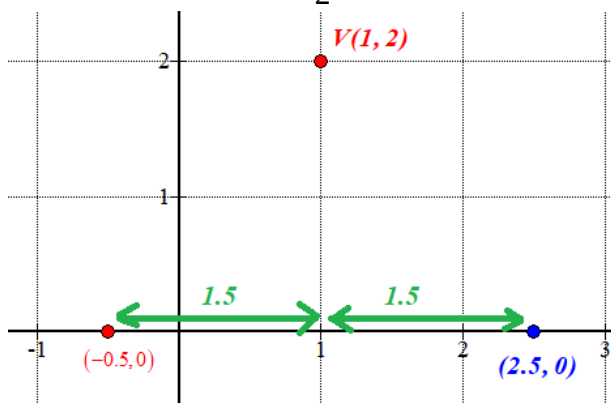
$$A^{11} = A^3 \cdot A^3 \cdot A^3 \cdot A^2 = I \cdot I \cdot I \cdot A^2 = A^2 = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -7 & 2 \end{pmatrix}$$

6. El vértice de una parábola es el punto $(1, 2)$.

a) Si la parábola corta el eje de abscisas en el punto $\left(\frac{-1}{2}, 0\right)$, ¿cuál será el otro punto de corte de la parábola con el eje de abscisas? [1 punto]

b) Encuentre la ecuación de la parábola. [1 punto]

a) Si el vértice de la parábola está situado en $x=1$ y en $x=\frac{-1}{2}$ la función vale 0 la función también vale 0 en el punto simétrico de $x=\frac{-1}{2}$ respecto de 1.



El otro punto es $(2.5, 0)$.

b) La parábola tiene ecuación $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Sabemos que la parábola tiene un extremo relativo en $x=1$, por lo que $f'(1) = 0$.

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= ax^2 + bx + c \Rightarrow f'(x) = 2ax + b \\ f'(1) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 0 = 2a + b \Rightarrow \boxed{b = -2a}$$

La ecuación de la parábola queda $f(x) = ax^2 - 2ax + c$.

También sabemos que la parábola pasa por el punto $(1, 2)$, por lo que $f(1) = 2$.

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= ax^2 - 2ax + c \\ f(1) &= 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2 = a \cdot 1^2 - 2a + c \Rightarrow 2 = -a + c \Rightarrow \boxed{c = 2 + a}$$

La ecuación de la parábola queda $f(x) = ax^2 - 2ax + 2 + a$.

También sabemos que la función pasa por el punto $\left(\frac{-1}{2}, 0\right)$.

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= ax^2 - 2ax + 2 + a \\ f\left(\frac{-1}{2}\right) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 0 = a \cdot \left(\frac{-1}{2}\right)^2 - 2a \cdot \left(\frac{-1}{2}\right) + 2 + a \Rightarrow 0 = \frac{a}{4} + a + 2 + a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 = a + 4a + 8 + 4a \Rightarrow 9a + 8 = 0 \Rightarrow 9a = -8 \Rightarrow \boxed{a = \frac{-8}{9}}$$

La ecuación de la parábola queda:

$$f(x) = \frac{-8}{9}x^2 - 2\left(\frac{-8}{9}\right)x + 2 - \frac{8}{9} \Rightarrow f(x) = \frac{-8}{9}x^2 + \frac{16}{9}x + \frac{10}{9}.$$