



Generalitat de Catalunya  
**Consell Interuniversitari de Catalunya**

Oficina d'Accés a la Universitat

## Proves d'accés a la universitat Convocatoria 2017

### Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales

#### Serie 1

**Responda a CINCO de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué.**

**Cada cuestión vale 2 puntos.**

**Puede utilizar calculadora, pero no se permite el uso de calculadoras u otros aparatos que pueden almacenar datos o que pueden transmitir o recibir información.**

1. De una función  $y = f(x)$  se sabe que su derivada es  $f'(x) = x^3 - 4x$ .

a) Determine los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función  $y = f(x)$ .

[1 punto]

b) Determine las abscisas de sus extremos relativos y clasifíquelos.

[1 punto]

2. Desde una barca se dispara una bengala de salvamento marítimo que se apaga al cabo de 4 minutos. En este intervalo de tiempo, se comprueba que la intensidad lumínica de la bengala en función del tiempo, medida en porcentajes del 0% al 100%, queda perfectamente descrita por la expresión  $L(t) = 25 \cdot t \cdot (4 - t)$ , en la que el tiempo  $t$  varía entre 0 y 4 minutos.

a) Calcule para qué valor de  $t$  el porcentaje de intensidad lumínica será máxima.

[1 punto]

b) Si desde la costa la bengala sólo es visible cuando su intensidad lumínica es superior al 75%, ¿cuál es el intervalo de tiempo en el que será visible desde la costa y, por tanto, será más factible el salvamento?

[1 punto]

3. Considere las matrices  $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  y  $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ m & n \end{pmatrix}$ .

a) Compruebe que se cumple la igualdad  $(A - B) \cdot (A + B) = A^2 - B^2$ .

[1 punto]

b) Determine  $m$  y  $n$  para que las matrices  $B$  y  $C$  conmuten, es decir,  $B \cdot C = C \cdot B$ .

[1 punto]

4. Tenemos unas cuantas monedas de un euro distribuidas en tres pilas. Pasamos doce monedas de la tercera pila a la segunda y, a continuación, pasamos diez de la segunda pila a la primera. Una vez hecho esto, las tres pilas tienen la misma cantidad de monedas.
- a) Con estos datos, ¿podemos determinar la cantidad de monedas que había inicialmente en cada pila? Razone la respuesta.  
[1 punto]
- b) Averigüe la cantidad de monedas que había inicialmente en cada pila si sabemos que en total hay 51 monedas.  
[1 punto]
5. Una compañía aérea quiere organizar para este verano un puente aéreo entre el aeropuerto de Barcelona - El Prat y el de Palma de Mallorca, con plazas suficientes de pasaje y carga para transportar al menos 1.600 personas y 96 toneladas de equipaje y mercancías. Para hacerlo, tiene a su disposición 11 aviones del tipo A, que pueden transportar a 200 personas y 6 toneladas de equipaje y mercancías cada uno, y 8 aviones del tipo B, que pueden transportar 100 personas y 15 toneladas cada uno. Si la contratación de un avión del tipo A cuesta 4.000 euros y la de un avión del tipo B cuesta 1.000:
- a) Determine la función objetivo y las restricciones, y dibuje la región de las posibles opciones que tiene la compañía.  
[1 punto]
- b) Calcule el número de aviones de cada tipo a contratar para que el coste sea el mínimo y determine cuál es ese coste mínimo.  
[1 punto]
6. Considere la función  $f(x) = -x^2 + bx + c$ , con  $b$  y  $c$  números reales.
- a) Encuentre  $b$  y  $c$  de manera que la gráfica de la función pase por el punto  $(-1, 0)$  y tenga un extremo local en el punto de abscisas  $x = 3$ . Razone de qué tipo de extremo relativo se trata.  
[1 punto]
- b) Para el caso  $b = 3$  y  $c = 2$ , encuentre la ecuación de la recta tangente a la gráfica que es paralela a la recta  $y = 5x - 2$ .  
[1 punto]

## SOLUCIONES

1. De una función  $y = f(x)$  se sabe que su derivada es  $f'(x) = x^3 - 4x$ .

a) Determine los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función  $y = f(x)$ .

[1 punto]

b) Determine las abscisas de sus extremos relativos y clasifíquelos.

[1 punto]

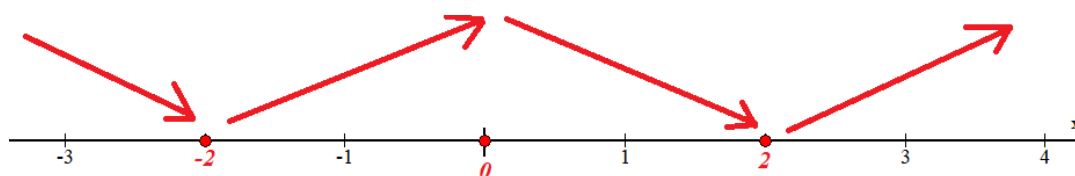
a) Hallamos los puntos críticos de la función que son los valores que anulan la derivada.

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = x^3 - 4x \\ f'(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x^3 - 4x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 4 = 0 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = \sqrt{4} = \pm 2 \end{cases}$$

Tenemos tres puntos críticos. Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos valores.

- En el intervalo  $(-\infty, -2)$  consideramos  $x = -3$  y la derivada vale  $f'(-3) = (-3)^3 - 4(-3) = -15 < 0$ . La función decrece en  $(-\infty, -2)$ .
- En el intervalo  $(-2, 0)$  consideramos  $x = -1$  y la derivada vale  $f'(-1) = (-1)^3 - 4(-1) = 3 > 0$ . La función crece en  $(-2, 0)$ .
- En el intervalo  $(0, 2)$  consideramos  $x = 1$  y la derivada vale  $f'(1) = 1^3 - 4 \cdot 1 = -3 < 0$ . La función decrece en  $(0, 2)$ .
- En el intervalo  $(2, +\infty)$  consideramos  $x = 3$  y la derivada vale  $f'(3) = 3^3 - 4 \cdot 3 = 15 > 0$ . La función crece en  $(2, +\infty)$ .

La función sigue el esquema siguiente.



La función decrece en  $(-\infty, -2) \cup (0, 2)$  y crece en  $(-2, 0) \cup (2, +\infty)$ .

b) Con lo obtenido en el apartado anterior podemos decir que la función presenta un máximo relativo en  $x = 0$  y dos mínimos relativos, uno en  $x = -2$  y otro en  $x = 2$ .

2. Desde una barca se dispara una bengala de salvamento marítimo que se apaga al cabo de 4 minutos. En este intervalo de tiempo, se comprueba que la intensidad lumínica de la bengala en función del tiempo, medida en porcentajes del 0% al 100%, queda perfectamente descrita por la expresión  $L(t) = 25 \cdot t \cdot (4 - t)$ , en la que el tiempo  $t$  varía entre 0 y 4 minutos.

a) Calcule para qué valor de  $t$  el porcentaje de intensidad lumínica será máxima. [1 punto]

b) Si desde la costa la bengala sólo es visible cuando su intensidad lumínica es superior al 75%, ¿cuál es el intervalo de tiempo en el que será visible desde la costa y, por tanto, será más factible el salvamento? [1 punto]

a) Obtenemos la expresión polinómica de la función:  $L(t) = 25 \cdot t \cdot (4 - t) = 100t - 25t^2$ .

Buscamos los puntos críticos de la función averiguando cuando se anula la derivada.

$$L(t) = 100t - 25t^2 \Rightarrow L'(t) = 100 - 50t$$

$$L'(t) = 0 \Rightarrow 100 - 50t = 0 \Rightarrow 50t = 100 \Rightarrow t = 2 \in [0, 4]$$

Determinamos el signo de la derivada segunda para  $t = 2$ .

$$L'(t) = 100 - 50t \Rightarrow L''(t) = -50 \Rightarrow L''(2) = -50 < 0$$

Como la segunda derivada es negativa, para  $t = 2$  la función tiene un valor máximo de

$$L(2) = 25 \cdot 2 \cdot (4 - 2) = 100 \text{ \% de intensidad lumínica.}$$

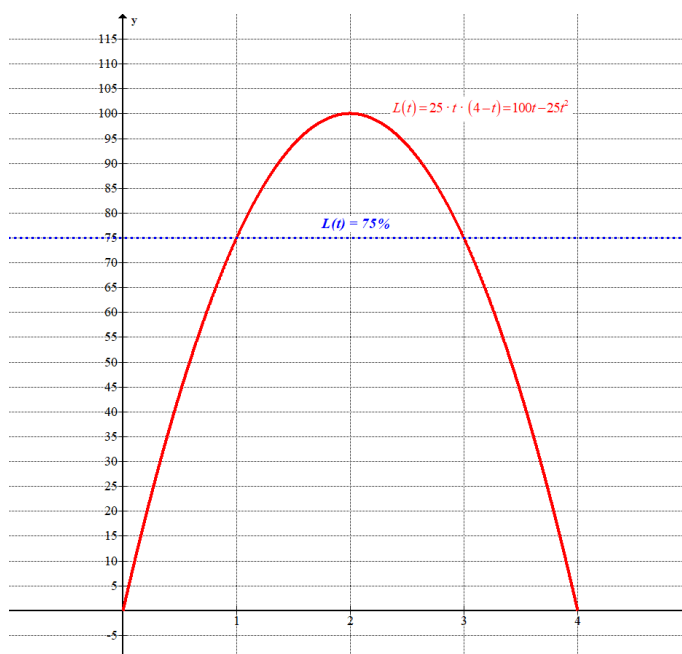
b) Averiguamos cuando la intensidad lumínica es del 75%.

$$L(t) = 75 \Rightarrow 100t - 25t^2 = 75 \Rightarrow 25t^2 - 100t + 75 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t^2 - 4t + 3 = 0 \Rightarrow t = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 3}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = \begin{cases} \frac{4+2}{2} = 3 = t \\ \frac{4-2}{2} = 1 = t \end{cases}$$

Con lo obtenido tenemos que pasado 1 minuto la intensidad lumínica es del 75%, sube hasta que en el minuto 2 alcanza una luminosidad del 100% y a partir de ahí baja hasta que en el minuto 3 está de nuevo al 75% de intensidad lumínica.

La intensidad lumínica es superior al 75% entre el minuto 1 y el 3.



3. Considere las matrices  $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  y  $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ m & n \end{pmatrix}$ .

a) Compruebe que se cumple la igualdad  $(A-B) \cdot (A+B) = A^2 - B^2$ . [1 punto]

b) Determine  $m$  y  $n$  para que las matrices B y C conmuten, es decir,  $B \cdot C = C \cdot B$ . [1 punto]

a) Determinamos la matriz resultante del primer miembro de la igualdad.

$$\left. \begin{aligned} A-B &= \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \\ A+B &= \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \Rightarrow (A-B) \cdot (A+B) = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+24 & 6+4 \\ 4+6 & 24+1 \end{pmatrix}$$

Determinamos la matriz resultante del segundo miembro de la igualdad.

$$A^2 - B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+25 & 5+5 \\ 5+5 & 25+1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0+1 & 0+0 \\ 0+0 & 1+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 & 10 \\ 10 & 26 \end{pmatrix}$$

Se puede observar que se obtiene el mismo resultado.

b) Resolvemos la ecuación matricial planteada.

$$B \cdot C = C \cdot B \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ m & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ m & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} m & n \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ n & m \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m = -1 \\ n = 1 \\ 1 = n \\ -1 = m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = -1 \\ n = 1 \end{cases}$$

Para que las matrices B y C conmuten debe ser  $m = -1$  y  $n = 1$ .

**4.** Tenemos unas cuantas monedas de un euro distribuidas en tres pilas. Pasamos doce monedas de la tercera pila a la segunda y, a continuación, pasamos diez de la segunda pila a la primera. Una vez hecho esto, las tres pilas tienen la misma cantidad de monedas.

**a)** Con estos datos, ¿podemos determinar la cantidad de monedas que había inicialmente en cada pila? Razone la respuesta. [1 punto]

**b)** Averigüe la cantidad de monedas que había inicialmente en cada pila si sabemos que en total hay 51 monedas. [1 punto]

a) Llamamos  $x$ ,  $y$ ,  $z$  al número de monedas de 1 euro apiladas en la primera, segunda y tercera pilas.

Si pasamos doce monedas de la tercera pila a la segunda tendríamos  $12 + y$  en la segunda pila y  $z - 12$  en la tercera.

Si a continuación, pasamos diez de la segunda pila a la primera tendríamos  $12 + y - 10 = y + 2$  en la segunda pila y  $x + 10$  en la primera.

Una vez hecho esto, las tres pilas tienen la misma cantidad de monedas. Lo expresamos en un sistema de ecuaciones.

$$x + 10 = z - 12 = y + 2 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 10 = y + 2 \\ x + 10 = z - 12 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 8 = y \\ x + 22 = z \end{array} \right\}$$

No podemos determinar el número de monedas de 1 euro que hay en cada pila. Nos falta algún dato más.

b) Si en total hay 51 monedas podemos añadir una tercera ecuación al sistema:  $x + y + z = 51$ . Resolvemos el nuevo sistema.

$$\left. \begin{array}{l} x + 8 = y \\ x + 22 = z \\ x + y + z = 51 \end{array} \right\} \Rightarrow x + x + 8 + x + 22 = 51 \Rightarrow 3x = 21 \Rightarrow \boxed{x = 7} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \boxed{y = 7 + 8 = 15} \\ \boxed{z = 7 + 22 = 29} \end{array} \right.$$

Hay 7 monedas en la primera pila, 15 en la segunda y 29 en la tercera.

5. Una compañía aérea quiere organizar para este verano un puente aéreo entre el aeropuerto de Barcelona - El Prat y el de Palma de Mallorca, con plazas suficientes de pasaje y carga para transportar al menos 1.600 personas y 96 toneladas de equipaje y mercancías. Para hacerlo, tiene a su disposición 11 aviones del tipo A, que pueden transportar a 200 personas y 6 toneladas de equipaje y mercancías cada uno, y 8 aviones del tipo B, que pueden transportar 100 personas y 15 toneladas cada uno. Si la contratación de un avión del tipo A cuesta 4.000 euros y la de un avión del tipo B cuesta 1.000:

- a) Determine la función objetivo y las restricciones, y dibuje la región de las posibles opciones que tiene la compañía. [1 punto]  
 b) Calcule el número de aviones de cada tipo a contratar para que el coste sea el mínimo y determine cuál es ese coste mínimo. [1 punto]

a) Llamamos “x” al número aviones tipo A e “y” al número de aviones tipo B que se contratan. Realizamos una tabla para organizar toda la información del ejercicio.

|                  | Nº pasajeros | Toneladas de carga | Coste       |
|------------------|--------------|--------------------|-------------|
| Nº aviones A (x) | 200x         | 6x                 | 4000x       |
| Nº aviones B (y) | 100y         | 15y                | 1000y       |
| TOTALES          | 200x+100y    | 6x+15y             | 4000x+1000y |

La función objetivo es el coste que deseamos minimizar y que viene expresado como

$$C(x, y) = 4000x + 1000y.$$

Las restricciones son:

- Con plazas suficientes de pasaje y carga para transportar al menos 1.600 personas y 96 toneladas de equipaje y mercancías  $\rightarrow 200x + 100y \geq 1600$ ;  $6x + 15y \geq 96$ .
- Tiene a su disposición 11 aviones del tipo A y 8 aviones del tipo B  $\rightarrow x \leq 11$ ;  $y \leq 8$ .
- Las cantidades deben ser positivas  $\rightarrow x \geq 0$ ;  $y \geq 0$ .

Reunimos las restricciones en un sistema de inecuaciones.

$$\left. \begin{array}{l} 200x + 100y \geq 1600 \\ 6x + 15y \geq 96 \\ x \leq 11 \\ y \leq 8 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x + y \geq 16 \\ 2x + 5y \geq 32 \\ x \leq 11 \\ y \leq 8 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y \geq 16 - 2x \\ 5y \geq 32 - 2x \\ x \leq 11 \\ y \leq 8 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

|                                                                                                                                                     |                         |             |         |                      |   |   |   |   |                                                                                                                                                                              |   |                         |   |     |   |   |    |   |                                                                                                                                                  |        |   |    |   |    |   |    |   |                                                                                                                                               |   |       |   |   |   |   |    |   |                  |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------|-------------|---------|----------------------|---|---|---|---|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|-------------------------|---|-----|---|---|----|---|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------|---|----|---|----|---|----|---|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|-------|---|---|---|---|----|---|------------------|
| $y = 16 - 2x$                                                                                                                                       | $5y = 32 - 2x$          | $x = 11$    | $y = 8$ | $x \geq 0; y \geq 0$ |   |   |   |   |                                                                                                                                                                              |   |                         |   |     |   |   |    |   |                                                                                                                                                  |        |   |    |   |    |   |    |   |                                                                                                                                               |   |       |   |   |   |   |    |   |                  |
| <table> <tr><td>x</td><td>y = 16 - 2x</td></tr> <tr><td>0</td><td>16</td></tr> <tr><td>6</td><td>4</td></tr> <tr><td>8</td><td>0</td></tr> </table> | x                       | y = 16 - 2x | 0       | 16                   | 6 | 4 | 8 | 0 | <table> <tr><td>x</td><td>y = <math>\frac{32 - 2x}{5}</math></td></tr> <tr><td>0</td><td>6.4</td></tr> <tr><td>6</td><td>4</td></tr> <tr><td>16</td><td>0</td></tr> </table> | x | y = $\frac{32 - 2x}{5}$ | 0 | 6.4 | 6 | 4 | 16 | 0 | <table> <tr><td>x = 11</td><td>y</td></tr> <tr><td>11</td><td>2</td></tr> <tr><td>11</td><td>4</td></tr> <tr><td>11</td><td>8</td></tr> </table> | x = 11 | y | 11 | 2 | 11 | 4 | 11 | 8 | <table> <tr><td>x</td><td>y = 8</td></tr> <tr><td>0</td><td>8</td></tr> <tr><td>4</td><td>8</td></tr> <tr><td>11</td><td>8</td></tr> </table> | x | y = 8 | 0 | 8 | 4 | 8 | 11 | 8 | Primer cuadrante |
| x                                                                                                                                                   | y = 16 - 2x             |             |         |                      |   |   |   |   |                                                                                                                                                                              |   |                         |   |     |   |   |    |   |                                                                                                                                                  |        |   |    |   |    |   |    |   |                                                                                                                                               |   |       |   |   |   |   |    |   |                  |
| 0                                                                                                                                                   | 16                      |             |         |                      |   |   |   |   |                                                                                                                                                                              |   |                         |   |     |   |   |    |   |                                                                                                                                                  |        |   |    |   |    |   |    |   |                                                                                                                                               |   |       |   |   |   |   |    |   |                  |
| 6                                                                                                                                                   | 4                       |             |         |                      |   |   |   |   |                                                                                                                                                                              |   |                         |   |     |   |   |    |   |                                                                                                                                                  |        |   |    |   |    |   |    |   |                                                                                                                                               |   |       |   |   |   |   |    |   |                  |
| 8                                                                                                                                                   | 0                       |             |         |                      |   |   |   |   |                                                                                                                                                                              |   |                         |   |     |   |   |    |   |                                                                                                                                                  |        |   |    |   |    |   |    |   |                                                                                                                                               |   |       |   |   |   |   |    |   |                  |
| x                                                                                                                                                   | y = $\frac{32 - 2x}{5}$ |             |         |                      |   |   |   |   |                                                                                                                                                                              |   |                         |   |     |   |   |    |   |                                                                                                                                                  |        |   |    |   |    |   |    |   |                                                                                                                                               |   |       |   |   |   |   |    |   |                  |
| 0                                                                                                                                                   | 6.4                     |             |         |                      |   |   |   |   |                                                                                                                                                                              |   |                         |   |     |   |   |    |   |                                                                                                                                                  |        |   |    |   |    |   |    |   |                                                                                                                                               |   |       |   |   |   |   |    |   |                  |
| 6                                                                                                                                                   | 4                       |             |         |                      |   |   |   |   |                                                                                                                                                                              |   |                         |   |     |   |   |    |   |                                                                                                                                                  |        |   |    |   |    |   |    |   |                                                                                                                                               |   |       |   |   |   |   |    |   |                  |
| 16                                                                                                                                                  | 0                       |             |         |                      |   |   |   |   |                                                                                                                                                                              |   |                         |   |     |   |   |    |   |                                                                                                                                                  |        |   |    |   |    |   |    |   |                                                                                                                                               |   |       |   |   |   |   |    |   |                  |
| x = 11                                                                                                                                              | y                       |             |         |                      |   |   |   |   |                                                                                                                                                                              |   |                         |   |     |   |   |    |   |                                                                                                                                                  |        |   |    |   |    |   |    |   |                                                                                                                                               |   |       |   |   |   |   |    |   |                  |
| 11                                                                                                                                                  | 2                       |             |         |                      |   |   |   |   |                                                                                                                                                                              |   |                         |   |     |   |   |    |   |                                                                                                                                                  |        |   |    |   |    |   |    |   |                                                                                                                                               |   |       |   |   |   |   |    |   |                  |
| 11                                                                                                                                                  | 4                       |             |         |                      |   |   |   |   |                                                                                                                                                                              |   |                         |   |     |   |   |    |   |                                                                                                                                                  |        |   |    |   |    |   |    |   |                                                                                                                                               |   |       |   |   |   |   |    |   |                  |
| 11                                                                                                                                                  | 8                       |             |         |                      |   |   |   |   |                                                                                                                                                                              |   |                         |   |     |   |   |    |   |                                                                                                                                                  |        |   |    |   |    |   |    |   |                                                                                                                                               |   |       |   |   |   |   |    |   |                  |
| x                                                                                                                                                   | y = 8                   |             |         |                      |   |   |   |   |                                                                                                                                                                              |   |                         |   |     |   |   |    |   |                                                                                                                                                  |        |   |    |   |    |   |    |   |                                                                                                                                               |   |       |   |   |   |   |    |   |                  |
| 0                                                                                                                                                   | 8                       |             |         |                      |   |   |   |   |                                                                                                                                                                              |   |                         |   |     |   |   |    |   |                                                                                                                                                  |        |   |    |   |    |   |    |   |                                                                                                                                               |   |       |   |   |   |   |    |   |                  |
| 4                                                                                                                                                   | 8                       |             |         |                      |   |   |   |   |                                                                                                                                                                              |   |                         |   |     |   |   |    |   |                                                                                                                                                  |        |   |    |   |    |   |    |   |                                                                                                                                               |   |       |   |   |   |   |    |   |                  |
| 11                                                                                                                                                  | 8                       |             |         |                      |   |   |   |   |                                                                                                                                                                              |   |                         |   |     |   |   |    |   |                                                                                                                                                  |        |   |    |   |    |   |    |   |                                                                                                                                               |   |       |   |   |   |   |    |   |                  |



$$\left. \begin{array}{l} y \geq 16 - 2x \\ 5y \geq 32 - 2x \end{array} \right\}$$
 Como las restricciones son  $x \leq 11$   
 $y \leq 8$   
 $x \geq 0; y \geq 0$

la región factible es la región del primer cuadrante

situada por encima de las rectas oblicuas de color azul y rojo, por debajo de la recta horizontal y a la izquierda de la recta vertical. Lo comprobamos viendo si el punto  $P(9, 6)$  perteneciente a esta región cumple las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 6 \geq 16 - 2 \cdot 9 \\ 5 \cdot 6 \geq 32 - 2 \cdot 9 \\ 9 \leq 11 \\ 6 \leq 8 \\ 9 \geq 0; 6 \geq 0 \end{array} \right\}$$

Se cumplen todas las desigualdades. Coloreamos de gris la región factible en el siguiente dibujo e indicamos las coordenadas de sus vértices.



- b) Valoramos la función coste  $C(x, y) = 4000x + 1000y$  en cada uno de los vértices en busca del valor mínimo.

$$A(11, 8) \rightarrow C(11, 8) = 4000 \cdot 11 + 1000 \cdot 8 = 52000$$

$$B(4, 8) \rightarrow C(4, 8) = 4000 \cdot 4 + 1000 \cdot 8 = 24000 \text{ ¡Mínimo!}$$

$$C(6, 4) \rightarrow C(6, 4) = 4000 \cdot 6 + 1000 \cdot 4 = 28000$$

$$D(11, 2) \rightarrow C(11, 2) = 4000 \cdot 11 + 1000 \cdot 2 = 46000$$

El coste mínimo cumpliendo con las restricciones del problema es de 24 000 euros y se consigue contratando 4 aviones del tipo A y 8 del tipo B.

6. Considere la función  $f(x) = -x^2 + bx + c$ , con  $b$  y  $c$  números reales.

- a) Encuentre  $b$  y  $c$  de manera que la gráfica de la función pase por el punto  $(-1, 0)$  y tenga un extremo local en el punto de abscisas  $x = 3$ . Razone de qué tipo de extremo relativo se trata. [1 punto]
- b) Para el caso  $b = 3$  y  $c = 2$ , encuentre la ecuación de la recta tangente a la gráfica que es paralela a la recta  $y = 5x - 2$ . [1 punto]

- a) Si la función tiene un extremo relativo en  $x = 3$  se cumple que la derivada se anula para este valor  $\Rightarrow f'(3) = 0$ .

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = -x^2 + bx + c \rightarrow f'(x) = -2x + b \\ f'(3) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 0 = -2 \cdot 3 + b \Rightarrow \boxed{b = 6}$$

La función queda  $f(x) = -x^2 + 6x + c$ .

Como la función pasa por el punto  $(-1, 0)$  se cumple que  $f(-1) = 0$ .

$$\left. \begin{array}{l} f(-1) = 0 \\ f(x) = -x^2 + 6x + c \end{array} \right\} \Rightarrow 0 = -(-1)^2 + 6(-1) + c \Rightarrow 0 = -1 - 6 + c \Rightarrow \boxed{c = 7}$$

Los valores que cumplen lo pedido son  $b = 6$  y  $c = 7$ .

La función queda  $f(x) = -x^2 + 6x + 7$ .

Obtenemos el signo de la segunda derivada de la función en  $x = 3$ .

$$f'(x) = -2x + 6 \Rightarrow f''(x) = -2 \Rightarrow f''(3) = -2 < 0$$

Al ser negativa la segunda derivada la función tiene un máximo relativo en  $x = 3$ .

- b) Para el caso  $b = 3$  y  $c = 2$  la función queda  $f(x) = -x^2 + 3x + 2$ .

Nos piden hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica que es paralela a la recta  $y = 5x - 2$ , por lo que la pendiente de la recta tangente debe ser la misma que la recta dada, es decir, 5. La derivada de la función debe valer 5.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = -x^2 + 3x + 2 \Rightarrow f'(x) = -2x + 3 \\ f'(x) = 5 \end{array} \right\} \Rightarrow 5 = -2x + 3 \Rightarrow 2x = -2 \Rightarrow \boxed{x = -1}$$

Determinamos la ecuación de la recta tangente a la gráfica en  $x = -1$ .

$$\left. \begin{array}{l} f(-1) = -(-1)^2 + 3(-1) + 2 = -2 \\ f'(-1) = 5 \\ y - f(-1) = f'(-1)(x - (-1)) \end{array} \right\} \Rightarrow y - (-2) = 5(x + 1) \Rightarrow y + 2 = 5x + 5 \Rightarrow \boxed{y = 5x + 3}$$

La ecuación de la recta tangente a la gráfica que es paralela a la recta  $y = 5x - 2$  tiene ecuación  $y = 5x + 3$ .