



Generalitat de Catalunya
Consell Interuniversitari de Catalunya

Oficina d'Accés a la Universitat

Proves d'accés a la universitat Convocatoria 2017

Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales

Serie 5

Responda a CINCO de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué.

Cada cuestión vale 2 puntos.

Puede utilizar calculadora, pero no se permite el uso de calculadoras u otros aparatos que pueden almacenar datos o que pueden transmitir o recibir información.

1. Un taller de joyería dispone de 150 gramos de plata y de 180 horas de trabajo para producir dos modelos de anillos. Para hacer un anillo del modelo A se necesitan 6 gramos de plata y 3 horas de trabajo, mientras que para hacer uno del modelo B se necesitan 2 gramos de plata y 6 horas de trabajo.

Los anillos de los modelos A y B proporcionan, respectivamente, 35 y 55 euros de beneficio por unidad. Sabiendo que se venderá toda la producción, determine cuántos anillos de cada modelo es necesario producir para obtener el máximo beneficio e indique cuál es ese beneficio.

[2 puntos]

2. Una empresa ofrece 225 euros por repartir todo un paquete de hojas de propaganda. Roc, Martí y Guiu deciden hacer el trabajo entre los tres: Martí reparte un 20% del total; Guiu reparte 100 hojas más que Roc, y entre Roc y Martí reparten 850.

a) Calcule el número de hojas que ha repartido cada uno de ellos.

[1 punto]

b) Una vez terminado el trabajo, deciden dividir las ganancias entre los tres, proporcionalmente a las hojas repartidas. Según este criterio, ¿cuánto dinero cobrará Guiu, cuánto cobrará Roc y cuánto Martí?

[1 punto]

3. En 2008 la nómina de un trabajador era de 1.000 euros. En 2009 la empresa donde trabajaba decidió rebajarle la nómina un 10%. El año 2010 con la intención de recuperar la situación económica del trabajador, la empresa decidió incrementar la nómina un 10%.

a) Calcule la nómina del trabajador una vez aplicada la rebaja del 10 % del año 2009.

[0,5 puntos]

b) Calcule la nómina del trabajador después de aplicar el incremento del 10 % del año 2010.

[0,5 puntos]

c) Si una nómina de 1.000 euros ha sufrido una rebaja de un 10 %, ¿qué incremento porcentual se debe aplicar a la nueva nómina para recuperar el sueldo de 1.000 euros?

[1 punto]

4. Las pérdidas o beneficios de una empresa vienen dados por la función $f(t) = \frac{3t-6}{t+2}$, donde $f(t)$ se expresa en cientos de miles de euros, una vez transcurridos t años desde inicio de 2010.
- a) Haga un esbozo de la gráfica de la función $f(t)$ para $t > 0$, calculando los intervalos de crecimiento, los cortes con los ejes y asíntotas.
[1 punto]
- b) Al inicio del año 2010, ¿cuántos euros perdía o ganaba la empresa? ¿Qué años tuvo pérdidas la empresa y a partir de qué año dejó de tener?
[0,5 puntos]
- c) ¿A partir de qué año las ganancias de la empresa fueron mayores o iguales a un centenar de miles de euros? ¿Se pueden superar los tres cientos de miles de euros de beneficios? Razone las respuestas.
[0,5 puntos]
5. El precio en euros de una piedra preciosa es cinco veces el cuadrado de su peso en gramos. Si tenemos una piedra preciosa de 8 gramos y nos planteamos partirla en dos trozos:
- a) ¿Qué peso debe tener cada uno de los trozos para que el conjunto valga lo menos posible?
[1 punto]
- b) ¿Cuál es el precio mínimo y el precio máximo que puede valer este conjunto?
[1 punto]
6. Considere las matrices $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- a) Calcule el valor del parámetro a para el cual se cumple que $A \cdot B = B \cdot A$.
[1 punto]
- b) Para el valor $a = 2$, encuentre una matriz X tal que $A \cdot X \cdot A = B$.
[1 punto]

SOLUCIONES

1. Un taller de joyería dispone de 150 gramos de plata y de 180 horas de trabajo para producir dos modelos de anillos. Para hacer un anillo del modelo A se necesitan 6 gramos de plata y 3 horas de trabajo, mientras que para hacer uno del modelo B se necesitan 2 gramos de plata y 6 horas de trabajo. Los anillos de los modelos A y B proporcionan, respectivamente, 35 y 55 euros de beneficio por unidad. Sabiendo que se venderá toda la producción, determine cuántos anillos de cada modelo es necesario producir para obtener el máximo beneficio e indique cuál es ese beneficio. [2 puntos]

a) Llamamos “x” al número de anillos modelo A e “y” al número de anillos modelo B que se fabrican.

Realizamos una tabla para organizar toda la información del ejercicio.

	Gramos plata	Horas de trabajo	Beneficio
Nº anillos A (x)	6x	3x	35x
Nº anillos B (y)	2y	6y	55y
TOTALES	$6x + 2y$	$3x + 6y$	$35x + 55y$

La función objetivo es el beneficio que deseamos maximizar y que viene expresado como $B(x, y) = 35x + 55y$.

Las restricciones son:

- Un taller de joyería dispone de 150 gramos de plata y de 180 horas de trabajo para producir dos modelos de anillos $\rightarrow 6x + 2y \leq 150; 3x + 6y \leq 180$.
- Las cantidades deben ser positivas $\rightarrow x \geq 0; y \geq 0$.

Reunimos las restricciones en un sistema de inecuaciones.

$$\left. \begin{array}{l} 6x + 2y \leq 150 \\ 3x + 6y \leq 180 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 2y \leq 60 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y \leq 75 - 3x \\ 2y \leq 60 - x \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

$$y = 75 - 3x$$

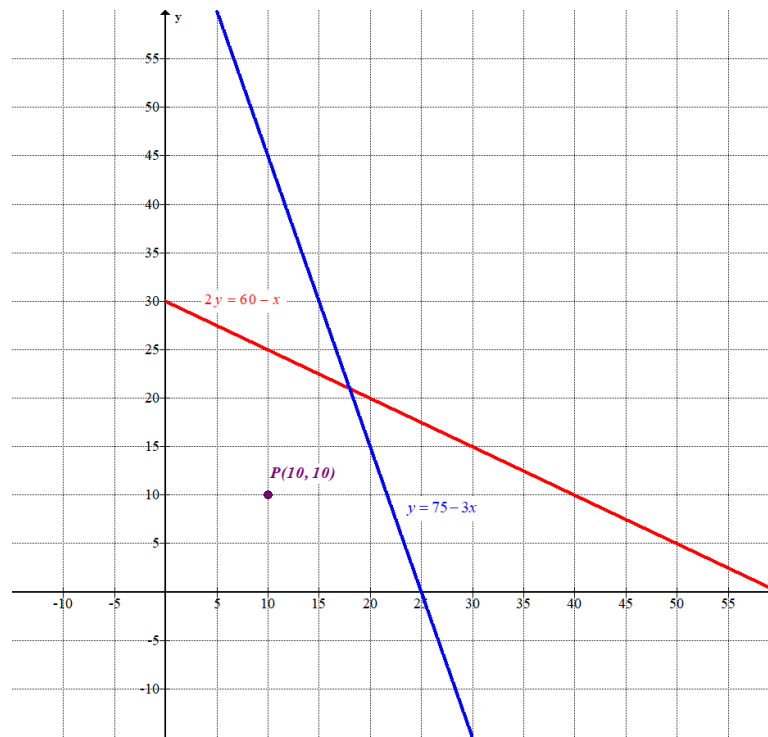
x	y = 75 - 3x
0	75
18	21
25	0

$$2y = 60 - x$$

x	y = $\frac{60 - x}{2}$
0	30
18	21
60	0

$$x \geq 0; y \geq 0$$

Primer
cuadrante

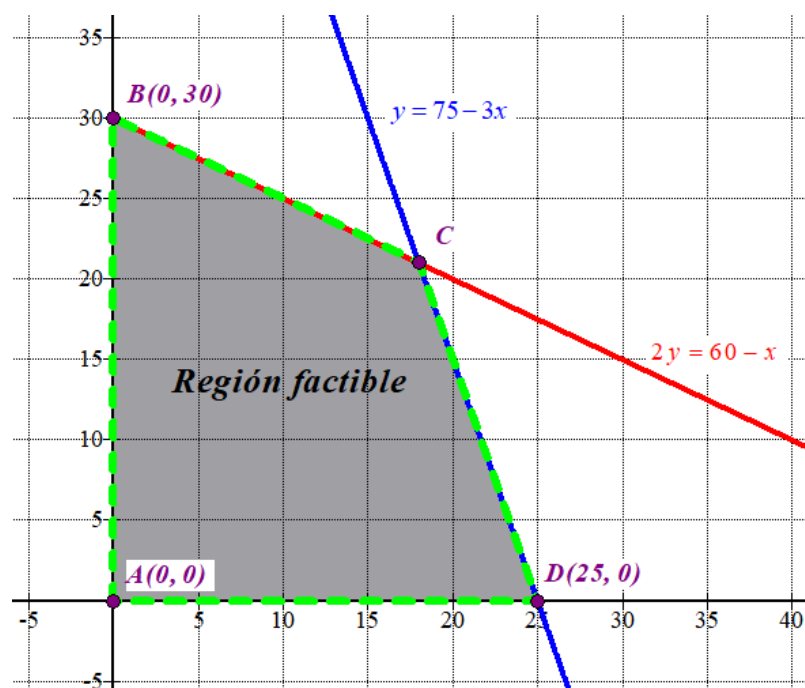


Como las restricciones son $\left. \begin{array}{l} y \leq 75 - 3x \\ 2y \leq 60 - x \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$ la región factible es la región del primer cuadrante

situada por debajo de las rectas azul y roja. Lo comprobamos viendo si el punto $P(10, 10)$ perteneciente a esta región cumple las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 10 \leq 75 - 30 \\ 20 \leq 60 - 10 \\ 10 \geq 0; 10 \geq 0 \end{array} \right\}$$

Se cumplen todas las desigualdades. Coloreamos de gris la región factible en el siguiente dibujo e indicamos las coordenadas de sus vértices.



Hallamos las coordenadas del vértice C.

$$C \rightarrow \begin{cases} y = 75 - 3x \\ 2y = 60 - x \end{cases} \Rightarrow 2(75 - 3x) = 60 - x \Rightarrow 150 - 6x = 60 - x \Rightarrow 90 = 5x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{90}{5} = 18 \Rightarrow y = 75 - 3 \cdot 18 = 21 \Rightarrow C(18, 21)$$

Valoramos la función beneficio en cada uno de los vértices en busca del valor máximo.

- $A(0, 0) \rightarrow B(0, 0) = 0$
- $B(0, 30) \rightarrow B(0, 30) = 35 \cdot 0 + 55 \cdot 30 = 1650$
- $C(18, 21) \rightarrow B(18, 21) = 35 \cdot 18 + 55 \cdot 21 = 1785$ ¡Máximo!
- $D(25, 0) \rightarrow B(25, 0) = 35 \cdot 25 + 55 \cdot 0 = 875$

El máximo beneficio se consigue fabricando y vendiendo 18 anillos del modelo A y 21 del modelo B. Este beneficio máximo es de 1785 euros.

2. Una empresa ofrece 225 euros por repartir todo un paquete de hojas de propaganda. Roc, Martí y Guiu deciden hacer el trabajo entre los tres: Martí reparte un 20% del total; Guiu reparte 100 hojas más que Roc, y entre Roc y Martí reparten 850.

- a) Calcule el número de hojas que ha repartido cada uno de ellos. [1 punto]
 b) Una vez terminado el trabajo, deciden dividir las ganancias entre los tres, proporcionalmente a las hojas repartidas. Según este criterio, ¿cuánto dinero cobrará Guiu, cuánto cobrará Roc y cuánto Martí? [1 punto]

a) Llamamos x , y , z al número de hojas que reparte Roc, Martí y Guiu, respectivamente.

- Martí reparte un 20% del total $\rightarrow y = 0.20(x + y + z)$.
- Guiu reparte 100 hojas más que Roc $\rightarrow z = x + 100$.
- Entre Roc y Martí reparten 850 $\rightarrow x + y = 850$.

Reunimos las ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} y = 0.20(x + y + z) \\ z = x + 100 \\ x + y = 850 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 10y = 2(x + y + z) \\ z = x + 100 \\ y = 850 - x \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 5y = x + y + z \\ z = x + 100 \\ y = 850 - x \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 4y - x - z = 0 \\ z = x + 100 \\ y = 850 - x \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4(850 - x) - x - x - 100 = 0 \Rightarrow 3400 - 4x - 2x - 100 = 0 \Rightarrow 3300 = 6x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x = \frac{3300}{6} = 550} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \boxed{z = 550 + 100 = 650} \\ \boxed{y = 850 - 550 = 300} \end{array} \right.$$

Roc reparte 550 hojas, Martí reparte 300 y Guiu 650 hojas. En total reparten $550 + 300 + 650 = 1500$ hojas.

b) Por repartir 1500 hojas se obtiene 225 euros. Se cobra por cada hoja $\frac{225}{1500} = 0.15$ euros.

Roc recibe $0.15 \cdot 550 = 82.5$ euros, Martí recibe $0.15 \cdot 300 = 45$ euros y Guiu recibe $0.15 \cdot 650 = 97.5$.

3. En 2008 la nómina de un trabajador era de 1.000 euros. En 2009 la empresa donde trabajaba decidió rebajarle la nómina un 10%. El año 2010 con la intención de recuperar la situación económica del trabajador, la empresa decidió incrementar la nómina un 10%.

a) Calcule la nómina del trabajador una vez aplicada la rebaja del 10 % del año 2009. [0,5 puntos]

b) Calcule la nómina del trabajador después de aplicar el incremento del 10 % del año 2010. [0,5 puntos]

c) Si una nómina de 1.000 euros ha sufrido una rebaja de un 10 %, ¿qué incremento porcentual se debe aplicar a la nueva nómina para recuperar el sueldo de 1.000 euros? [1 punto]

a) Le rebajan el sueldo $0.10 \cdot 1000 = 100$ euros y pasa a cobrar $1000 - 100 = 900$ euros.

b) En el año 2009 cobraba 900 euros y en el año 2010 le suben un 10% lo que significa un aumento de $0.10 \cdot 900 = 90$ euros, por lo que pasa a cobrar $900 + 90 = 990$ euros.

c) Como de 1000 € pasa a cobrar 900 € debemos de buscar un incremento de 100 €. Con una subida porcentual de un x % le deben subir 100 €. Resolvemos una regla de tres.

$$\left. \begin{array}{l} 900 \longrightarrow 100 \\ 100 \longrightarrow x \end{array} \right\} \Rightarrow 900x = 100 \cdot 100 \Rightarrow x = \frac{10000}{900} = \frac{100}{9} \approx 11.11$$

No se consigue recuperar exactamente el sueldo inicial, pero se aproxima bastante con una subida del 11.11 %.

Lo comprobamos. Una subida del 11.11% le supone un incremento en su sueldo de $900 \cdot 0.1111 = 99.99$ euros.

4. Las pérdidas o beneficios de una empresa vienen dados por la función $f(t) = \frac{3t-6}{t+2}$, donde $f(t)$ se expresa en cientos de miles de euros, una vez transcurridos t años desde inicio de 2010.
- a) Haga un esbozo de la gráfica de la función $f(t)$ para $t > 0$, calculando los intervalos de crecimiento, los cortes con los ejes y asíntotas. [1 punto]
- b) Al inicio del año 2010, ¿cuántos euros perdía o ganaba la empresa? ¿Qué años tuvo pérdidas la empresa y a partir de qué año dejó de tener? [0,5 puntos]
- c) ¿A partir de qué año las ganancias de la empresa fueron mayores o iguales a un centenar de miles de euros? ¿Se pueden superar los tres cientos de miles de euros de beneficios? Razone las respuestas. [0,5 puntos]

a) El dominio de la función es $(0, +\infty)$. La función es continua, pues el denominador se anula en $t = -2$ que no pertenece al dominio de definición de la función.

Hallamos los puntos de corte con los ejes.

$$\left. \begin{array}{l} f(t) = \frac{3t-6}{t+2} \\ \text{Eje OX} \rightarrow y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{3t-6}{t+2} = 0 \Rightarrow 3t-6 = 0 \Rightarrow t = 2 \Rightarrow A(2, 0)$$

La gráfica corta el eje de abscisas en $A(2, 0)$. No corta el eje de ordenadas pues $t = 0$ no pertenece al dominio de la función.

Hallamos las asíntotas.

No tiene asíntotas verticales pues la función no presenta discontinuidades en $(0, +\infty)$.

Calculamos el límite de la función cuando t tiende a $+\infty$.

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{3t-6}{t+2} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\frac{3t}{t} - \frac{6}{t}}{1 + \frac{2}{t}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{3 - \frac{6}{t}}{1 + \frac{2}{t}} = \frac{3 - \frac{6}{\infty}}{1 + \frac{2}{\infty}} = \frac{3 - 0}{1 + 0} = \boxed{3}$$

La función tiene una asíntota horizontal: $y = 3$ cuando t tiende a $+\infty$.

No tiene asíntota oblicua, pues tiene una asíntota horizontal.

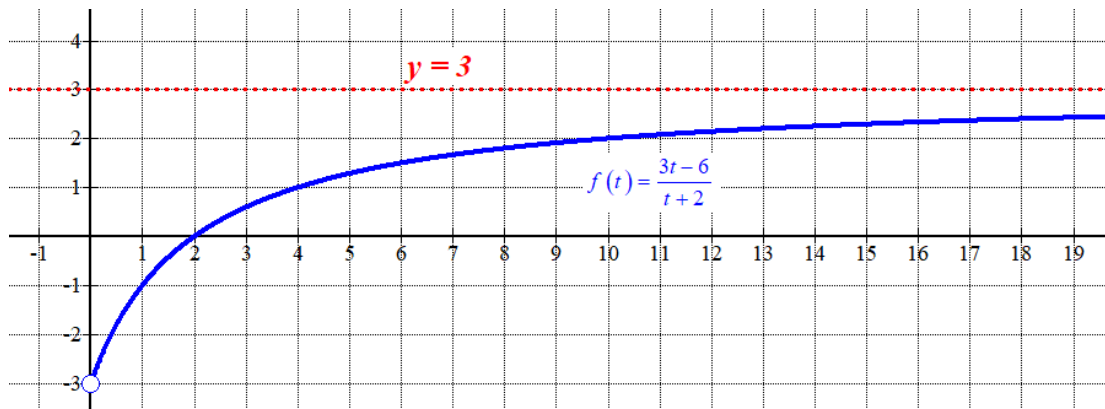
Hallamos los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función.

$$f(t) = \frac{3t-6}{t+2} \Rightarrow f'(t) = \frac{3(t+2) - (3t-6) \cdot 1}{(t+2)^2} = \frac{3t+6-3t+6}{(t+2)^2} = \frac{12}{(t+2)^2}$$

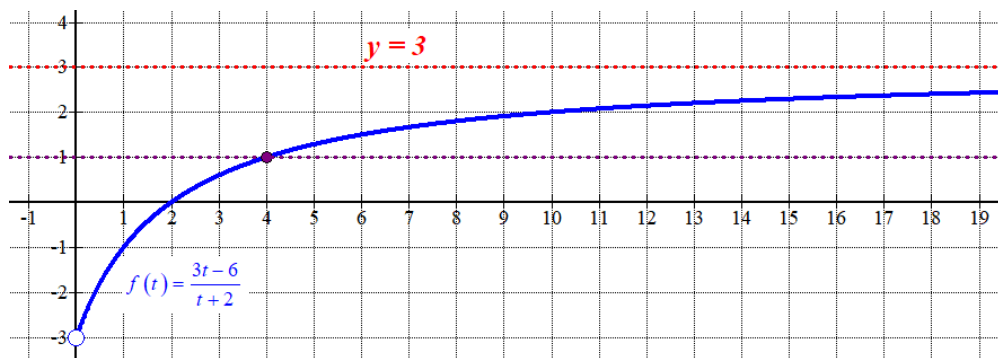
Con esta expresión de la derivada sabemos que el signo de la derivada va a ser siempre positivo, por lo que la función siempre crece.

Hacemos una tabla de valores y representamos su gráfica.

t	$f(t) = \frac{3t-6}{t+2}$
0	-3 No incluido
1	-1
2	0
4	1



- b) Al inicio del año 2010 la empresa perdía 3 cientos de miles de euros. La empresa dejó de tener pérdidas el segundo año (2012). A partir de ahí tuvo ganancias.
- c) Nos preguntan a partir de qué año las ganancias de la empresa fueron mayores o iguales a 1 centenar de miles de euros, es decir, a partir de que momento la función toma valores mayores o iguales que 1. Mirando en la gráfica vemos que eso ocurre a partir del cuarto año (2014).



También nos preguntan si se pueden superar los tres cientos de miles de euros de beneficios. Es lo mismo que preguntar si la función supera el valor de 3. Esto no ocurre pues en la gráfica se observa que hay una asíntota que indica que la función siempre toma valores inferiores a 3.

5. El precio en euros de una piedra preciosa es cinco veces el cuadrado de su peso en gramos. Si tenemos una piedra preciosa de 8 gramos y nos planteamos partirla en dos trozos:

a) ¿Qué peso debe tener cada uno de los trozos para que el conjunto valga lo menos posible?
[1 punto]

b) ¿Cuál es el precio mínimo y el precio máximo que puede valer este conjunto?
[1 punto]

a) Llamamos $P(x)$ al precio de una piedra preciosa en función de su peso " x ".

La piedra pesa 8 gramos y la partimos en dos trozos, uno de ellos pesa x y el otro $8 - x$.

El precio $P(x)$ de los dos trozos es $P(x) = 5x^2 + 5(8 - x)^2$, siendo x un valor comprendido entre 0 y 8 gramos.

Averiguamos cuando se anula la derivada de la función.

$$P(x) = 5x^2 + 5(8 - x)^2 \Rightarrow P'(x) = 10x + 10(8 - x)(-1) = 10x - 80 + 10x = 20x - 80$$

$$P'(x) = 0 \Rightarrow 20x - 80 = 0 \Rightarrow 20x = 80 \Rightarrow \boxed{x = 4}$$

La función tiene un punto crítico en $x = 4$. Estudiamos el signo de la derivada segunda para este valor.

$$P'(x) = 20x - 80 \Rightarrow P''(x) = 20 \Rightarrow P''(4) = 20 > 0$$

Como la segunda derivada es positiva la función tiene un mínimo relativo en $x = 4$.

Partiendo la piedra preciosa de 8 gramos en dos trozos de 4 gramos obtenemos un precio mínimo.

b) Valoramos la función en el mínimo relativo y en los extremos del intervalo $[0, 8]$.

$$P(0) = 5 \cdot 0^2 + 5(8 - 0)^2 = 320$$

$$P(4) = 5 \cdot 4^2 + 5(8 - 4)^2 = 160$$

$$P(8) = 5 \cdot 8^2 + 5(8 - 8)^2 = 320$$

El precio mínimo es de 160 euros partiendo la piedra en dos trozos iguales y el máximo es 320 € dejando la piedra sin romper.

6. Considere las matrices $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Calcule el valor del parámetro a para el cual se cumple que $A \cdot B = B \cdot A$. [1 punto]

b) Para el valor $a = 2$, encuentre una matriz X tal que $A \cdot X \cdot A = B$. [1 punto]

a) Resolvemos la ecuación matricial planteada.

$$\begin{aligned} A \cdot B = B \cdot A &\Rightarrow \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{pmatrix} 2a & -a+1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & 2-2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2a & -a+1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow -a+1=0 \Rightarrow \boxed{a=1} \end{aligned}$$

Para $a=1$ se cumple lo pedido.

b) Para el valor $a = 2$ la matriz A queda $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Despejamos X en la ecuación matricial.

$$A \cdot X \cdot A = B \Rightarrow X = A^{-1} B A^{-1}$$

Hallamos la inversa de A .

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^T)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Obtenemos la expresión de la matriz X .

$$\begin{aligned} X = A^{-1} B A^{-1} &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 4 & -2-1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 8 & -4-6 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -5/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$