

SÈRIE 1

RECORDEU:

- Podeu valorar amb tants decimals com considereu convenient, tanmateix aconsellem no fer-ho en més de dos decimals.
- Cal arrodonir a un decimal la nota final de l'examen, no les notes parcials.
- Cal traslladar la puntuació de cada pregunta a la casella **amb el número corresponent** de la primera pàgina de l'examen.

1. D'una funció $y = f(x)$ sabem que la seva derivada és $f'(x) = x^3 - 4x$.
- Determineu els intervals de creixement i de decreixement de la funció $y = f(x)$. [1 punt]
 - Determineu les abscisses dels seus extrems relatius i classifiqueu-los. [1 punt]

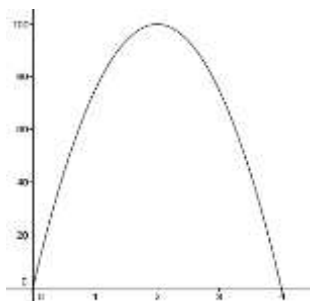
Observem que $f'(x) = x^3 - 4x = x \cdot (x-2) \cdot (x+2)$. Per tant, si igualem la derivada a zero, obtenim tres solucions $x = 0$, $x = -2$ i $x = 2$.

- Resolem: $f'(x) > 0$, d'on s'obté que la funció creix si x pertany als intervals $(-2, 0)$ i $(2, +\infty)$ i $f'(x) < 0$, d'on obtenim que la funció decreix en els intervals $(-\infty, -2)$ i $(0, 2)$.
- La funció té un màxim relatiu en el punt d'abscissa $x = 0$ i dos mínims relatius en els punts d'abscissa $x = 2$ i $x = -2$. Sabem de quin tipus d'extrems relatius es tracta pels intervals de creixement i de decreixement de l'apartat anterior.

Criteris de correcció: a) Determinació dels punts que anul·len la derivada: 0,5 p. Determinació dels intervals de creixement i decreixement: 0,5 p. b) Determinació dels extrems relatius: 0,5 p. Classificació i justificació de si són màxims o mínims: 0,5 p.

2. Des d'una barca es dispara una bengala de salvament marítim que s'apaga al cap de 4 minuts. En aquest interval de temps, es comprova que la intensitat lumínica de la bengala en funció del temps, mesurada en percentatges del 0% al 100%, queda perfectament descrita per l'expressió $L(t) = 25t \cdot (4 - t)$, on el temps t varia entre 0 i 4 minuts.
- Calculeu per a quin valor de t el percentatge d'intensitat lumínica serà màxim. [1 punt]
 - Si des de la costa la bengala només és visible quan la intensitat lumínica és superior al 75%, quin és l'interval de temps en què serà visible des de la costa i, per tant, serà més factible el salvament? [1 punt]

- a) El percentatge d'intensitat lumínica ve donat per la funció $L(t) = 25t(4-t)$, amb $0 \leq t \leq 4$, que és una funció quadràtica que té per gràfica una paràbola:

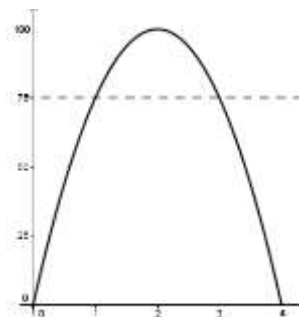


Cal, doncs, calcular el màxim d'aquesta funció; ho podem fer calculant el vèrtex de la paràbola, o bé per derivació:

$$L'(t) = 100 - 50t = 0 \Rightarrow t = 2 \text{ minuts.}$$

Com que $L'(1) > 0$ i $L'(3) < 0$ es tracta efectivament d'un màxim. Per tant, després de 2 minuts del llançament, la intensitat serà màxima.

- b) Hem de resoldre la inequació $100t - 25t^2 > 75$.



Resolem l'equació de segon grau associada:

$$-25t^2 + 100t - 75 = 0 \rightarrow t^2 - 4t + 3 = 0$$

$$t = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 3}}{2} = \frac{-4 \pm 2}{2} = \begin{cases} 3 \\ 1 \end{cases}, \text{ que són els}$$

punts de tall de la paràbola amb la recta $y = 75$.

Per tant, per a t tal que $1 < t < 3$ la intensitat lumínica de la bengala superarà el 75% i aquest serà l'interval de temps en què el salvament serà més factible.

Criteris de correcció: a) Plantejament del problema: 0,25 p. Càlcul de la derivada: 0,25 p. Obtenció del màxim: 0,25 p. Justificació que es tracta d'un màxim: 0,25 p. b) Plantejament de la inequació: 0,25 p. Determinació de l'interval: 0,75 p.

3. Considereu les matrius $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ i $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ m & n \end{pmatrix}$, on m i n són dos nombres reals.

- a) Comproveu que es compleix la igualtat $(A - B) \cdot (A + B) = A^2 - B^2$. [1 punt]
- b) Determineu m i n per tal que les matrius B i C commutïn, és a dir, $B \cdot C = C \cdot B$. [1 punt]

a) Tenim $A - B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ i $A + B = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$, per tant

$$(A - B) \cdot (A + B) = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 & 10 \\ 10 & 25 \end{pmatrix}$$

D'altra banda $A^2 = \begin{pmatrix} 26 & 10 \\ 10 & 26 \end{pmatrix}$ i $B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, d'on es dedueix que es verifica la igualtat demanada.

Alternativament, podem desenvolupar $(A - B) \cdot (A + B)$ i argumentar que per comprovar que es compleix la igualtat n'hi ha prou de veure que A i B commuten:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix},$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

b) Calculem els dos productes:

$$B \cdot C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ m & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m & n \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$C \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ m & n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ n & m \end{pmatrix}$$

Per tant commuten si i només si $m = -1$ i $n = 1$.

Criteris de correcció: a) Càlcul de $A - B$: 0,25 p. Càlcul de $A + B$: 0,25 p. Càlcul de A^2 : 0,25 p. Càlcul de B^2 : 0,25 p. b) Càlcul de $B \cdot C$: 0,25 p. Càlcul de $C \cdot B$: 0,25 p. Determinació dels valors m i n : 0,5 p. (Si s'ha resolt a) utilitzant que A i B commuten: 0.5 p. per justificar-ho i 0.5 p. per comprovar-ho).

4. Tenim unes quantes monedes d'un euro distribuïdes en tres piles. Passem dotze monedes de la tercera pila a la segona i, a continuació, en passem deu de la segona a la primera. Un cop fet això, les tres piles tenen la mateixa quantitat de monedes.
- a) Amb aquestes dades, podem determinar la quantitat de monedes que hi havia inicialment en cada pila? Raoneu la resposta. [1 punt]
- b) Esbrineu la quantitat de monedes que hi havia inicialment a cada pila si sabem que en total hi ha 51 monedes. [1 punt]

Anomenem x la quantitat de monedes que hi havia inicialment en la primera pila, y la quantitat de monedes que hi havia inicialment en la segona pila i, finalment, z la quantitat de monedes que hi havia inicialment en la tercera pila.

Un cop fet el traspàs de monedes descrit en l'enunciat, el contingut de cada pila és:

Primera pila: $x + 10$ monedes.

Segona pila: $y + 2$ monedes.

Tercera pila: $z - 12$ monedes.

a) Sabem que la quantitat de monedes de cada pila és la mateixa, per tant:

$$\begin{cases} x + 10 = y + 2 \\ x + 10 = z - 12 \end{cases}$$

Ordenant el sistema tenim:

$$\begin{cases} x - y = -8 \\ x - z = -22 \end{cases}$$

I resolent-lo pel mètode de Gauss tenim:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -8 \\ 1 & 0 & -1 & -22 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & -1 & -14 \end{array}\right)$$

Es tracta, per tant, d'un sistema compatible indeterminat. La solució ve expressada en funció d'un paràmetre. Prenent z com a paràmetre i aïllant adequadament, la solució és:

$$\begin{cases} x = z - 22 \\ y = z - 14 \\ z \end{cases}$$

Per tant, no podem determinar la quantitat de monedes que hi havia inicialment.

b) Si a més sabem que en total hi ha 51 monedes, aleshores tenim una equació més:

$$\begin{cases} x - y = -8 \\ x - z = -22 \\ x + y + z = 51 \end{cases}$$

Resolent per Gauss tenim:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -8 \\ 1 & 0 & -1 & -22 \\ 1 & 1 & 1 & 51 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & -1 & -14 \\ 0 & 2 & 1 & 59 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & -1 & -14 \\ 0 & 0 & 3 & 87 \end{array}\right)$$

De la tercera equació, $3z = 87$, és a dir, $z = 29$.

De la segona equació, $y - z = -14$, és a dir, $y = 15$.

De la primera equació, $x - y = -8$, és a dir, $x = 7$.

Per tant, inicialment en la primera pila hi havia 7 monedes, en la segona pila hi havia 15 monedes i en la tercera pila hi havia 29 monedes.

Alternativament, com que les tres piles tenen la mateixa quantitat de monedes, a cada una n'hi haurà 17 i poden obtenir la solució resolent

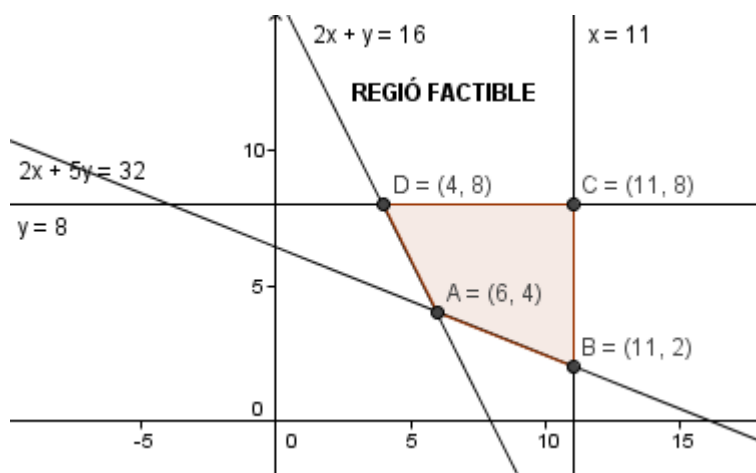
$$\begin{cases} x + 10 = 17 \\ y + 2 = 17 \\ z - 12 = 17 \end{cases}$$

Criteris de correcció: a) Plantejament del sistema: 0,5 p. Justificació que es tracta d'un sistema compatible indeterminat: 0,5 p. b) Plantejament del sistema: 0,25 p. Resolució del sistema: 0,75 p. (En cas que hagin resolt l'apartat b) utilitzant el plantejament alternatiu 0.5 p. pel plantejament i 0.5 p. per la resolució.)

5. Una companyia aèria vol organitzar per aquest estiu un pont aeri entre l'aeroport de Barcelona - el Prat i el de Palma de Mallorca, amb places suficients de passatge i càrrega, per a transportar com a mínim 1.600 persones i 96 tones d'equipatge i mercaderies. Per a fer-ho, té a la seva disposició 11 avions del tipus A, que poden transportar 200 persones i 6 tones d'equipatge i mercaderies cadascun, i 8 avions del tipus B que poden transportar 100 persones i 15 tones cadascun. Si la contractació d'un avió del tipus A costa 4.000 euros i la d'un avió del tipus B en costa 1.000,
- Determineu la funció objectiu, les restriccions i dibuixeu la regió de les possibles opcions que té la companyia. [1 punt]
 - Calculeu el nombre d'avions de cada tipus que cal contractar perquè el cost sigui el mínim i determineu quin és aquest cost mínim. [1 punt]

a) Taula de dades:

Avions	x= tipus A	y= tipus B	Mínims
Persones	200	100	1600
Tones d'equipatge i mercaderies	6	15	96
Disponibles	11	8	
Preu (euros)	4000	1000	



La funció objectiu ve donada per $\text{Cost}(x, y) = 4000x + 1000y$ i les restriccions venen donades per les inequacions:

$$\begin{aligned} 2x + y &\geq 16 \\ 2x + 5y &\geq 32 \\ x &\leq 11 \\ y &\leq 8 \end{aligned}$$

b) Veiem on s'assoleix el cost mínim:

$$\text{Cost}(A) = 4000 \cdot 6 + 1000 \cdot 4 = 28000 \text{ €}$$

$$\text{Cost}(B) = 4000 \cdot 11 + 1000 \cdot 2 = 46000 \text{ €}$$

$$\text{Cost}(C) = 4000 \cdot 11 + 1000 \cdot 8 = 52000 \text{ €}$$

$$\text{Cost}(D) = 4000 \cdot 4 + 1000 \cdot 8 = 24000 \text{ €}$$

Així doncs, cal contractar 4 avions del tipus A i 8 del tipus B per obtenir un cost mínim de 24.000 euros.

Criteris de correcció: a) Determinació de les restriccions: 0,5 p. Dibuix de les restriccions: 0,25 p. Determinació de la funció objectiu: 0,25 p. b) Determinació dels vèrtexs: 0,5 p. Determinació del mínim: 0,5 p.

6. Considereu la funció $f(x) = -x^2 + bx + c$ amb b i c nombres reals.
- Trobeu b i c de manera que la gràfica de la funció passi pel punt $(-1,0)$ i tingui un extrem local en el punt d'abscissa $x=3$. Raoneu de quin tipus d'extrem relatiu es tracta. [1 punt]
 - Per al cas $b=3$ i $c=2$, trobeu l'equació de la recta tangent a la gràfica que és paral·lela a la recta $y=5x-2$. [1 punt]

- a) Calculem la primera derivada $f'(x) = -2x + b$ i plantegem el sistema d'equacions que permet calcular a i b , imposant que passi pel punt $(-1,0)$ i que la derivada en $x=3$ s'anul·li.

$$\left. \begin{array}{l} -1 - b + c = 0 \\ -2 \cdot 3 + b = 0 \end{array} \right\} \text{ i per tant, } b = 6 \text{ i } c = 7.$$

Si estudiem on és positiva i on és negativa la funció $f'(x)$, observem que $f'(x) > 0$ per a $x < 3$ i que $f'(x) < 0$ per a $x > 3$. Per tant es tracta d'un màxim. Alternativament poden argumentar que es tracta d'un màxim geomètricament, tenint en compte que es tracta d'una paràbola amb el coeficient del terme quadràtic negatiu.

- b) En aquest cas la derivada és $f'(x) = -2x + b = -2x + 3$. Cal trobar el valor de x tal que $f'(x) = 5$, per tant $-2x + 3 = 5$, i obtenim $x = -1$. Per al punt d'abscissa $x = -1$ tenim que l'ordenada és $y = -1 - 3 + 2 = -2$. Per tant, l'equació de la recta tangent és $y + 2 = 5(x + 1)$, és a dir, $y = 5x + 3$.

Criteris de correcció: a) Plantejament del sistema: 0,5 p. Resolució: 0,25 p. Justificació que es tracta d'un màxim: 0,25 p. b) Determinació del pendent de la recta: 0,25 p. Obtenció del punt de tangència: 0,25 p. Obtenció de la recta tangent: 0,5 p.