

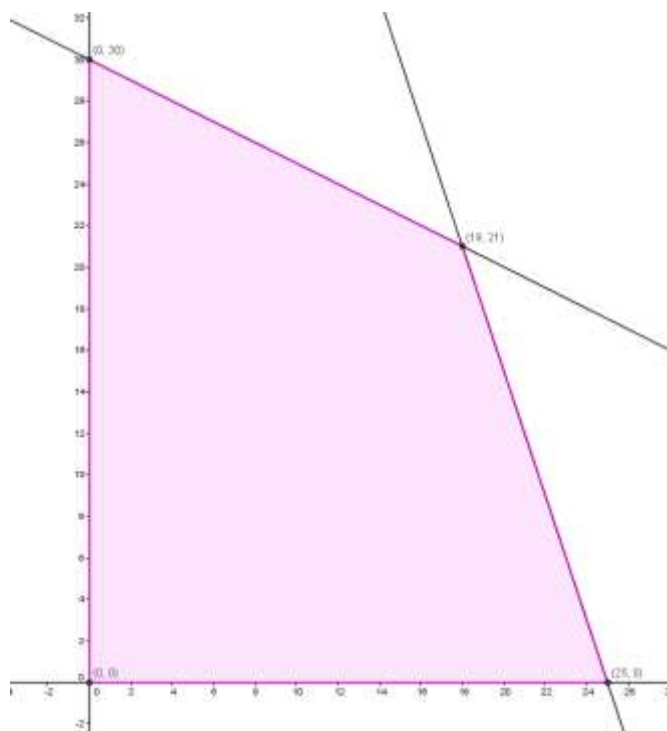
SÈRIE 5

RECORDEU:

- Podeu valorar amb tants decimals com considereu convenient, però aconsellem no fer-ho amb més de dos decimals.
- Cal arrodonir a un decimal la nota final de l'examen, no les notes parcials.
- Cal traslladar la puntuació de cada pregunta a la casella **amb el número corresponent** de la primera pàgina de l'examen.

2. [2 punts]

Denotem per a x i y el nombre d'anells produïts dels models A i B, respectivament. La restricció dels grams de plata disponibles s'expressa com $6x + 2y \leq 150$ i la del nombre d'hores com $3x + 6y \leq 180$. A més cal que $x \geq 0$, $y \geq 0$. La regió factible és per tant:



i té vèrtexs: $A=(0,0)$, $B=(25,0)$, $C=(18,21)$ i $D=(0,30)$. La funció objectiu és d'altra banda $F(x,y) = 35x + 55y$. Avaluant-la als quatre vèrtexs s'obté $F(A) = 0$, $F(B) = 875$, $F(C) = 1785$ i $F(D) = 1650$. Deduïm, per tant, que el benefici màxim s'obté produint 18 anells del model A i 21 anells del model B i que és de 1.785 euros.

Criteris de correcció. Determinació de les restriccions: 0,5 p. Determinació de la funció objectiu: 0,5 p. Determinació dels vèrtexs: 0,5 p. Determinació del màxim: 0,5 p.

Roc, en Martí i en Guiu decideixen fer la feina entre tots tres: en Martí reparteix un

20 % del total; en Guiu reparteix 100 fulls més que en Roc, i entre en Roc i en Martí en reparteixen 850.

- Calculeu el nombre de fulls que ha repartit cadascun d'ells. [1 punt]
- Un cop acabada la feina, decideixen dividir els guanys entre tots tres, proporcionalment als fulls repartits. Segons aquest criteri, quants diners cobrarà en Guiu, quants en cobrarà en Roc i quants en Martí? [1 punt]

a) Suposem que x , y i z són respectivament el nombre de fulls repartits per en Roc, en Martí i en Guiu.

Les dades del problema es tradueixen algebraicament en el sistema d'equacions:

$$\left. \begin{array}{l} y = 0,2 \cdot (x + y + z) \\ z = x + 100 \\ x + y = 850 \end{array} \right\}$$

Ara resollem per Gauss, arreglant i simplificant les equacions:

$$\left. \begin{array}{rcl} 0,2x - 0,8y + 0,2z = 0 \\ x \quad \quad \quad - z = -100 \\ x \quad + y \quad \quad = 850 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{rcl} x - 4y + z = 0 \\ x \quad \quad - z = -100 \\ x + y \quad \quad = 850 \end{array} \right\}$$

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -100 \\ 1 & 1 & 0 & 850 \end{array} \right) &\rightarrow f_2 - f_1 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & -100 \\ 0 & 5 & -1 & 850 \end{array} \right) \\ &\rightarrow f_3 - f_1 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & -100 \\ 0 & 5 & -1 & 850 \end{array} \right) \\ &\rightarrow 4f_3 - 5f_2 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & -100 \\ 0 & 0 & 6 & 3900 \end{array} \right) \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x - 4y + z = 0 \\ 4y - 2z = -100 \\ 6z = 3900 \end{array} \right\} \end{aligned}$$

I obtenim $z = 650$ $y = 300$ $x = 550$

Per tant, en Roc va repartir 550 fulls, en Martí en va repartir 300 i en Guiu, 650.

b) En total han repartit $x + y + z = 550 + 300 + 650 = 1500$ fulls. L'empresa ha pagat per la feina 225 euros.

Calculem a quant es paga el full repartit: $225\text{€} : 1500 \text{ fulls} = 0,15 \text{ €/full}$

Per tant, en Roc cobrarà $550 \cdot 0,15 = 82,5$ euros, en Martí cobrarà $300 \cdot 0,15 = 45$ euros i, finalment, en Guiu $650 \cdot 0,15 = 97,5$ euros.

Criteris de correcció: a) Plantejament del sistema: 0,5 p. Resolució: 0,5 p. b) Càlcul del preu obtingut per full repartit: 0,5 p. Solució final: 0,5 p.

4. L'any 2008 la nòmina d'un treballador era de 1000 euros. L'any 2009, l'empresa on treballava va decidir rebaixar-li la nòmina en un 10%. L'any 2010, amb la intenció de recuperar la situació econòmica del treballador, l'empresa va decidir incrementar-li la nòmina en un 10%.
- Calculeu la nòmina del treballador que va resultar de la baixada del 10% de l'any 2009. [0,5 punts]
 - Calculeu la nòmina del treballador que va resultar de la pujada del 10% de l'any 2010. [0,5 punts]
 - Si una nòmina de 1.000 euros ha patit una rebaixa d'un 10%, quin increment s'ha d'aplicar a la nova nòmina per recuperar el sou de 1000 euros? [1 punt]
- a) Calculem la nòmina del treballador que va resultar de la baixada del 10% de l'any 2009.

$$1000 - \frac{10}{100} \cdot 1000 = 900 \text{ euros}$$

- b) Calculem la nòmina del treballador que va resultar de la pujada del 10% de l'any 2010.

$$900 + \frac{10}{100} \cdot 900 = 990 \text{ euros}$$

- c) Si una nòmina de 1000 euros pateix una rebaixa d'un 10%, tindrem una nova nòmina de 900 euros. Si ara l'incrementem en un y % tindrem

$$900 + \frac{y}{100} \cdot 900$$

Imposem ara que aquest valor sigui 1000 i aïllem y

$$900 + \frac{y}{100} \cdot 900 = 1000$$

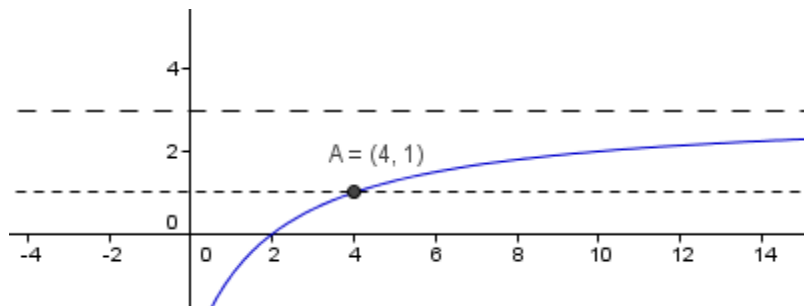
$$9y = 100$$

$$y = \frac{100}{9}$$

Per tant, si una nòmina de 1000 euros pateix una rebaixa d'un 10% cal un increment del $\frac{100}{9}$ %, és a dir d'un 11,11%, per recuperar la nòmina de 1000 euros.

Criteris de correcció: a) Càlcul del nou valor de la nòmina: 0,5 p. b) Càlcul del nou valor de la nòmina: 0,5 p. c) Plantejament del problema: 0,5 p. Resolució: 0,5 p.

5. Les pèrdues o els beneficis d'una empresa venen donats per la funció $f(t) = \frac{3t-6}{t+2}$, en què $f(t)$ s'expressa en centenars de milers d'euros, un cop transcorreguts t anys des de l'inici del 2010.
- Feu un esbós de la gràfica de la funció $f(t)$ per a $t > 0$, calculant els intervals de creixement, els talls amb els eixos i les asymptotes. [1 punt]
 - A l'inici de l'any 2010 quants euros perdia o guanyava l'empresa? Quins anys va tenir pèrdues l'empresa i a partir de quin any en va deixar de tenir? [0,5 punts]
 - A partir de quin any els guanys de l'empresa van ser més grans o iguals a un centenar de milers d'euros? Es poden superar els 3 centenars de milers d'euros de beneficis? Raoneu les respostes. [0,5 punts]
- a) Calculem la derivada de la funció $f'(t) = \frac{12}{(t+2)^2}$. Com que és positiva per a tot t la funció sempre és creixent. Trobem els talls amb els eixos (0,-3) i (2,0). Finalment tenim una asymptota horitzontal en $y = 3$.



- b) $f(0) = \frac{-6}{2} = -3$. A l'inici de l'any 2010 l'empresa perdia 300.000 euros. Per estudiar quins anys va tenir pèrdues i quan va deixar de tenir-les, resollem la inequació: $f(t) \geq 0 \rightarrow 3t - 6 \geq 0 \rightarrow t \geq 2$. A partir del 2012 l'empresa va començar a no tenir pèrdues, fins aleshores va tenir pèrdues.
- c) Caldrà resoldre $f(t) \geq 1 \rightarrow 3t - 6 \geq t + 2 \rightarrow t \geq 4$. A partir del 2014 els guanys van superar o igualar els 100.000 euros i $f(t) \geq 3 \rightarrow 3t - 6 \geq 3t + 6 \rightarrow -6 \geq 6$ No pot ser! Els guanys de l'empresa mai superaran els 300.000 euros.

Criteris de correcció: a) Justificació que la funció és sempre creixent: 0,25 p. Determinació del punt de tall (2,0): 0,25 p. Determinació de l'asímtota: 0,25 p. Esbós de la gràfica: 0,25 p. b) Determinació de les pèrdues de l'any 2010: 0,25 p. Determinació de l'any en què l'empresa comença a obtenir beneficis: 0,25 p. c) Determinació de l'any en què els beneficis superen els 100.000 euros: 0,25 p. Justificació que mai s'assoliran els 300.000 euros: 0,25 p.

6. El preu en euros d'una pedra preciosa és cinc vegades el quadrat del seu pes en grams. Si tenim una pedra preciosa de 8 grams i ens plantegem partir-la en dos trossos:
- Quin pes ha de tenir cadascun dels trossos perquè el conjunt valgui el mínim possible? [1 punt]
 - Quin és el preu mínim i el preu màxim que pot valer aquest conjunt? [1 punt]
- a) Anomenem x i y el pes en grams de cadascun dels dos trossos. D'una banda tenim la condició $x + y = 8$, d'on $y = 8 - x$. D'altra banda, els possibles valors de x corresponen a l'interval $[0,8]$. El preu vindrà donat per la funció $P(x) = 5x^2 + 5y^2 = 5x^2 + 5(8 - x)^2 = 10x^2 - 80x + 320$. Per a trobar el mínim, fem la derivada i igulem a zero $P'(x) = 0$, és a dir, $20x - 80 = 0$, d'on obtenim $x = 4$. Com que la funció $P'(x)$ és negativa per als valors inferiors a $x = 4$ i positiva per als punts superiors, deduïm que es tracta d'un mínim. Per tant, el preu mínim s'obté quan els dos trossos pesen 4 grams cadascun.
- b) Els màxims i mínims absoluts de la funció els trobarem entre els relatius i els extrems de l'interval $[0,8]$. Observem que $P(0) = P(8) = 320$ i $P(4) = 160$. Per tant, el preu mínim que podem pagar és de 160 euros quan els dos trossos són de 4 grams i el preu màxim és de 320 euros quan tenim un únic tros, és a dir, un tros de 0 grams i l'altre de 8 grams.

Criteris de correcció: a) Determinació de la condició: 0,25 p. Determinació de la funció del preu: 0,25 p. Obtenció de la derivada: 0,25 p. Obtenció del mínim: 0,25 p. b) Obtenció de l'interval de valors de la variable: 0,5 p. Obtenció dels preus màxim i mínim: 0,5 p.

6. Considereu les matrius: $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- Calculeu el valor del paràmetre a per al qual es compleix que $A \cdot B = B \cdot A$. [1 punt]
 - Per al valor $a = 2$, trobeu una matriu X , tal que $A \cdot X \cdot A = B$. [1 punt]
- a) Calculem els productes $A \cdot B$ i $B \cdot A$:
- $$A \cdot B = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & -a+1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ i } B \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$
- per tal que es compleixi la igualtat cal que $a = 1$.
- b) Aïllant obtenim que $X = A^{-1} \cdot B \cdot A^{-1}$,
- $$A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ i fent els productes obtenim } X = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Criteris de correcció: a) Càlcul dels productes de matrius: 0,25 p. cadascun. Trobar el valor del paràmetre a : 0,5 p. b) Aïllar l'equació matricial: 0,25 p. Càlcul de la inversa: 0,5 p. Determinació de la matriu X : 0,25 p.