



Proves d'accés a la universitat

Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales

Serie 3

Responda a CINCO de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué.

Cada cuestión vale 2 puntos.

Puede utilizar calculadora, pero no se permite el uso de calculadoras u otros aparatos que pueden almacenar datos o que pueden transmitir o recibir información.

1. Considere la función

$$f(x) = \begin{cases} 2x+3 & \text{si } x \leq -1 \\ ax+b & \text{si } -1 < x < 2 \\ x^2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

Encuentre el valor de a y b para que la función sea continua para todos los números reales.
[2 puntos]

2. Al acabar un curso de pintura, los alumnos reciben como obsequio un estuche con rotuladores y colores. Se regalan dos tipos de estuches: los rojos, que contienen 1 rotulador y 2 colores y cuestan 9 €, y los verdes, que traen 3 rotuladores y 1 color y cuestan 15 €. La escuela dispone de 200 rotuladores y 100 colores para rellenar los estuches. Necesita preparar como mínimo 40 estuches y el número de estuches rojos no debe superar el número de estuches verdes. Con estos datos, la escuela quiere calcular el precio que tendrá que pagar por estos obsequios.

a) Determine la función objetivo y las restricciones, y dibuje la región de las posibles opciones de la escuela.

[1,25 puntos]

b) Calcule cuántos estuches de cada tipo hay que preparar para que el gasto sea mínimo y diga cuál es este gasto mínimo.

[0,75 puntos]

3. Un inversor ha obtenido un beneficio de 1.500 € después de invertir un total de 40.000 € en tres empresas diferentes. Estos beneficios se desglosan de la siguiente forma: la cantidad invertida en la empresa A le ha reportado un 2 % de beneficios, la cantidad invertida en la empresa B, un 5 %, y la cantidad invertida en la empresa C, un 7 %. El dinero invertido en la empresa B ha sido el mismo que en las otras dos empresas juntas. ¿Cuál fue la cantidad invertida en cada una de las tres empresas?

[2 puntos]

4. El gasto mensual en tabaco de un fumador viene determinado por su salario mediante la función $f(x) = \frac{400x}{x^2 + 4}$, donde x representa el salario en miles de euros y $f(x)$ el gasto mensual en tabaco en euros.

a) Determine el salario para el cual el gasto en tabaco es máximo. ¿A cuánto asciende este gasto?

[1 punto]

b) ¿Para qué salarios el gasto mensual es inferior a 60 €?

[1 punto]

5. Resuelva las siguientes preguntas:

a) Encuentre las matrices A y B que cumplen que $A - 2B = \begin{pmatrix} 1 & 13 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$ y $2A + 3B = \begin{pmatrix} 2 & -9 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$.

[1 punto]

b) Determine el valor de a , b , c y d para que se verifique que $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & c \\ 2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & -5 \\ d & -7 \end{pmatrix}$.

[1 punto]

6. Se sabe que la función $f(x) = \frac{ax+b}{cx+1}$ pasa por el punto $(2, -5)$ y que las rectas $x = 1$ e $y = 2$ son sus asíntotas vertical y horizontal, respectivamente. Calcule a , b y c .

[2 puntos]

SOLUCIONES

1. Considere la función

$$f(x) = \begin{cases} 2x+3 & \text{si } x \leq -1 \\ ax+b & \text{si } -1 < x < 2 \\ x^2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

Encuentre el valor de a y b para que la función sea continua para todos los números reales.
[2 puntos]

La función debe ser continua en $x = -1$.

$$\left. \begin{aligned} f(-1) &= 2(-1) + 3 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1^-} 2x + 3 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1^+} ax + b = -a + b \\ f(-1) &= \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) \end{aligned} \right\} \Rightarrow -a + b = 1 \Rightarrow \boxed{b = 1 + a}$$

La función debe ser continua en $x = 2$.

$$\left. \begin{aligned} f(2) &= 2^2 = 4 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} ax + b = 2a + b \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} x^2 = 4 \\ f(2) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2a + b = 4 \Rightarrow \boxed{b = 4 - 2a}$$

Reunimos las dos ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{aligned} b &= 1 + a \\ b &= 4 - 2a \end{aligned} \right\} \Rightarrow 1 + a = 4 - 2a \Rightarrow 3a = 3 \Rightarrow \boxed{a = 1} \Rightarrow \boxed{b = 1 + 1 = 2}$$

Para que la función sea continua para todos los números reales debe ser $a = 1$ y $b = 2$.

2. Al acabar un curso de pintura, los alumnos reciben como obsequio un estuche con rotuladores y colores. Se regalan dos tipos de estuches: los rojos, que contienen 1 rotulador y 2 colores y cuestan 9 €, y los verdes, que traen 3 rotuladores y 1 color y cuestan 15 €. La escuela dispone de 200 rotuladores y 100 colores para rellenar los estuches. Necesita preparar como mínimo 40 estuches y el número de estuches rojos no debe superar el número de estuches verdes. Con estos datos, la escuela quiere calcular el precio que tendrá que pagar por estos obsequios.
- a) Determine la función objetivo y las restricciones, y dibuje la región de las posibles opciones de la escuela. [1,25 puntos]
- b) Calcule cuántos estuches de cada tipo hay que preparar para que el gasto sea mínimo y diga cuál es este gasto mínimo. [0,75 puntos]

a) Llamamos “x” al número de estuches rojos e “y” al número de estuches verdes que se preparan. Realizamos una tabla para organizar toda la información del ejercicio.

	Rotuladores	Colores	Coste
Nº estuches rojos (x)	x	2x	9x
Nº estuches verdes (y)	3y	y	15y
TOTALES	$x + 3y$	$2x + y$	$9x + 15y$

La función objetivo es el coste que deseamos minimizar y que viene expresado como

$$C(x, y) = 9x + 15y.$$

Las restricciones son:

- La escuela dispone de 200 rotuladores y 100 colores para rellenar los estuches $\rightarrow x + 3y \leq 200$; $2x + y \leq 100$.
- Necesita preparar como mínimo 40 estuches $\rightarrow x + y \geq 40$.
- El número de estuches rojos no debe superar el número de estuches verdes $\rightarrow x \leq y$.
- Las cantidades deben ser positivas $\rightarrow x \geq 0$; $y \geq 0$.

Reunimos las restricciones en un sistema de inecuaciones.

$$\left. \begin{array}{l} x + 3y \leq 200 \\ 2x + y \leq 100 \\ x + y \geq 40 \\ x \leq y \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3y \leq 200 - x \\ y \leq 100 - 2x \\ y \geq 40 - x \\ y \geq x \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Dibujamos las rectas que delimitan la región factible (la región de las posibles opciones de la escuela).

$$3y = 200 - x$$

$$y = 100 - 2x$$

$$y = 40 - x$$

$$y = x$$

$$x \geq 0; y \geq 0$$

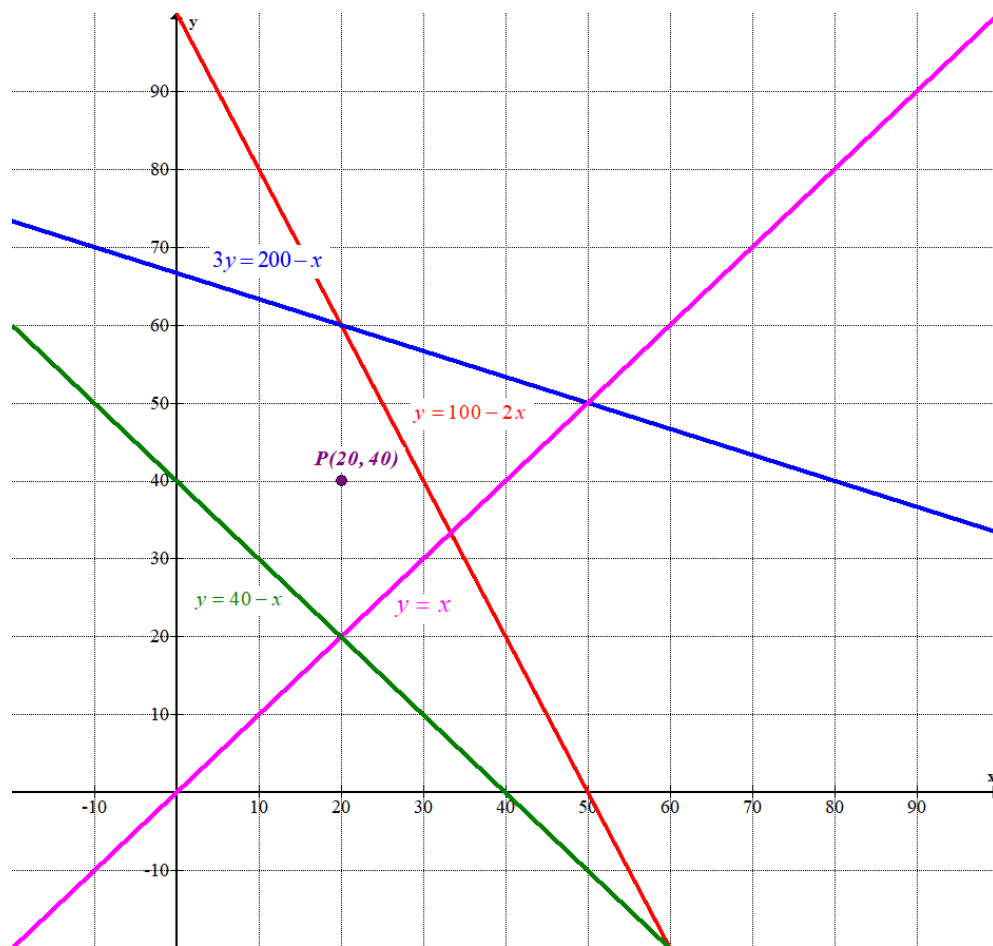
x	$y = \frac{200-x}{3}$
0	200/3
20	60
200	0

x	$y = 100 - 2x$
0	100
20	60
50	0

x	$y = 40 - x$
0	40
20	20
40	0

x	$y = x$
0	0
20	20
40	40

Primer
cuadrante

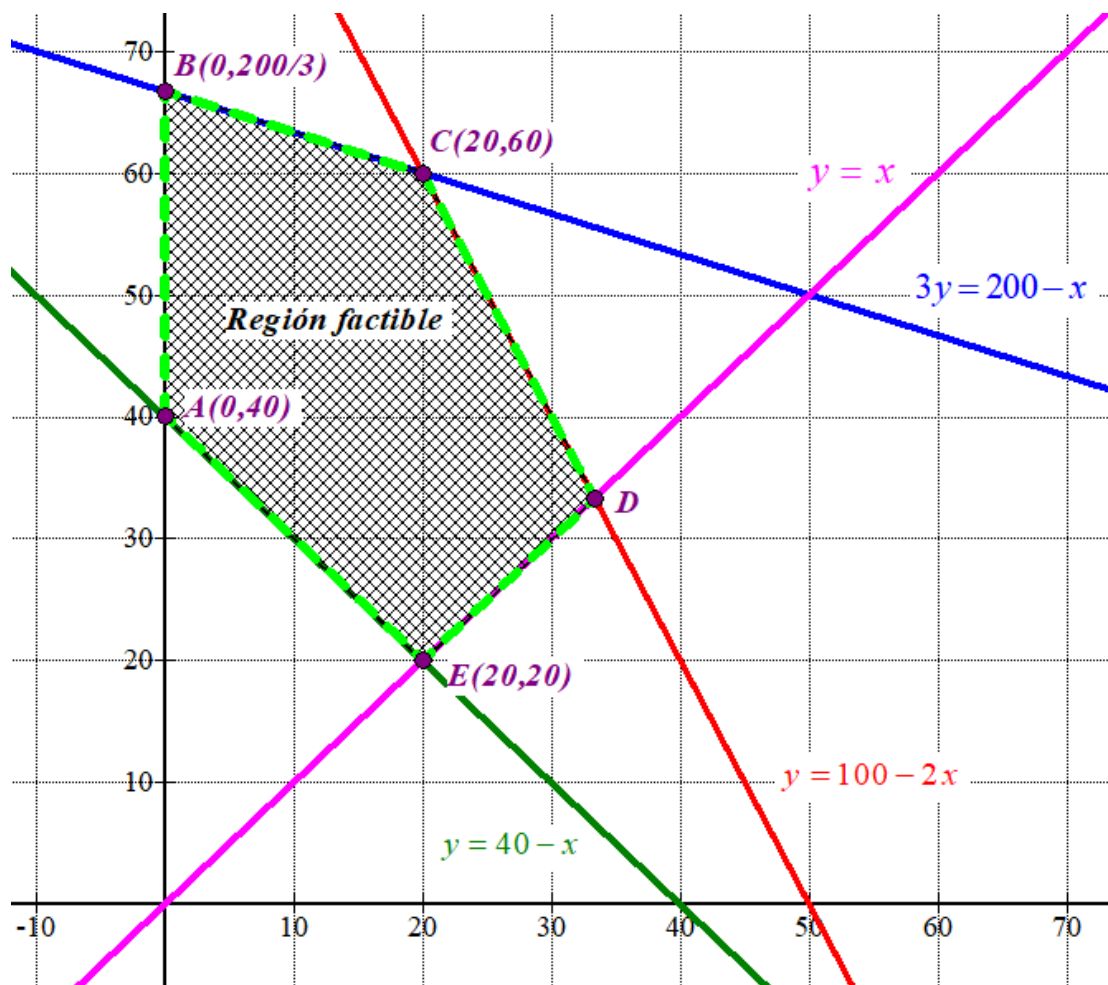


Como las restricciones son $\left. \begin{array}{l} 3y \leq 200 - x \\ y \leq 100 - 2x \\ y \geq 40 - x \\ y \geq x \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$ la región factible es la región del primer cuadrante

situada por encima de la recta verde y rosa y por debajo de las rectas azul y roja. Lo comprobamos viendo si el punto $P(20, 40)$ perteneciente a esta región cumple las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 3 \cdot 40 \leq 200 - 20 \\ 40 \leq 100 - 2 \cdot 20 \\ 40 \geq 40 - 20 \\ 40 \geq 20 \\ 20 \geq 0; 40 \geq 0 \end{array} \right\}$$

Se cumplen todas las desigualdades. Coloreamos de gris la región factible en el siguiente dibujo e indicamos las coordenadas de los vértices de esta región.



Determinamos las coordenadas del vértice D.

$$D \rightarrow \begin{cases} y = 100 - 2x \\ y = x \end{cases} \Rightarrow x = 100 - 2x \Rightarrow 3x = 100 \Rightarrow x = \frac{100}{3} \Rightarrow y = \frac{100}{3} \Rightarrow D\left(\frac{100}{3}, \frac{100}{3}\right)$$

b) Valoramos la función coste $C(x, y) = 9x + 15y$ en cada uno de los vértices en busca del valor mínimo.

$$A(0, 40) \rightarrow C(0, 40) = 9 \cdot 0 + 15 \cdot 40 = 600$$

$$B\left(0, \frac{200}{3}\right) \rightarrow C\left(0, \frac{200}{3}\right) = 9 \cdot 0 + 15 \cdot \frac{200}{3} = 1000$$

$$C(20, 60) \rightarrow C(20, 60) = 9 \cdot 20 + 15 \cdot 60 = 1080$$

$$D\left(\frac{100}{3}, \frac{100}{3}\right) \rightarrow C\left(\frac{100}{3}, \frac{100}{3}\right) = 9 \cdot \frac{100}{3} + 15 \cdot \frac{100}{3} = 800$$

$$E(20, 20) \rightarrow C(20, 20) = 9 \cdot 20 + 15 \cdot 20 = 480 \text{ ¡Mínimo!}$$

El coste mínimo es de 480 euros y se consigue con la preparación de 20 estuches rojos y otros 20 verdes.

3. Un inversor ha obtenido un beneficio de 1.500 € después de invertir un total de 40.000 € en tres empresas diferentes. Estos beneficios se desglosan de la siguiente forma: la cantidad invertida en la empresa A le ha reportado un 2 % de beneficios, la cantidad invertida en la empresa B, un 5 %, y la cantidad invertida en la empresa C, un 7 %. El dinero invertido en la empresa B ha sido el mismo que en las otras dos empresas juntas. ¿Cuál fue la cantidad invertida en cada una de las tres empresas? [2 puntos]

Llamamos a , b y c a la cantidad de dinero invertido en las empresas A, B y C, respectivamente.

“Ha invertido 40000 euros” $\rightarrow a + b + c = 40000$.

“La cantidad invertida en la empresa A le ha reportado un 2 % de beneficios, la cantidad invertida en la empresa B, un 5 %, y la cantidad invertida en la empresa C, un 7 %, obteniendo 1500 € de beneficio”
 $\rightarrow 0.02a + 0.05b + 0.07c = 1500 \rightarrow 2a + 5b + 7c = 150000$.

“El dinero invertido en la empresa B ha sido el mismo que en las otras dos empresas juntas”
 $\rightarrow b = a + c$.

Reunimos todas las ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} a + b + c = 40000 \\ 2a + 5b + 7c = 150000 \\ b = a + c \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a + a + c + c = 40000 \\ 2a + 5(a + c) + 7c = 150000 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2a + 2c = 40000 \\ 2a + 5a + 5c + 7c = 150000 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} a + c = 20000 \\ 7a + 12c = 150000 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a = 20000 - c \\ 7a + 12c = 150000 \end{array} \right\} \Rightarrow 7(20000 - c) + 12c = 150000 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 140000 - 7c + 12c = 150000 \Rightarrow 5c = 10000 \Rightarrow \boxed{c = \frac{10000}{5} = 2000} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{a = 20000 - 2000 = 18000} \Rightarrow \boxed{b = 18000 + 2000 = 20000}$$

Se han invertido 18 000 euros en la empresa A, 20 000 euros en la empresa B y 2 000 euros en la empresa C.

4. El gasto mensual en tabaco de un fumador viene determinado por su salario mediante la función $f(x) = \frac{400x}{x^2 + 4}$, donde x representa el salario en miles de euros y $f(x)$ el gasto mensual en tabaco en euros.

a) Determine el salario para el cual el gasto en tabaco es máximo. ¿A cuánto asciende este gasto?

[1 punto]

b) ¿Para qué salarios el gasto mensual es inferior a 60 €?

[1 punto]

a) Buscamos los puntos críticos de la función averiguando cuando se anula la derivada.

$$f(x) = \frac{400x}{x^2 + 4} \Rightarrow f'(x) = \frac{400(x^2 + 4) - (2x)400x}{(x^2 + 4)^2} = \frac{400x^2 + 1600 - 800x^2}{(x^2 + 4)^2} = \frac{1600 - 400x^2}{(x^2 + 4)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{1600 - 400x^2}{(x^2 + 4)^2} = 0 \Rightarrow 1600 - 400x^2 = 0 \Rightarrow 4 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow \boxed{x = \sqrt{4} = 2}$$

Solo consideramos el valor positivo de la raíz cuadrada de 4 pues no tiene sentido un salario negativo. Tenemos un punto crítico para un sueldo de 2000 euros.

Sustituimos $x = 2$ en la segunda derivada para averiguar si es máximo o mínimo.

$$f'(x) = \frac{1600 - 400x^2}{(x^2 + 4)^2} \Rightarrow f''(x) = \frac{-800x(x^2 + 4)^2 - 2(x^2 + 4)2x(1600 - 400x^2)}{(x^2 + 4)^4}$$

$$f''(x) = \frac{-800x(x^2 + 4) - 4x(1600 - 400x^2)}{(x^2 + 4)^3} = \frac{-800x^3 - 3200x - 6400x + 1600x^3}{(x^2 + 4)^3}$$

$$f''(x) = \frac{-9600x + 800x^3}{(x^2 + 4)^3} \Rightarrow f''(2) = \frac{-9600 \cdot 2 + 800 \cdot 2^3}{(2^2 + 4)^3} = -25 < 0$$

En $x = 2$ hay un máximo relativo. Para un salario de 2000 euros el gasto en tabaco es

máximo. Este gasto máximo tiene un valor de $f(2) = \frac{400 \cdot 2}{2^2 + 4} = 100$ euros mensuales.

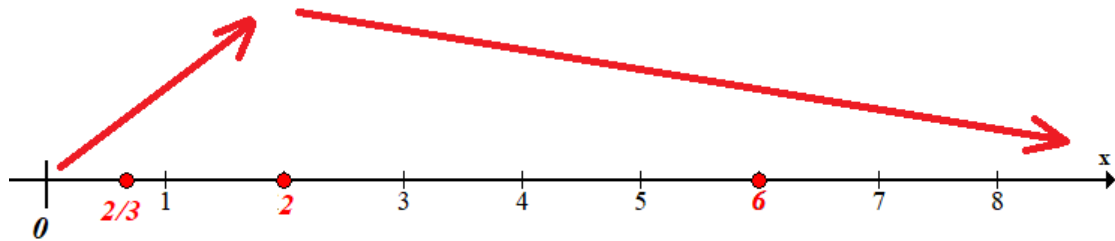
b) Averiguamos cuando el gasto mensual es de 60 euros.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = \frac{400x}{x^2 + 4} \\ f(x) = 60 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{400x}{x^2 + 4} = 60 \Rightarrow 400x = 60x^2 + 240 \Rightarrow 60x^2 - 400x + 240 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x^2 - 20x + 12 = 0 \Rightarrow x = \frac{20 \pm \sqrt{(-20)^2 - 4(3)(12)}}{2(3)} = \frac{20 \pm 16}{6} = \begin{cases} \frac{20+16}{6} = \boxed{6=x} \\ \frac{20-16}{6} = \boxed{\frac{2}{3} = 0.666=x} \end{cases}$$

El gasto mensual en tabaco es de 60 euros con un sueldo de 666.67 euros mensuales y con un sueldo de 6000 euros mensuales.

La función tiene un máximo para un sueldo de 2000 euros por lo que la función crece de 0 a 2000 euros y decrece de 2000 euros en adelante. La función sigue el esquema siguiente.



El gasto crece de $\frac{2}{3}$ a 22, estando por encima de 60 euros y el gasto sigue estando por encima de 60 euros de 2 a 6, cuando vuelve a ser de 60 euros y continua disminuyendo.

El gasto es inferior a 60 euros con un salario inferior a 666.67 euros mensuales y con un salario superior a 6000 euros mensuales.

5. Resuelva las siguientes preguntas:

a) Encuentre las matrices A y B que cumplen que $A - 2B = \begin{pmatrix} 1 & 13 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$ y $2A + 3B = \begin{pmatrix} 2 & -9 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$.

[1 punto]

b) Determine el valor de a , b , c y d para que se verifique que $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & c \\ 2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & -5 \\ d & -7 \end{pmatrix}$.

[1 punto]

a) Resolvemos el sistema matricial.

$$\left. \begin{array}{l} A - 2B = \begin{pmatrix} 1 & 13 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \\ 2A + 3B = \begin{pmatrix} 2 & -9 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} A = 2B + \begin{pmatrix} 1 & 13 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \\ 2A + 3B = \begin{pmatrix} 2 & -9 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} \end{array} \right\} \Rightarrow 2 \left[2B + \begin{pmatrix} 1 & 13 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \right] + 3B = \begin{pmatrix} 2 & -9 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4B + \begin{pmatrix} 2 & 26 \\ 0 & -10 \end{pmatrix} + 3B = \begin{pmatrix} 2 & -9 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow 7B = \begin{pmatrix} 2 & -9 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 26 \\ 0 & -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -35 \\ 7 & 14 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{B = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 0 & -35 \\ 7 & 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}} \Rightarrow \boxed{A = 2 \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 13 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}}$$

Las matrices que cumplen lo pedido son $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

b) Resolvemos la ecuación matricial.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & c \\ 2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & -5 \\ d & -7 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0+4 & c-8 \\ 0+2 & ac-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & -5 \\ d & -7 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \boxed{4=b} \\ c-8=-5 \rightarrow \boxed{c=8-5=3} \\ \boxed{2=d} \\ ac-4=-7 \end{cases} \Rightarrow 3a-4=-7 \Rightarrow 3a=-7+4=-3 \Rightarrow \boxed{a=-1}$$

Los valores buscados son $a = -1$, $b = 4$, $c = 3$ y $d = 2$.

6. Se sabe que la función $f(x) = \frac{ax+b}{cx+1}$ pasa por el punto $(2, -5)$ y que las rectas $x = 1$ e $y = 2$ son sus asíntotas vertical y horizontal, respectivamente. Calcule a , b y c . [2 puntos]

Si la recta $x = 1$ es asíntota vertical este valor debe estar excluido del dominio de la función, por lo que el denominador de la función debe anularse para $x = 1$.

$$c \cdot 1 + 1 = 0 \Rightarrow \boxed{c = -1}$$

La función queda $f(x) = \frac{ax+b}{-x+1}$.

Si la recta $y = 2$ es asíntota horizontal debe cumplirse que $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 2$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax+b}{-x+1} = 2 \Rightarrow \frac{a}{-1} = 2 \Rightarrow \boxed{a = -2}$$

La función queda con la expresión $f(x) = \frac{-2x+b}{1-x}$.

Como se sabe que la función $f(x) = \frac{-2x+b}{1-x}$ pasa por el punto $(2, -5)$ debe cumplirse que $f(2) = -5$.

$$\left. \begin{array}{l} f(2) = -5 \\ f(x) = \frac{-2x+b}{1-x} \end{array} \right\} \Rightarrow -5 = \frac{-4+b}{1-2} \Rightarrow -5 = \frac{b-4}{-1} \Rightarrow b-4 = 5 \Rightarrow \boxed{b = 9}$$

Los valores necesarios para que se cumpla todo lo pedido son $a = -2$, $b = 9$ y $c = -1$.