



Generalitat de Catalunya
Consell Interuniversitari de Catalunya

Oficina d'Accés a la Universitat

Convocatoria 2018

Proves d'accés a la universitat

Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales

Serie 1

Responda a CINCO de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué.

Cada cuestión vale 2 puntos.

Puede utilizar calculadora, pero no se permite el uso de calculadoras u otros aparatos que pueden almacenar datos o que pueden transmitir o recibir información.

1. Considere las matrices M de la forma $M = \begin{pmatrix} 2 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$, donde a es un número real.

a) Determine a de forma que $M^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2a \\ -2a & -1 \end{pmatrix}$.

[1 punto]

b) Determine a de forma que $M^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, donde M^{-1} representa la matriz inversa de M .

Es decir, $M \cdot M^{-1} = I$, donde I es la matriz identidad de orden 2.

[1 punto]

2. Considere la función $f(x) = \frac{x^2}{x-a}$, donde a es un parámetro real.

a) Encuentre para qué valores del parámetro a la recta tangente a la función f en $x=1$ es paralela a la recta $y+3x+5=0$.

[1 punto]

b) Para el valor del parámetro $a=1$, encuentre los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los puntos donde se alcanzan los máximos y mínimos relativos de la función f .

[1 punto]

3. Pol quedó ayer con unos amigos en un bar y tomaron 4 refrescos, 3 bocadillos y 5 bolas de helado. Todo junto les costó 19,50 €. Días atrás, había ido al mismo bar con su primo Martí, y por 2 refrescos, 1 bocadillo y 2 bolas de helado habían pagado 8,10 €. En este bar todos los refrescos valen lo mismo, todos los bocadillos tienen el mismo precio y las bolas de helado se venden también a precio único.

a) Hoy Pol ha vuelto a ir con otros amigos y han tomado 6 refrescos, 5 bocadillos y 8 bolas de helado. Explique razonadamente cuánto han pagado en total.

[1 punto]

b) Si 1 refresco, 1 bocadillo y 1 bola de helado cuestan 5,10 €, ¿cuánto vale el refresco, el bocadillo y la bola de helado por separado?

[1 punto]

4. Una empresa de materiales para coches fabrica dos modelos de una determinada pieza, que se denominarán A y B. Cada modelo se fabrica en una hora, mediante un proceso que consta de dos fases. En la primera fase del proceso se destinan 5 trabajadores, y en la segunda, 12. Para fabricar cada modelo, en la primera fase se necesita 1 trabajador para cada pieza. En cambio, en la segunda fase se necesitan 2 trabajadores para el modelo A y 3 trabajadores para el modelo B. El beneficio que se obtiene es de 40 € por el modelo A y 50 € por el modelo B.
- a) Determine la función objetivo y las restricciones, y dibuje la región factible.
[1,25 puntos]
- b) ¿Cuántas piezas de cada modelo por hora tendrán que fabricarse para que el beneficio sea máximo? ¿Cuál es este beneficio máximo?
[0,75 puntos]
5. Una compañía de móviles presentó hace un año un teléfono inteligente al precio de 750 €. Recientemente, un estudio de mercado ha llegado a la conclusión de que, con este precio, compran el teléfono 2.000 clientes al mes, y de que la relación entre estas dos variables es lineal, de forma que por cada 10 € que se incrementa el precio del móvil, lo compran 100 clientes menos, y al revés: por cada 10 € de descuento sobre el precio inicial de 750 €, lo compran 100 clientes más.
- a) Deduzca que la función que determina los ingresos mensuales de la compañía según el precio del móvil es $I(p) = -10p^2 + 9.500p$.
[1 punto]
- b) Encuentre cuál tiene que ser el precio del móvil para obtener ingresos, el precio del móvil que da los ingresos mensuales más elevados y el valor de estos ingresos máximos.
[1 punto]
6. El número de individuos, en millones, de una población viene determinado por la función
- $$P(t) = \frac{5+t^2}{(t+1)^2}, \text{ donde } t \text{ mide el número de años transcurridos.}$$
- a) ¿Cuál es la población inicial y la población después de 9 años? ¿A partir de qué momento la población será inferior a un millón de individuos?
[1 punto]
- b) Con el paso del tiempo, ¿hacia qué valor tenderá el número de individuos de la población?
[1 punto]

SOLUCIONES

1. Considere las matrices M de la forma $M = \begin{pmatrix} 2 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$, donde a es un número real.

a) Determine a de forma que $M^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2a \\ -2a & -1 \end{pmatrix}$. [1 punto]

b) Determine a de forma que $M^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, donde M^{-1} representa la matriz inversa de M .

Es decir, $M \cdot M^{-1} = I$, donde I es la matriz identidad de orden 2. [1 punto]

a) Resolvemos la ecuación matricial planteada.

$$\begin{aligned} M^2 &= \begin{pmatrix} 3 & 2a \\ -2a & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2a \\ -2a & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{pmatrix} 4-a^2 & 2a+0 \\ -2a+0 & -a^2+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2a \\ -2a & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 4-a^2 & 2a \\ -2a & -a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2a \\ -2a & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} 4-a^2=3 \\ 2a=2a \\ -2a=-2a \\ -a^2=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -a^2=-1 \\ -a^2=-1 \end{cases} \Rightarrow a^2=1 \Rightarrow \boxed{a=\sqrt{1}=\pm 1} \end{aligned}$$

Los valores buscados son $a=1$ y $a=-1$.

b) Resolvemos la ecuación matricial planteada.

$$\begin{aligned} M \cdot M^{-1} &= I \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0-a & 2+2a \\ 0+0 & -a+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} -a=1 \\ 2+2a=0 \\ 0=0 \\ -a=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-1 \\ 2a=-2 \rightarrow a=-1 \\ a=-1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{a=-1} \end{aligned}$$

El valor buscado es $a=-1$.

2. Considere la función $f(x) = \frac{x^2}{x-a}$, donde a es un parámetro real.

a) Encuentre para qué valores del parámetro a la recta tangente a la función f en $x=1$ es paralela a la recta $y+3x+5=0$. [1 punto]

b) Para el valor del parámetro $a=1$, encuentre los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los puntos donde se alcanzan los máximos y mínimos relativos de la función f . [1 punto]

a) Si la recta tangente a la función f en $x=1$ es paralela a la recta $y+3x+5=0$ ambas rectas deben tener la misma pendiente. La pendiente de la recta tangente es el valor de la derivada: $f'(1)$ y la pendiente de la recta $y+3x+5=0 \rightarrow y=-3x-5$ es $m=-3$.

$$f(x) = \frac{x^2}{x-a} \rightarrow f'(x) = \frac{2x(x-a) - (x^2) \cdot 1}{(x-a)^2} = \frac{2x^2 - 2ax - x^2}{(x-a)^2} = \frac{x^2 - 2ax}{(x-a)^2}$$

$$\left. \begin{aligned} f'(1) &= \frac{1^2 - 2a}{(1-a)^2} \\ \text{Pendiente tangente} &= -3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{1-2a}{(1-a)^2} = -3 \Rightarrow 1-2a = -3(1-a)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1-2a = -3(1^2 + a^2 - 2a) \Rightarrow 1-2a = -3-3a^2+6a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3a^2 - 8a + 4 = 0 \Rightarrow a = \frac{8 \pm \sqrt{(-8)^2 - 4(3)(4)}}{2(3)} = \frac{8 \pm 4}{6} = \begin{cases} \frac{8+4}{6} = \boxed{2=a} \\ \frac{8-4}{6} = \frac{4}{6} = \boxed{\frac{2}{3}=a} \end{cases}$$

Para que se cumpla lo pedido debe ser $a = \frac{2}{3}$ o $a = 2$.

b) Para el valor del parámetro $a=1$ la función queda $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$. Esta función tiene como dominio $\mathbb{R} - \{1\}$. Buscamos sus puntos críticos averiguando cuando se anula la derivada.

$$\left. \begin{aligned} f'(x) &= \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} \\ f'(x) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = 0 \Rightarrow x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(x-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x=0} \\ x-2=0 \rightarrow \boxed{x=2} \end{cases}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos dos valores: $x=0$, $x=2$ y $x=1$ excluido del dominio.

- En el intervalo $(-\infty, 0)$ tomamos $x=-1$ y la derivada vale

$$f'(-1) = \frac{(-1)^2 - 2(-1)}{(-1-1)^2} = \frac{3}{4} > 0. \text{ La función crece en } (-\infty, 0).$$

- En el intervalo $(0,1)$ tomamos $x=0.5$ y la derivada vale

$$f'(0.5) = \frac{0.5^2 - 2(0.5)}{(0.5-1)^2} = -3 < 0. \text{ La función decrece en } (0,1).$$

- En el intervalo $(1,2)$ tomamos $x=1.5$ y la derivada vale

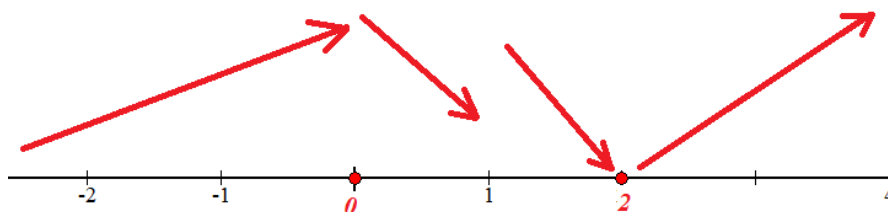
$$f'(1.5) = \frac{1.5^2 - 2(1.5)}{(1.5-1)^2} = -3 < 0. \text{ La función decrece en } (1,2).$$

- En el intervalo $(2,+\infty)$ tomamos $x=3$ y la derivada vale $f'(3) = \frac{3^2 - 2(3)}{(3-1)^2} = \frac{3}{4} > 0.$

La función crece en $(2,+\infty)$.

La función crece en $(-\infty,0) \cup (2,+\infty)$ y decrece en $(0,1) \cup (1,2)$.

La función sigue el esquema siguiente.



La función tiene un máximo relativo en $x=0$ y un mínimo relativo en $x=2$. Como

$f(0) = \frac{0^2}{0-1} = 0$ y $f(2) = \frac{2^2}{2-1} = 4$ las coordenadas del máximo relativo son $(0,0)$ y las del mínimo relativo son $(2,4)$.

3. Pol quedó ayer con unos amigos en un bar y tomaron 4 refrescos, 3 bocadillos y 5 bolas de helado. Todo junto les costó 19,50 €. Días atrás, había ido al mismo bar con su primo Martí, y por 2 refrescos, 1 bocadillo y 2 bolas de helado habían pagado 8,10 €. En este bar todos los refrescos valen lo mismo, todos los bocadillos tienen el mismo precio y las bolas de helado se venden también a precio único.

a) Hoy Pol ha vuelto a ir con otros amigos y han tomado 6 refrescos, 5 bocadillos y 8 bolas de helado. Explique razonadamente cuánto han pagado en total. [1 punto]

b) Si 1 refresco, 1 bocadillo y 1 bola de helado cuestan 5,10 €, ¿cuánto vale el refresco, el bocadillo y la bola de helado por separado? [1 punto]

a) Averiguamos el precio de un refresco (r €), de un bocadillo (b €) y de una bola de helado (h €) resolviendo el sistema que podemos obtener con los datos proporcionados en el ejercicio.

$$4 \text{ refrescos, } 3 \text{ bocadillos y } 5 \text{ bolas de helado cuestan } 19,50 \text{ €} \rightarrow 4r + 3b + 5h = 19.5$$

$$2 \text{ refrescos, } 1 \text{ bocadillo y } 2 \text{ bolas de helado cuestan } 8,10 \text{ €} \rightarrow 2r + b + 2h = 8.1$$

Reunimos las dos ecuaciones en un sistema e intentamos resolverlo (nos faltaría una ecuación).

$$\left. \begin{array}{l} 4r + 3b + 5h = 19.5 \\ 2r + b + 2h = 8.1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 4r + 3b + 5h = 19.5 \\ b = 8.1 - 2r - 2h \end{array} \right\} \Rightarrow 4r + 3(8.1 - 2r - 2h) + 5h = 19.5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4r + 24.3 - 6r - 6h + 5h = 19.5 \Rightarrow -2r - h = -4.8 \Rightarrow 4.8 - 2r = h \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b = 8.1 - 2r - 2(4.8 - 2r) = 8.1 - 2r - 9.6 + 4r = 2r - 1.5 \Rightarrow \begin{cases} b = 2r - 1.5 \\ h = 4.8 - 2r \end{cases}$$

Estos precios del bocadillo y del helado dependen del valor del refresco. Calculamos cuánto cuestan 6 refrescos, 5 bocadillos y 8 bolas de helado.

$$\left. \begin{array}{l} b = 2r - 1.5 \\ h = 4.8 - 2r \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 5b = 10r - 7.5 \\ 8h = 38.4 - 16r \end{array} \right\} \Rightarrow 6r + 5b + 8h = \cancel{6r} + \cancel{10r} - 7.5 + 38.4 - \cancel{16r} = 30.9$$

Han pagado 30.9 € por 6 refrescos, 5 bocadillos y 8 bolas de helado.

b) Añadimos al sistema anterior una nueva ecuación con el nuevo dato aportado.

$$1 \text{ refresco, } 1 \text{ bocadillo y } 1 \text{ bola de helado cuestan } 5,10 \text{ €} \rightarrow r + b + h = 5.1.$$

$$\left. \begin{array}{l} 4r + 3b + 5h = 19.5 \\ 2r + b + 2h = 8.1 \\ r + b + h = 5.1 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} b = 2r - 1.5 \\ h = 4.8 - 2r \\ r + b + h = 5.1 \end{cases} \Rightarrow r + \cancel{2r} - 1.5 + 4.8 - \cancel{2r} = 5.1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{r = 5.1 + 1.5 - 4.8 = 1.8} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{b = 2 \cdot 1.8 - 1.5 = 2.1} \\ \boxed{h = 4.8 - 2 \cdot 1.8 = 1.2} \end{cases}$$

Los precios son: 1.8 € cada refresco, 2.1 € cada bocadillo y 1.2 € cada bola de helado.

4. Una empresa de materiales para coches fabrica dos modelos de una determinada pieza, que se denominarán A y B. Cada modelo se fabrica en una hora, mediante un proceso que consta de dos fases. En la primera fase del proceso se destinan 5 trabajadores, y en la segunda, 12. Para fabricar cada modelo, en la primera fase se necesita 1 trabajador para cada pieza. En cambio, en la segunda fase se necesitan 2 trabajadores para el modelo A y 3 trabajadores para el modelo B. El beneficio que se obtiene es de 40 € por el modelo A y 50 € por el modelo B.

a) Determine la función objetivo y las restricciones, y dibuje la región factible. [1,25 puntos]

b) ¿Cuántas piezas de cada modelo por hora tendrán que fabricarse para que el beneficio sea máximo? ¿Cuál es este beneficio máximo? [0,75 puntos]

a) Llamamos “x” al número de piezas del modelo A e “y” al número de piezas del modelo B. Realizamos una tabla para organizar toda la información del ejercicio.

	Trabajadores fase 1	Trabajadores fase 2	Beneficio
Nº piezas modelo A (x)	x	2x	40x
Nº piezas modelo B (y)	y	3y	50y
TOTALES	$x + y$	$2x + 3y$	$40x + 50y$

La función objetivo es el beneficio que deseamos maximizar y que viene expresado como $B(x, y) = 40x + 50y$.

Las restricciones son:

- En la primera fase del proceso se destinan 5 trabajadores, y en la segunda, 12 $\rightarrow x + y \leq 5$; $2x + 3y \leq 12$.
- Las cantidades deben ser positivas $\rightarrow x \geq 0$; $y \geq 0$.

Reunimos las restricciones en un sistema de inecuaciones.

$$\left. \begin{array}{l} x + y \leq 5 \\ 2x + 3y \leq 12 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y \leq 5 - x \\ 3y \leq 12 - 2x \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Dibujamos las rectas que delimitan la región factible (la región de las posibles opciones de la escuela).

$$y = 5 - x$$

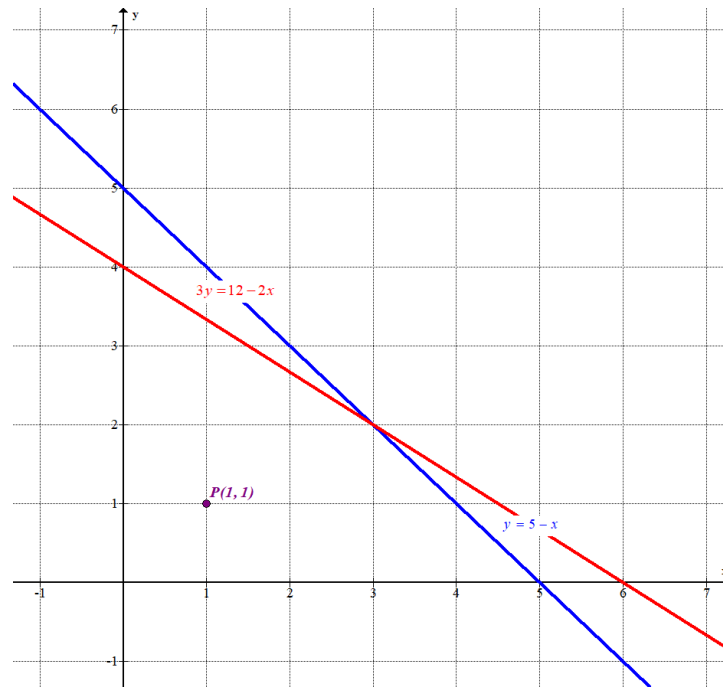
x	y = 5 - x
0	5
3	2
5	0

$$3y = 12 - 2x$$

x	y = $\frac{12 - 2x}{3}$
0	4
3	2
6	0

$$x \geq 0; y \geq 0$$

Primer
cuadrante



Como las restricciones son $\left. \begin{array}{l} y \leq 5 - x \\ 3y \leq 12 - 2x \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$ la región factible es la región del primer cuadrante

situada por debajo de las rectas azul y roja.

Lo comprobamos viendo si el punto $P(1, 1)$ perteneciente a esta región cumple las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 1 \leq 5 - 1 \\ 3 \leq 12 - 2 \\ 1 \geq 0; 1 \geq 0 \end{array} \right\}$$

Se cumplen todas las desigualdades. Coloreamos de rosa la región factible en el siguiente dibujo e indicamos las coordenadas de los vértices de esta región.



b) Valoramos la función beneficio $B(x, y) = 40x + 50y$ en cada uno de los vértices en busca del valor máximo.

$$A(0, 0) \rightarrow B(0, 0) = 0$$

$$B(0, 4) \rightarrow B(0, 4) = 40 \cdot 0 + 50 \cdot 4 = 200$$

$$C(3, 2) \rightarrow B(3, 2) = 40 \cdot 3 + 50 \cdot 2 = 220 \text{ ; Máximo!}$$

$$D(5, 0) \rightarrow B(5, 0) = 40 \cdot 5 + 50 \cdot 0 = 200$$

El beneficio máximo que se puede conseguir cumpliendo con las restricciones es de 220 euros y se consigue con la fabricación de 3 piezas del modelo A y 2 del modelo B.

5. Una compañía de móviles presentó hace un año un teléfono inteligente al precio de 750 €. Recientemente, un estudio de mercado ha llegado a la conclusión de que, con este precio, compran el teléfono 2.000 clientes al mes, y de que la relación entre estas dos variables es lineal, de forma que por cada 10 € que se incrementa el precio del móvil, lo compran 100 clientes menos, y al revés: por cada 10 € de descuento sobre el precio inicial de 750 €, lo compran 100 clientes más.

a) Deduzca que la función que determina los ingresos mensuales de la compañía según el precio del móvil es $I(p) = -10p^2 + 9.500p$. [1 punto]

b) Encuentre cuál tiene que ser el precio del móvil para obtener ingresos, el precio del móvil que da los ingresos mensuales más elevados y el valor de estos ingresos máximos. [1 punto]

a) Si llamamos p al precio del móvil tenemos para $p = 750$ que el número de móviles vendidos son 2000, por lo que los ingresos son $2000 \cdot 750 = 1\,500\,000$ euros.

Si subimos el precio 10 euros ($750 + 10$) lo compran 100 clientes menos ($2000 - 1 \cdot 100$) por lo que los ingresos mensuales serán $(750 + 10)(2000 - 100)$.

Si subimos el precio 20 euros ($750 + 20$) lo compran 200 clientes menos ($2000 - 2 \cdot 100$) por lo que los ingresos mensuales serán $(750 + 20)(2000 - 200)$.

Si el precio del móvil es p con respecto al precio inicial de 750 € el precio ha subido

$p - 750$ y si dividimos esta cantidad entre 10 obtenemos $\frac{p-750}{10}$ que nos indica el número

de múltiplos de 10 que ha subido (o bajado) su precio. Entonces se habrán vendido

$$2000 - \frac{p-750}{10} \cdot 100 = 2000 - 10(p-750) = 2000 - 10p + 7500 = 9500 - 10p.$$

Los ingresos obtenidos serían el resultado de multiplicar el precio de un móvil por el número de móviles vendidos:

$$I(p) = p(9500 - 10p) = -10p^2 + 9500p$$

b) Nos preguntan cuándo la función ingresos es positiva. Averiguamos cuando los ingresos son nulos.

$$I(p) = 0 \Rightarrow p(9500 - 10p) = 0 \Rightarrow \begin{cases} p = 0 \\ 9500 - 10p = 0 \rightarrow 10p = 9500 \rightarrow p = 950 \end{cases}$$

Evidentemente con un precio $p = 0$ los ingresos son nulos. Los ingresos vuelven a ser nulos para un precio de 950 euros. Para un precio de 750 euros sabemos que los ingresos son de un millón y medio de euros. Como la función ingresos es continua se cumple que con un precio entre 0 y 950 euros los ingresos son positivos.

Derivamos la función y buscamos cuando los ingresos son más altos.

$$I(p) = -10p^2 + 9500p \Rightarrow I'(p) = -20p + 9500 \left\{ \begin{array}{l} I'(p) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow -20p + 9500 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 20p = 9500 \Rightarrow p = \frac{9500}{20} = 475$$

Estudiamos el signo de la segunda derivada para un precio de 475 euros.

$$I'(p) = -20p + 9500 \Rightarrow I''(p) = -20 \Rightarrow I''(475) = -20 < 0$$

Como la segunda derivada es negativa la función ingresos tiene un máximo para $p = 475$.

Tenemos que $I(475) = -10 \cdot 475^2 + 9.500 \cdot 475 = 2256250$.

Con un precio del móvil de 475 euros se consiguen los máximos beneficios siendo el importe de 2 256 250 euros.

6. El número de individuos, en millones, de una población viene determinado por la función

$$P(t) = \frac{5+t^2}{(t+1)^2}, \text{ donde } t \text{ mide el número de años transcurridos.}$$

a) ¿Cuál es la población inicial y la población después de 9 años? ¿A partir de qué momento la población será inferior a un millón de individuos? [1 punto]

b) Con el paso del tiempo, ¿hacia qué valor tenderá el número de individuos de la población? [1 punto]

a) La población inicial es el valor de $P(0)$.

$$P(0) = \frac{5+0^2}{(0+1)^2} = 5$$

La población inicial es de 5 millones de habitantes.

$$\text{Para } t=9 \text{ tenemos que } P(9) = \frac{5+9^2}{(9+1)^2} = 0.86.$$

La población después de 9 años es de 860 000 habitantes.

Buscamos cuando la población es de 1 millón de habitantes.

$$P(t) = 1 \Rightarrow \frac{5+t^2}{(t+1)^2} = 1 \Rightarrow 5+t^2 = (1+t)^2 \Rightarrow 5+t^2 = 1+t^2+2t \Rightarrow 0 = 2t-4 \Rightarrow \boxed{t=2}$$

Al cabo del segundo año la población pasa a ser de 1 millón de habitantes.

La derivada de la función es

$$P'(t) = \frac{2t(t+1)^2 - (5+t^2)2(t+1)}{(t+1)^4} = \frac{2t(t+1) - (5+t^2)2}{(t+1)^3} = \frac{\cancel{2t^2} + 2t - 10 - \cancel{2t^2}}{(t+1)^3} = \frac{2(t-5)}{(t+1)^3}$$

$$\text{En el segundo año la derivada es } P'(2) = \frac{2(2-5)}{(2+1)^3} = \frac{-6}{27} < 0, \text{ por lo que a partir del segundo}$$

año la población va disminuyendo y es inferior a 1 millón de habitantes. A partir del quinto año vuelve a crecer el número de habitantes.

b) Calculamos el límite de la función cuando el número de años transcurridos t tiende a ser muy grande.

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} P(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{5+t^2}{(t+1)^2} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{5+t^2}{t^2+1+2t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\frac{5}{t^2} + \frac{t^2}{t^2}}{\frac{t^2}{t^2} + \frac{1}{t^2} + \frac{2t}{t^2}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\frac{5}{t^2} + 1}{1 + \frac{1}{t^2} + \frac{2}{t}} = \frac{0+1}{1+0+0} = 1$$

Con el paso de los años la población tiende a ser de 1 millón de habitantes.