



Generalitat de Catalunya  
Consell Interuniversitari de Catalunya

Oficina d'Accés a la Universitat

Convocatoria 2018

## Proves d'accés a la universitat

### Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales

#### Serie 5

Responda a CINCO de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué.

Cada cuestión vale 2 puntos.

Puede utilizar calculadora, pero no se permite el uso de calculadoras u otros aparatos que pueden almacenar datos o que pueden transmitir o recibir información.

1. Sea la función  $f(x) = \frac{x^2 - 3x}{x^2 - 4}$ .

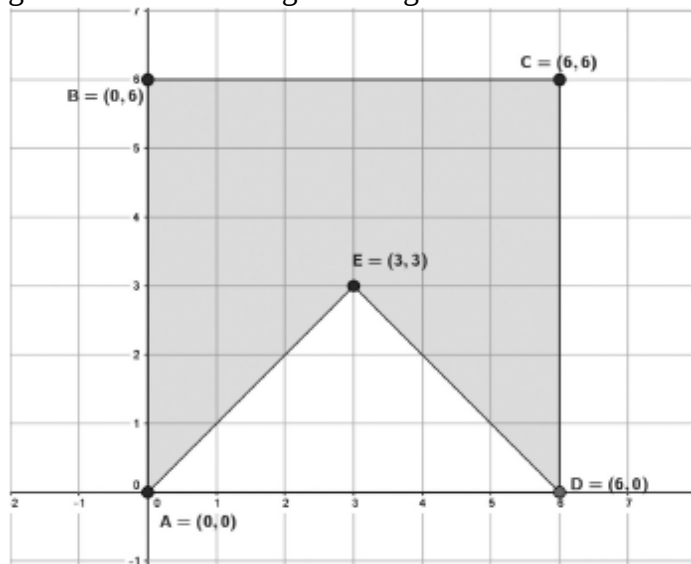
a) Indique justificadamente su dominio y determine los puntos donde el gráfico de  $f$  corta el eje de abscisas.

[1 punto]

b) Estudie su crecimiento y haga un esbozo aproximado del gráfico de la función.

[1 punto]

2. Considere el pentágono  $ABCDE$  de la siguiente figura:



a) Justifique que la región sombreada no puede representarse por medio de un sistema de inecuaciones.

[1 punto]

b) Escriba el sistema de inecuaciones que determina los puntos de la frontera y del interior del triángulo AED.

[1 punto]

3. Sea  $y = f(x)$  una parábola que tiene el vértice en el punto  $V = (0, -4)$  y corta el eje de abscisas en los puntos  $(-2, 0)$  y  $(2, 0)$ .

a) Determine su ecuación.

[1 punto]

b) Sea una función  $g$  tal que  $g'(x) = f(x)$ . Estudie el crecimiento de la función  $g$ , determine las abscisas de sus extremos relativos y clasifíquelos.

[1 punto]

4. Considere el sistema de ecuaciones 
$$\left. \begin{array}{l} 2x - y - 1 = 0 \\ -x - y + 2 = 0 \end{array} \right\}.$$

Justifique si las siguientes afirmaciones son ciertas:

a) Este sistema de ecuaciones representa dos rectas paralelas porque ambas tienen pendiente  $-1$ .

[1 punto]

b) Este sistema es compatible determinado y su solución es  $x = 1, y = 1$ .

[1 punto]

5. Un fabricante de automóviles produce los modelos Record y Astrid. Guarda la producción en tres naves. En la primera nave tiene 150 vehículos del modelo Record y 120 vehículos del modelo Astrid. En la segunda guarda 80 Record y 140 Astrid. Finalmente, en la tercera nave almacena 250 Record y 125 Astrid. Además, el precio de los automóviles Record es de 6.520 €, mientras que cada Astrid vale 8.130 €. Toda esta información se recoge en las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 150 & 120 \\ 80 & 140 \\ 250 & 125 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 6.520 \\ 8.130 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

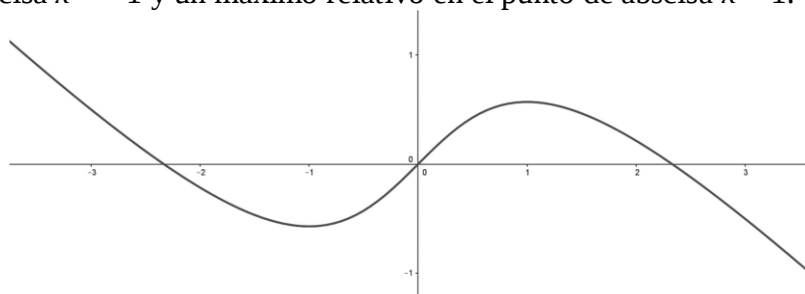
a) ¿Qué representa la matriz  $B \cdot A$ ? Calcúlela.

[1 punto]

b) ¿Qué representa la matriz  $B \cdot A \cdot P$ ? Calcúlela.

[1 punto]

6. A continuación se muestra el gráfico de una función  $f$  que presenta un mínimo relativo en el punto de abscisa  $x = -1$  y un máximo relativo en el punto de abscisa  $x = 1$ .



a) Sabiendo que  $f'(0) = 1$ , determine la ecuación de la recta tangente a  $f$  que pasa por el origen de coordenadas.

[1 punto]

b) Haga un esbozo del gráfico de la función  $f'$  con los datos de los que dispone.

[1 punto]

## SOLUCIONES

1. Sea la función  $f(x) = \frac{x^2 - 3x}{x^2 - 4}$ .

a) Indique justificadamente su dominio y determine los puntos donde el gráfico de  $f$  corta el eje de abscisas. [1 punto]

b) Estudie su crecimiento y haga un esbozo aproximado del gráfico de la función. [1 punto]

a) El dominio de la función son todos los números reales menos los que anulen el denominador.

$$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \sqrt{4} = \pm 2$$

El dominio de la función es  $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$ .

Hallamos los puntos de corte con el eje de abscisas.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = \frac{x^2 - 3x}{x^2 - 4} \\ \text{Eje } OX \rightarrow y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{x^2 - 3x}{x^2 - 4} = 0 \Rightarrow x^2 - 3x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 3) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \rightarrow A(0, 0) \\ x^2 - 3 = 0 \rightarrow x^2 = 3 \rightarrow x = \pm\sqrt{3} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} B(-\sqrt{3}, 0) \\ C(\sqrt{3}, 0) \end{array} \right. \end{array} \right.$$

La función tiene tres puntos de corte con el eje de abscisas:  $A(0, 0)$ ;  $B(-\sqrt{3}, 0)$  y  $C(\sqrt{3}, 0)$ .

b) Averiguamos cuando se anula la derivada.

$$f'(x) = \frac{(2x-3)(x^2-4) - (x^2-3x)2x}{(x^2-4)^2} = \frac{\cancel{2x^3} - 8x - 3x^2 + 12 - \cancel{2x^3} + 6x^2}{(x^2-4)^2} = \frac{3x^2 - 8x + 12}{(x^2-4)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{3x^2 - 8x + 12}{(x^2-4)^2} = 0 \Rightarrow 3x^2 - 8x + 12 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{8 \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 12}}{2 \cdot 3} = \frac{8 \pm \sqrt{-80}}{6} = \text{No existe}$$

La función no tiene puntos críticos.

Estudiamos el signo antes, entre y después de los puntos excluidos del dominio:  $x = -2$  y  $x = 2$ .

- En el intervalo  $(-\infty, -2)$  tomamos  $x = -3$  y la derivada vale

$$f'(-3) = \frac{3(-3)^2 - 8(-3) + 12}{((-3)^2 - 4)^2} = \frac{63}{25} > 0. \text{ La función crece en } (-\infty, -2).$$

- En el intervalo  $(-2, +2)$  tomamos  $x = 0$  y la derivada vale

$$f'(0) = \frac{3 \cdot 0^2 - 8 \cdot 0 + 12}{(0^2 - 4)^2} = \frac{12}{16} > 0. \text{ La función crece en } (-2, +2).$$

- En el intervalo  $(2, +\infty)$  tomamos  $x = 3$  y la derivada vale

$$f'(3) = \frac{3 \cdot 3^2 - 8 \cdot 3 + 12}{(3^2 - 4)^2} = \frac{15}{25} > 0. \text{ La función crece en } (2, +\infty).$$

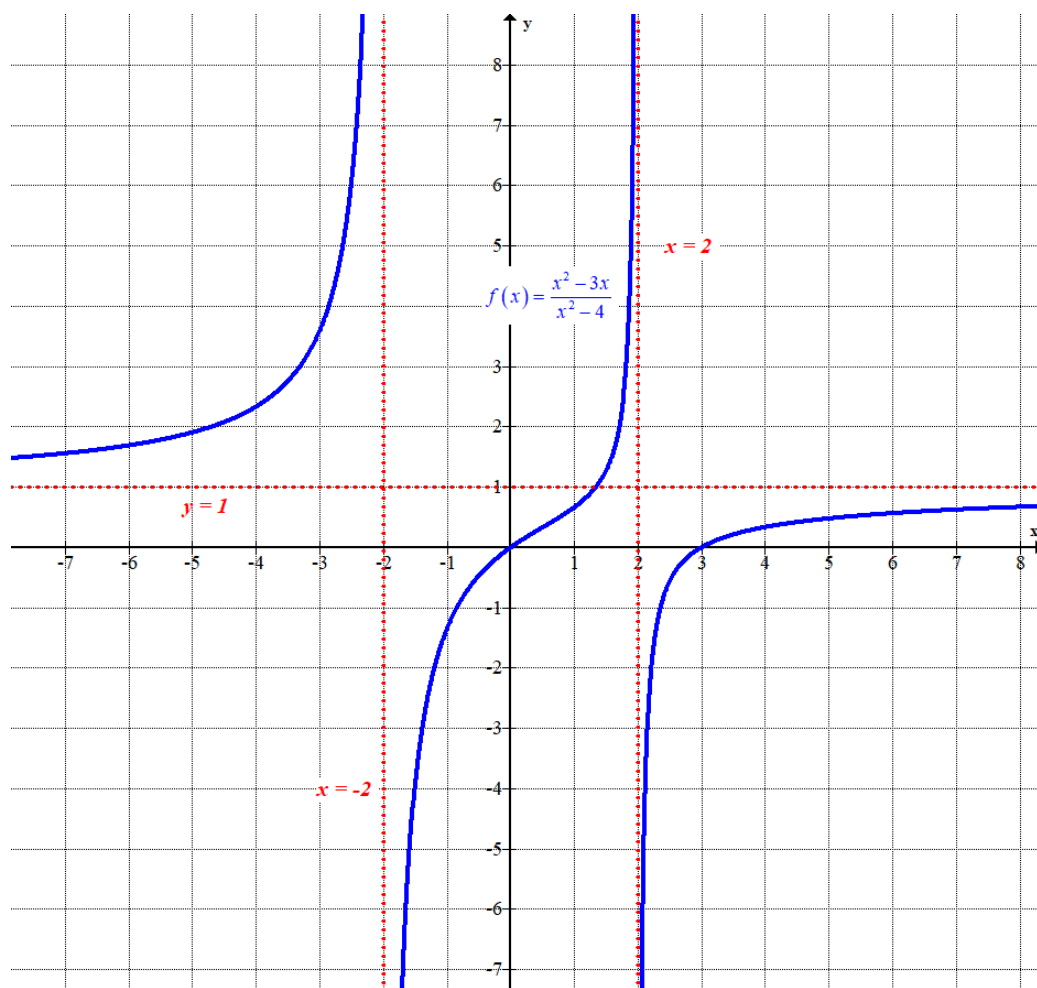
La función crece en todo su dominio  $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$ .

La función tiene dos asíntotas verticales:  $x = -2$  y  $x = 2$ .

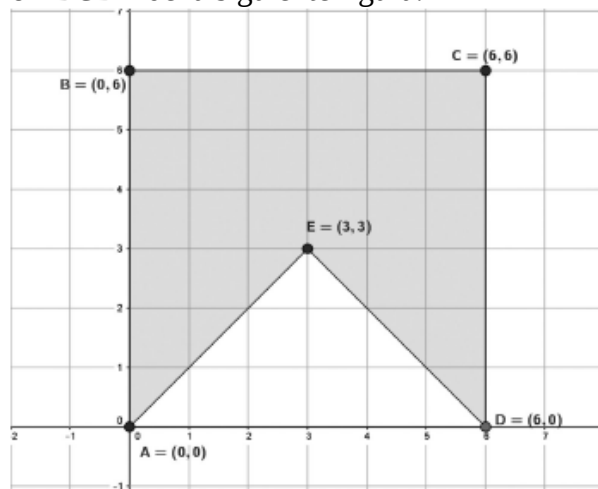
Como  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 3x}{x^2 - 4} = 1$ , la función tiene una asíntota horizontal:  $y = 1$ .

Hacemos una tabla de valores y representamos la gráfica de la función.

| $x$ | $f(x) = \frac{x^2 - 3x}{x^2 - 4}$ |
|-----|-----------------------------------|
| -3  | 3.6                               |
| -1  | -4/3                              |
| 0   | 0                                 |
| 1   | 2/3                               |
| 3   | 0                                 |



2. Considere el pentágono  $ABCDE$  de la siguiente figura:



- a) Justifique que la región sombreada no puede representarse por medio de un sistema de inecuaciones. [1 punto]
- b) Escriba el sistema de inecuaciones que determina los puntos de la frontera y del interior del triángulo AED. [1 punto]

a) Las rectas que delimitan la región sombreada son:

$$BC \rightarrow y = 6$$

$$AB \rightarrow x = 0$$

$$CD \rightarrow x = 6$$

$$AE \rightarrow \left. \begin{matrix} A(0,0) \\ E(3,3) \end{matrix} \right\} \rightarrow y = x$$

$$ED \rightarrow \left. \begin{matrix} E(3,3) \\ D(6,0) \\ y = mx + n \end{matrix} \right\} \rightarrow \left. \begin{matrix} 3 = 3m + n \\ 0 = 6m + n \end{matrix} \right\} \rightarrow \left. \begin{matrix} 3 = 3m + n \\ -6m = n \end{matrix} \right\} \rightarrow 3 = 3m - 6m \rightarrow 3m = -3 \rightarrow$$

$$\rightarrow m = -1 \rightarrow n = -6(-1) = 6 \rightarrow y = -x + 6$$

Considerando los puntos  $P(1, 2)$  y  $Q(5, 2)$  pertenecientes a la región sombreada, vemos que no cumplen las mismas inecuaciones.

$$P(1,2) \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} y \leq 6 \\ x \geq 0 \\ x \leq 6 \\ y \geq x \\ y \leq -x + 6 \end{array} \right.$$

$$Q(5,2) \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} y \leq 6 \\ x \geq 0 \\ x \leq 6 \\ y \leq x \\ y \geq -x + 6 \end{array} \right.$$

Los puntos P y Q difieren en dos de las inecuaciones. La región sombreada no puede representarse por medio de un sistema de inecuaciones.

- b) El triángulo AED contiene a los puntos del plano con la segunda coordenada positiva y que están por debajo de las rectas AE y ED.

$$\text{Los puntos del triángulo AED cumplen el sistema de inecuaciones: } \left. \begin{array}{l} y \geq 0 \\ y \leq x \\ y \leq -x + 6 \end{array} \right\}.$$

3. Sea  $y = f(x)$  una parábola que tiene el vértice en el punto  $V = (0, -4)$  y corta el eje de abscisas en los puntos  $(-2, 0)$  y  $(2, 0)$ .

a) Determine su ecuación. [1 punto]

b) Sea una función  $g$  tal que  $g'(x) = f(x)$ . Estudie el crecimiento de la función  $g$ , determine las abscisas de sus extremos relativos y clasifíquelos. [1 punto]

a) La parábola tiene ecuación  $f(x) = ax^2 + bx + c$ . Determinamos los valores de  $a$ ,  $b$  y  $c$  para que cumpla lo pedido en el ejercicio.

La parábola que tiene el vértice en el punto  $V = (0, -4)$  cumple que la derivada se anula para  $x = 0 \rightarrow f'(0) = 0$ .

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = 2ax + b \\ f'(0) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 0 = 2a(0) + b \Rightarrow \boxed{b = 0}$$

La función queda  $f(x) = ax^2 + c$ .

También se cumple que la función pasa por el punto  $(0, -4) \rightarrow f(0) = -4$ .

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = ax^2 + c \\ f(0) = -4 \end{array} \right\} \Rightarrow -4 = a \cdot 0^2 + c \Rightarrow \boxed{c = -4}$$

La función queda  $f(x) = ax^2 - 4$ .

También se cumple que la función pasa por el punto  $(-2, 0) \rightarrow f(-2) = 0$ .

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = ax^2 - 4 \\ f(-2) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 0 = a \cdot (-2)^2 - 4 \Rightarrow 4 = 4a \Rightarrow \boxed{a = 1}$$

La parábola tiene ecuación:  $f(x) = x^2 - 4$ .

b) Nos dicen que  $g'(x) = x^2 - 4$ . Averiguamos cuando se anula la derivada de la función  $g$ .

$$\left. \begin{array}{l} g'(x) = x^2 - 4 \\ g'(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow \boxed{x = \sqrt{4} = \pm 2}$$

La función  $g$  tiene dos puntos críticos:  $x = -2$  y  $x = 2$ .

Estudiamos el signo antes, entre y después de estos dos valores.

- En el intervalo  $(-\infty, -2)$  consideramos  $x = -3$  y la derivada vale

$$g'(-3) = (-3)^2 - 4 = 5 > 0. \text{ La función crece en } (-\infty, -2).$$

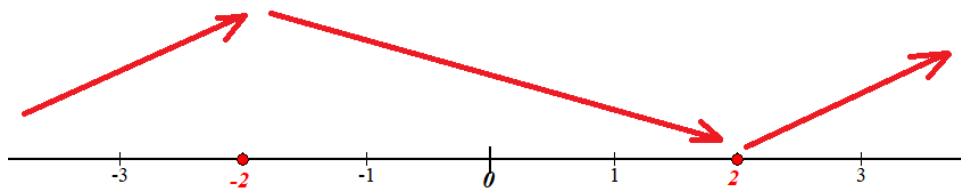
- En el intervalo  $(-2, +2)$  consideramos  $x = 0$  y la derivada vale

$$g'(0) = 0^2 - 4 = -4 < 0. \text{ La función decrece en } (-2, +2).$$

- En el intervalo  $(2, +\infty)$  consideramos  $x = 3$  y la derivada vale  $g'(3) = 3^2 - 4 = 5 > 0$ .

La función crece en  $(2, +\infty)$ .

La función sigue el esquema siguiente.



La función es creciente en  $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$  y decreciente en  $(-2, 2)$ .

Observando el esquema podemos decir que la función presenta un máximo relativo en  $x = -2$  y un mínimo relativo en  $x = 2$ .

4. Considere el sistema de ecuaciones 
$$\left. \begin{array}{l} 2x - y - 1 = 0 \\ -x - y + 2 = 0 \end{array} \right\}.$$

Justifique si las siguientes afirmaciones son ciertas:

**a)** Este sistema de ecuaciones representa dos rectas paralelas porque ambas tienen pendiente  $-1$ .

[1 punto]

**b)** Este sistema es compatible determinado y su solución es  $x = 1, y = 1$ .

[1 punto]

a) Obtenemos la pendiente de cada una de las rectas que representan las dos ecuaciones del sistema.

$$\left. \begin{array}{l} 2x - y - 1 = 0 \\ -x - y + 2 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2x - 1 = y \rightarrow \boxed{m = 2} \\ -x + 2 = y \rightarrow \boxed{m' = -1} \end{array} \right.$$

No es cierta la afirmación pues la primera ecuación representa una recta de pendiente 2.

b) Al tener las dos rectas distinta pendiente deben cortarse en un punto, lo que implica que el sistema es compatible determinado (una única solución). Compruebo si el punto de corte de las rectas es el punto  $(1, 1)$ . Sustituimos en el sistema y vemos si se cumplen las dos ecuaciones que lo componen.

$$\left. \begin{array}{l} ¿2 \cdot 1 - 1 - 1 = 0? \\ ¿-1 - 1 + 2 = 0? \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} ¿2 - 1 - 1 = 0? \\ ¿-1 - 1 + 2 = 0? \end{array} \right\}$$

Se cumplen ambas igualdades y la afirmación es cierta: el sistema es compatible determinado y la solución es  $x = 1, y = 1$ .

5. Un fabricante de automóviles produce los modelos Record y Astrid. Guarda la producción en tres naves. En la primera nave tiene 150 vehículos del modelo Record y 120 vehículos del modelo Astrid. En la segunda guarda 80 Record y 140 Astrid. Finalmente, en la tercera nave almacena 250 Record y 125 Astrid. Además, el precio de los automóviles Record es de 6.520 €, mientras que cada Astrid vale 8.130 €. Toda esta información se recoge en las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 150 & 120 \\ 80 & 140 \\ 250 & 125 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 6.520 \\ 8.130 \end{pmatrix} \text{ y } B = (1 \quad 1 \quad 1)$$

a) ¿Qué representa la matriz  $B \cdot A$ ? Calcúlela.

[1 punto]

b) ¿Qué representa la matriz  $B \cdot A \cdot P$ ? Calcúlela.

[1 punto]

a) Calculamos  $B \cdot A$ .

$$B \cdot A = (1 \quad 1 \quad 1) \begin{pmatrix} 150 & 120 \\ 80 & 140 \\ 250 & 125 \end{pmatrix} = (150 + 80 + 250 \quad 120 + 140 + 125) = (480 \quad 385)$$

$$1 \times 3 \quad \boxed{\phantom{000}} \cdot 3 \times 2 \longrightarrow 1 \times 2$$

La matriz resultante de  $B \cdot A$  nos da el número de coches modelo Record y Astrid que hay guardados en total en las tres naves.

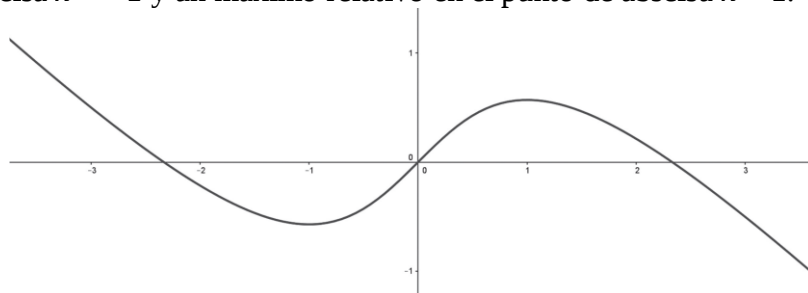
b) Calculamos  $B \cdot A \cdot P$ .

$$B \cdot A \cdot P = (1 \quad 1 \quad 1) \begin{pmatrix} 150 & 120 \\ 80 & 140 \\ 250 & 125 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6.520 \\ 8.130 \end{pmatrix} = (480 \quad 385) \begin{pmatrix} 6.520 \\ 8.130 \end{pmatrix} = (480 \cdot 6.520 + 385 \cdot 8.130)$$

$$1 \times \boxed{2} \cdot 2 \times 1 \longrightarrow 1 \times 1$$

La matriz resultante de  $B \cdot A \cdot P$  nos da el valor total de los coches guardados en las tres naves:  $480 \cdot 6.520 + 385 \cdot 8.130 = 6.259.650$  euros.

6. A continuación se muestra el gráfico de una función  $f$  que presenta un mínimo relativo en el punto de abscisa  $x = -1$  y un máximo relativo en el punto de abscisa  $x = 1$ .

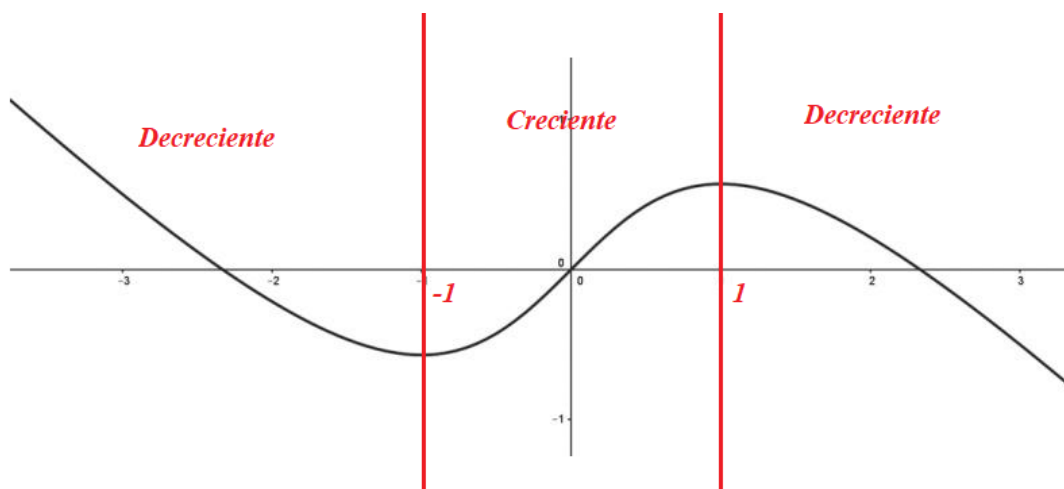


- a) Sabiendo que  $f'(0) = 1$ , determine la ecuación de la recta tangente a  $f$  que pasa por el origen de coordenadas. [1 punto]  
 b) Haga un esbozo del gráfico de la función  $f'$  con los datos de los que dispone. [1 punto]

- a) Mirando la gráfica de la función sabemos que  $f(0) = 0$  y en el enunciado del problema nos dicen que  $f'(0) = 1$ . Hallamos la ecuación de la recta tangente a  $f$  en  $x = 0$ .

$$\left. \begin{array}{l} f(0) = 0 \\ f'(0) = 1 \\ y - f(0) = f'(0)(x - 0) \end{array} \right\} \Rightarrow y - 0 = 1(x - 0) \Rightarrow \boxed{y = x}$$

- b) Dividimos la recta real en tres partes según la función crece o decrece.



En el intervalo  $(-\infty, -1)$  la función decrece y la derivada es negativa llegando a ser cero en  $x = -1$ , pues hay un mínimo de la función ( $f''(-1) > 0$ ).

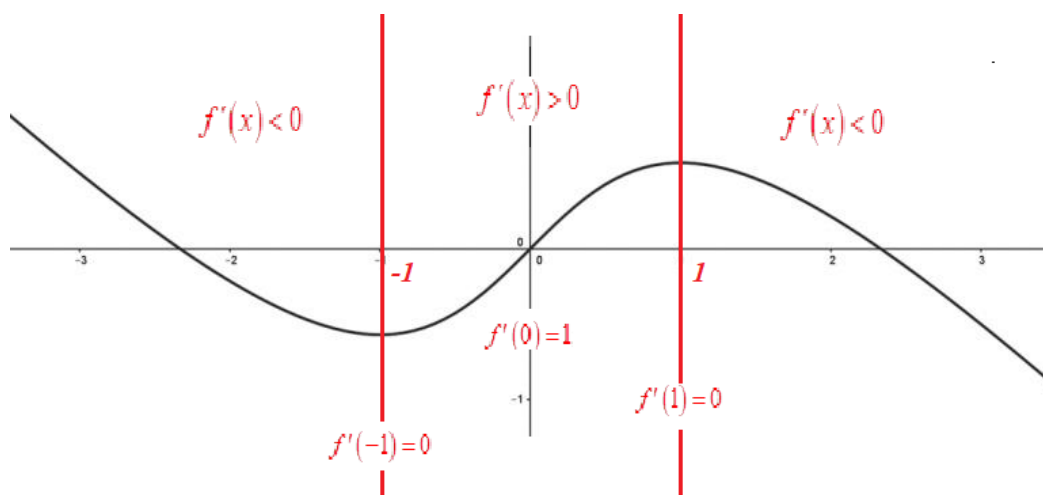
En el intervalo  $(-1, 1)$  la función crece y la derivada es positiva llegando a ser cero en  $x = 1$ , pues hay un máximo de la función ( $f''(1) < 0$ ).

En el intervalo  $(1, +\infty)$  la función decrece y la derivada es negativa.

Tenemos un punto de inflexión en  $x = 0$ , por lo que la derivada segunda vale cero. La derivada tiene un punto crítico en  $x = 0$ .

Solo tenemos tres puntos de la gráfica:  $f'(-1) = 0$ ,  $f'(0) = 1$ ;  $f'(1) = 0$ .

La derivada es creciente en  $x = -1$ , en  $x = 0$  tiene un punto crítico y es decreciente en  $x = 1$ .



Hacemos un esbozo de la gráfica de la derivada.

