

SÈRIE 1

1. Considereu les matrius M de la forma $M = \begin{pmatrix} 2 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$ en què a és un nombre real.
- Determineu a de manera que $M^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2a \\ -2a & -1 \end{pmatrix}$. [1 punt]
 - Determineu a de manera que $M^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, en què M^{-1} representa la matriu inversa de M . És a dir, $M \cdot M^{-1} = I$, en què I és la matriu identitat d'ordre 2. [1 punt]
- a) Comencem calculant M^2 : $M^2 = \begin{pmatrix} 2 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 - a^2 & 2a \\ -2a & -a^2 \end{pmatrix}$. Sabem que $\begin{pmatrix} 4 - a^2 & 2a \\ -2a & -a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2a \\ -2a & -1 \end{pmatrix}$. Obtenim, per tant, que cal que es compleixi que $4 - a^2 = 3$ i que $-a^2 = -1$. En ambdós casos tenim que $a^2 = 1$, que té per solucions $a = 1$ i $a = -1$.
- b) Sabem que $M \cdot M^{-1} = I$. Però com que sabem la forma que ha de tenir M^{-1} , tenim que $M \cdot M^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & 2 + 2a \\ 0 & -a \end{pmatrix}$. I imposant que aquesta darrera matriu ha de ser igual a la matriu identitat, tenim que $-a = 1$, és a dir, que $a = -1$, i que $2 + 2a = 0$, que també es compleix quan $a = -1$. Per tant, l'única solució és $a = -1$.
- Alternativament es pot calcular la matriu inversa M^{-1} i igualar a la forma que ha de tenir segons l'enunciat del problema.

Criteris de correcció: a) Càlcul de M^2 : 0,5 p. Plantejament de la igualtat matricial: 0,25 p. Obtenció dels dos possibles valors de a : 0,25 p. b) Plantejament del problema: 0,5 p. Obtenció del valor de a : 0,5 p.

2. Considereu la funció $f(x) = \frac{x^2}{x-a}$, en què a és un paràmetre real.
- Trobeu per a quins valors del paràmetre a la recta tangent a la funció f en $x = 1$ és paral·lela a $y + 3x + 5 = 0$. [1 punt]
 - Per al valor del paràmetre $a = 1$, trobeu els intervals de creixement i decreixement i els punts on s'assoleixen els màxims i mínims relatius de la funció f . [1 punt]

- a. Com que la derivada és el pendent de la recta tangent, hem d'imposar la condició $f'(1) = -3$. La derivada de la funció donada f és

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2ax}{(x-a)^2}$$

Per tant, hem de resoldre l'equació

$$\frac{1 - 2a}{(1-a)^2} = -3$$

o equivalentment $3a^2 - 8a + 4 = 0$, que dona com a solucions $a = 2$ i $a = \frac{2}{3}$.

- b. Hem d'estudiar la funció $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$ que té domini $\mathbb{R} - \{1\}$. La derivada és

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$$

i s'anul·la en $x = 0$ i $x = 2$.

Estudiant els signes de la derivada obtenim:

$(-\infty, 0)$	$(0, 1)$	$(1, 2)$	$(2, \infty)$
$f' > 0$	$f' < 0$	$f' < 0$	$f' > 0$
f creixent	f decreixent	f decreixent	f creixent

Es dedueix que la funció f té un màxim relatiu al punt $(0, f(0)) = (0, 0)$ i un mínim relatiu al punt $(2, f(2)) = (2, 4)$.

Criteris de correcció: a) Plantejament del problema: 0,25 p. Càlcul de la derivada: 0,5 p. Obtenció dels punts: 0,25 p. b) Obtenció dels intervals de creixement i decreixement: 0,5 p. Obtenció i justificació dels extrems relatius: 0,5 p.

3. En Pol va quedar ahir amb uns amics en un bar i van prendre 4 refrescos, 3 entrepans i 5 boles de gelat. Tot plegat els va costar 19,50€. Dies enrere, havia anat al mateix bar amb el seu cosí Martí i per 2 refrescos, 1 entrepà i 2 boles de gelat havien pagat 8,10€. En aquest bar tots els refrescos valen el mateix, tots els entrepans tenen el mateix preu i les boles de gelat es venen també a preu únic.
- Avui en Pol hi ha tornat amb uns altres amics i han pres 6 refrescos, 5 entrepans i 8 boles de gelat. Expliqueu raonadament quant han pagat en total. [1 punt]
 - Si 1 refrec, 1 entrepà i 1 bola de gelat costen 5,10€, quant val el refrec, l'entrepà i la bola de gelat separatament? [1 punt]
- a) Si anomenem x , y i z respectivament el preu d'un refrec, d'un entrepà i d'una bola de gelat sabem que es compleixen les dues equacions següents:

$$\begin{cases} 4x + 3y + 5z = 19,50 \\ 2x + y + 2z = 8,10 \end{cases}$$

Ara necessitem calcular el valor de $6x + 5y + 8z$, però observem que podem descompondre $6x + 5y + 8z$ en

$$2 \cdot (4x + 3y + 5z) - 1 \cdot (2x + y + 2z) = 6x + 5y + 8z$$

Per tant, el preu serà $2 \cdot 19,50 - 1 \cdot 8,10 = 30,90$ €.

Una altra opció és buscar la solució del sistema $\begin{cases} 4x + 3y + 5z = 19,50 \\ 2x + y + 2z = 8,10 \end{cases}$, que és un sistema compatible indeterminat amb solució:

$$\begin{cases} x = 2,40 - \frac{t}{2} \\ y = 3,30 - t \\ z = t \end{cases} \text{ i, per tant, } 6x + 5y + 8z = 6 \cdot \left(2,40 - \frac{t}{2}\right) + 5 \cdot (3,30 - t) + 8t = 14,40 - 3t + 16,50 - 5t + 8t = 30,90\text{€}.$$

- b) En aquest cas, tenim el sistema de tres equacions amb tres incògnites:

$$\begin{cases} x + y + z = 5,10 \\ 4x + 3y + 5z = 19,50 \\ 2x + y + 2z = 8,10 \end{cases} \text{ que, si el resollem, per exemple, pel mètode de Gauss}$$

obtenim $x = 1,80\text{€}$, $y = 2,10\text{€}$ i $z = 1,20\text{€}$.

Criteris de correcció: a) Plantejament del sistema: 0,25 p. Obtenció de la solució per qualsevol dels mètodes possibles: 0,75 p. b) Plantejament del sistema: 0,25 p. Obtenció de la solució: 0,75 p.

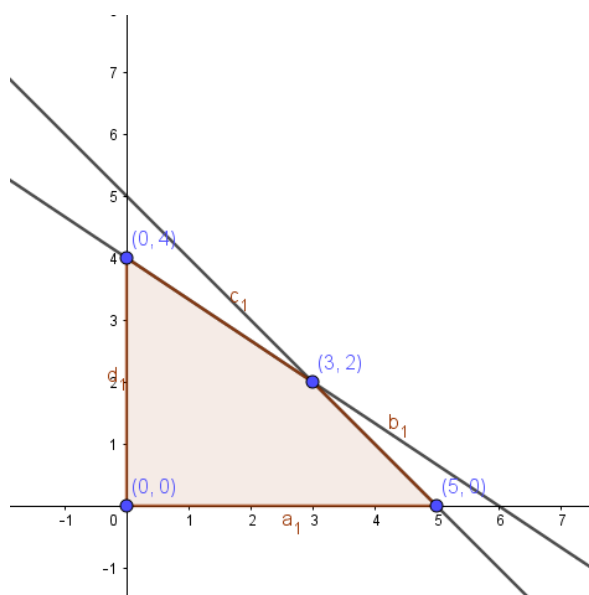
4. Una empresa de materials per a cotxes fabrica dos models d'una peça determinada, que anomenarem A i B. Cada model es fabrica en una hora, mitjançant un procés que consta de dues fases. En la primera fase del procés s'hi destinen 5 treballadors, i en la segona, 12. Per a fabricar cada model, en la primera fase es necessita un treballador per a cada peça. En canvi, en la segona fase es necessiten dos treballadors per al model A i 3 treballadors per al model B. El benefici que s'obté és de 40€ pel model A i 50€ pel model B.

- Determineu la funció objectiu i les restriccions, i dibuixeu la regió factible. [1,25 punts]
- Quantes peces de cada model per hora s'hauran de fabricar per tal que el benefici sigui màxim? Quin és aquest benefici màxim? [0,75 punts]

- a) Anomenem x la quantitat de peces del model A i y la quantitat de peces del model B.

L'enunciat del problema ens condueix a les restriccions següents:

$$\begin{cases} x + y \leq 5 \\ 2x + 3y \leq 12 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$



Els beneficis venen donats per la següent funció objectiu: $B(x, y) = 40x + 50y$.

b) Si avaluem la funció objectiu en els quatre vèrtexs obtenim:

$$B(0,0) = 0\text{€},$$

$$B(5,0) = 200\text{€},$$

$$B(0,4) = 200\text{€} \text{ i}$$

$$B(3,2) = 220\text{€}.$$

Per tant, la funció objectiu assoleix en la regió factible el seu valor màxim en el punt (3,2) i aquest màxim pren el valor 220€. Així doncs, per a maximitzar els beneficis cal fabricar 3 peces del model A i 2 peces del model B. Amb aquesta fabricació l'empresa aconseguirà 220 euros de beneficis.

Criteris de correcció: Obtenció de les restriccions: 0,5 p. Obtenció de la funció objectiu: 0,25 p. Obtenció dels vèrtexs i dibuix de la regió factible: 0,5 p. Obtenció del punt pel qual s'assoleix el màxim: 0,5 p. Obtenció del benefici màxim: 0,25 p.

-
5. Una companyia de mòbils va presentar fa un any un telèfon intel·ligent al preu de 750€. Recentment, un estudi de mercat ha arribat a la conclusió que, amb aquest preu, compren el telèfon 2.000 clients al mes, i que la relació entre aquestes dues variables és lineal, de manera que per cada 10 euros que s'incrementa el preu del mòbil, el compren 100 clients menys, i a l'inrevés: per cada 10 euros de descompte sobre el preu inicial de 750 euros, el compren 100 clients més.
- Deduïu que la funció que determina els ingressos mensuals de la companyia segons el preu del mòbil és $I(p) = -10p^2 + 9500p$. [1 punt]
 - Trobeu quin ha de ser el preu del mòbil per a obtenir ingressos, el preu del mòbil que dona els ingressos mensuals més elevats i el valor d'aquests ingressos màxims. [1 punt]
- a) El preu del mòbil serà $p = 750 + 10x$, en què x és el nombre de vegades que s'augmenta el preu de l'abonament en 10 euros. El nombre de mòbils que es vendran al mes serà $N = 2000 - 100x$.
- L'ingrés mensual I vindrà donat pel preu del mòbil p multiplicat pel nombre de mòbils que es venguin N , és a dir, $I = p \cdot N$. Si volem posar la funció d'ingrés en funció del preu del mòbil, caldrà aïllar la x en funció del preu p ($p = 750 + 10x \rightarrow x = \frac{p-750}{10}$), llavors el nombre de mòbils en funció del preu p serà: $N = 2000 - 100\left(\frac{p-750}{10}\right) \rightarrow N = -10p + 9500$. Així que la funció d'ingressos serà: $I(p) = p \cdot (-10p + 9500)$.
- Obtenim, per tant, la paràbola $I(p) = -10p^2 + 9500p$.
- b) Perquè hi hagi ingressos cal que $I(p) > 0 \rightarrow -10p^2 + 9500p > 0 \rightarrow p \cdot (-10p + 9500) > 0$. Per tant, o bé $p > 0$ i $-10p + 9500 > 0$, d'on obtenim $0\text{€} < p < 950\text{€}$, o bé caldria que $p < 0$ i que $(-10p + 9500) < 0$, que no té sentit per la naturalesa del problema.

Per trobar el màxim ingrés derivem: $I'(p) = -20p + 9500$, i igulem a zero: $I'(p) = 0 \rightarrow p = 475$ €. Comprovem que correspon als ingressos màxims ja que $I'(p) > 0$, per a $p < 475$ i $I'(p) < 0$, per a $p > 475$. Finalment, per calcular el valor d'aquests ingressos màxims, només cal calcular el valor de la funció Ingrés per a $p = 475 \rightarrow I(475) = 475 \cdot (-10 \cdot 475 + 9500) = 475 \cdot 4750 = 2.256.250$ €

També es pot resoldre tenint en compte que la gràfica de la funció d'ingrés és una paràbola i obtenint-ne el màxim.

Criteris de correcció: a) Plantejament del problema: 0,25 p. Obtenció de la funció d'ingressos: 0,75 p. b) Obtenció de l'interval de valors perquè hi hagi ingressos: 0,5 p. Obtenció del preu pel qual s'obté el màxim: 0,25 p. Justificació que es tracta d'un màxim i obtenció dels beneficis màxims: 0,25 p.

6. El nombre d'individus, en milions, d'una població ve determinat per la funció $P(t) = \frac{5+t^2}{(t+1)^2}$, en què t mesura el nombre d'anys transcorreguts.

- a. Quina és la població inicial i la població després de 9 anys? A partir de quin moment la població serà inferior a un milió d'individus? [1 punt]
- b. Amb el pas dels anys, cap a quin valor tendirà el nombre d'individus de la població? [1 punt]

a) Ens demanen que calculem la població inicial $P(0) = 5$ milions d'habitants i la població al cap de 9 anys, $P(9) = 0,86$ milions d'habitants.

Hem de trobar també a partir de quin instant la població serà inferior a un milió d'habitants, és a dir, per a quin valor de t es compleix $\frac{5+t^2}{(t+1)^2} < 1$. Aïllant obtenim $t > 2$, és a dir, a partir del segon any la població serà inferior a un milió d'habitants.

- b) Hem de calcular el límit quan el temps tendeix a infinit. Tenim que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{5+t^2}{(t+1)^2} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^2+5}{t^2+2t+1} = 1$$

Per tant, la grandària de la població a llarg termini tendirà a un milió d'habitants.

Criteris de correcció: a) Càlcul de la població inicial: 0,25 p. Càlcul de la població al cap de 9 anys: 0,25 p. Càlcul de l'instant en què la població passa a ser inferior a un milió d'habitants: 0,5 p. b) Plantejament que cal calcular el límit: 0,25 p. Càlcul del límit: 0,75 p.