SÈRIE 3

---

1. Considereu la funció

$$f(x)=\begin{cases}2x+3 & si\ x\leq -1\\ ax+b & si\ -1<x<2\\ x^2 & si\ x\geq 2\end{cases}$$

Trobeu el valor de a i b perquè la funció sigui contínua per a tots els nombres reals.
[2 punts]

La funció f és contínua en $(-\infty,-1)\cup(-1,2)\cup(2,+\infty)$ independentment del valor de a i b, ja que es tracta d'una funció polinòmica en cadascun dels intervals. Per tant, caldrà imposar que la funció sigui contínua en els punts d'abscissa $x=-1$ i $x=2$.
Per a $x=-1$ tenim que $f(-1)=2(-1)+3=1$. També,

$$\lim_{x\to -1-}(2x+3)=1$$

i, finalment,

$$\lim_{x\to -1+}(ax+b)=-a+b$$

Per tant, $f(x)$ serà contínua en $x=-1$ si $-a+b=1$.

D'altra banda, per a $x=2$ tenim que $f(2)=2^2=4$. D'una banda,

$$\lim_{x\to 2-}(ax+b)=2a+b$$

i, finalment també,

$$\lim_{x\to 2+}(x^2)=2^2=4.$$

Per tant, $f(x)$ serà contínua en $x=2$ si $2a+b=4$.

Així doncs, la funció serà contínua en tots els reals si i només si es verifiquen simultàniament les dues condicions trobades, és a dir, si a i b són la solució del sistema següent:

$$\begin{cases}-a+b=1\\ 2a+b=4\end{cases}$$

Resolem el sistema i trobem que cal que $a=1$ i $b=2$.

Criteris de correcció: Plantejament del problema: 0,5 p. Càlcul dels límits: 1 p. Resultat final: 0,5 p.

2. En acabar un curs de pintura, els alumnes reben com a obsequi un estoig amb retoladors i colors. Es regalen dos tipus d'estoigs: els vermells, que contenen 1 retolador i 2 colors i costen 9 €, i els verds, que porten 3 retoladors i 1 color i costen 15 €. L'escola disposa de 200 retoladors i 100 colors per a omplir els estoigs. Necessita preparar almenys 40 estoigs i que el nombre d'estoigs vermells no superi el nombre d'estoigs verds. Amb aquestes dades, l'escola vol calcular el preu que haurà de pagar per aquests obsequis.

***a*)** Determineu la funció objectiu i les restriccions, i dibuixeu la regió de les possibles opcions de l'escola.
[1,25 punts]

***b*)** Calculeu quants estoigs de cada tipus cal preparar perquè la despesa sigui mínima i digueu quina és aquesta despesa mínima.
[0,75 punts]

a) Les dades del problema són:

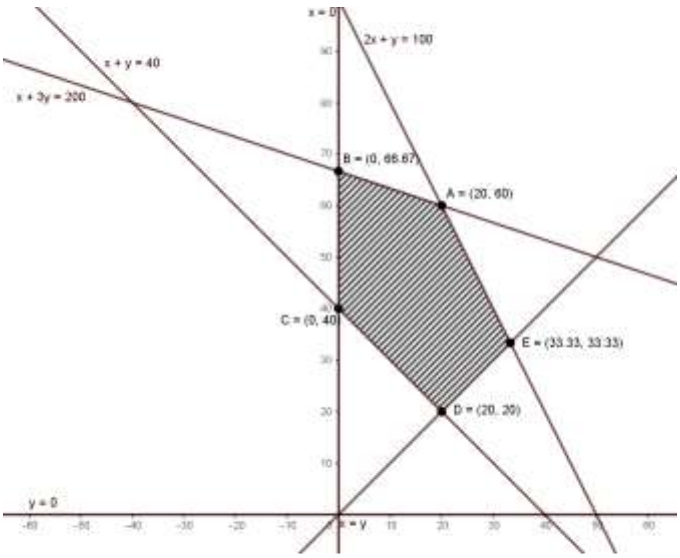
	Retoladors	Colors	Preu
x = nombre d'estoigs vermells	1	2	9
y = nombre d'estoigs verds	3	1	15
Total	$x+3y$	$2x+y$	$9x+15\,y$

Les restriccions venen donades per

$$\begin{cases} x+y \geq 40 \\ x \leq y \\ x+3y \leq 200 \\ 2x+y \leq 100 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

La funció objectiu ve donada per l'expressió: Despesa (x, y) = $9x+15y$.

I la regió factible és:



b) Tenim quatre vèrtexs i sabem que la despesa mínima s'assoleix en un dels vèrtexs de la regió factible. Calculem en quin:

A = (20, 60), despesa (A) = 1.080 €
B = $(0, \frac{200}{3})$, despesa (B) = 1.000 €
C = (0, 40), despesa (C) = 600 €
D = (20, 20), despesa (D) = 480 €
E = $(\frac{100}{3}, \frac{100}{3})$, despesa (E) = 800 €

Per tant, la despesa mínima possible és de 480 € i correspon a fer 20 estoigs vermells i 20 de verds.

Criteris de correcció: a) Càlcul de les restriccions: 0,5 p. Dibuix de la regió factible: 0,5 p. Obtenció de la funció objectiu: 0,25 p. b) Obtenció dels vèrtexs: 0,25 p. Obtenció del punt en què s'assoleix el mínim: 0,25 p. Obtenció de la despesa mínima: 0,25 p.

---

3. Un inversor ha obtingut un benefici de 1.500 € després d'invertir un total de 40.000 € en tres empreses diferents. Aquests beneficis es desglossen de la manera següent: la quantitat invertida en l'empresa A li ha reportat un 2 % de beneficis, la quantitat invertida en l'empresa B, un 5 %, i la quantitat invertida en l'empresa C, un 7 %. Els diners invertits en l'empresa B han estat els mateixos que en les altres dues empreses juntes. Quina va ser la quantitat invertida en cada una de les tres empreses?
[2 punts]

Anomenem x la quantitat invertida en l'empresa A, y la quantitat invertida en l'empresa B i z la quantitat invertida en l'empresa C. A partir de les condicions de l'enunciat, obtenim el següent sistema d'equacions:

$$\begin{cases} x + y + z = 40.000 \\ x + z = y \\ 0{,}02x + 0{,}05y + 0{,}07z = 1.500 \end{cases}$$

Que és equivalent al sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = 40.000 \\ x - y + z = 0 \\ 2x + 5y + 7z = 150.000 \end{cases}$$

El resolem mitjançant el mètode de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 40.000 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 7 & 150.000 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 40.000 \\ 0 & -2 & 0 & -40.000 \\ 0 & 3 & 5 & 70.000 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 40.000 \\ 0 & 1 & 0 & 20.000 \\ 0 & 0 & 5 & 10.000 \end{array}\right).$$

A partir d'aquí, obtenim que $z = 2.000$ €, $y = 20.000$ € i $x = 18.000$ €.

Criteris de correcció: Plantejament del sistema: 0,5 p. Resolució del sistema: 1 p. Obtenció de la solució final: 0,5 p.

4. La despesa mensual en tabac d'un fumador ve determinada pel seu salari mitjançant la funció $f(x)=\dfrac{400x}{x^2+4}$, en què x representa el salari en milers d'euros i $f(x)$ la despesa mensual en tabac en euros.

***a*)** Determineu el salari per al qual la despesa en tabac és màxima. A quant ascendeix aquesta despesa?
[1 punt]

***b*)** Per a quins salaris la despesa mensual és inferior a 60 €?
[1 punt]

a) Comencem fent la derivada de $f(x)$. Obtenim $f'(x)=\frac{-400x^2+1600}{(x^2+4)^2}$. Igualem a 0 la primera derivada per trobar els punts crítics i ens dona un salari de $x=2$ (milers d'euros) i $x=-2$, que, pel context del problema, no té sentit. Per justificar que en $x=2$ tenim un màxim, prenem un punt entre -2 i 2, per exemple $x=0$ i veiem que la derivada és positiva, per tant, la funció és creixent. Mentre que per a punts més grans que 2, per exemple $x=3$, la derivada és negativa, és a dir, la funció és decreixent. Per tant, en $x=2$ hi ha un màxim. La despesa màxima serà de $f(2)=100$ euros.

b) Hem de resoldre la inequació $f(x)<60$, és a dir, $\frac{400x}{x^2+4}<60$, que és equivalent a $400x<60x^2+240$, o bé, dividint cada terme per 20,

$$0<3x^2-20x+12$$

Si trobem les arrels de la paràbola $y=3x^2-20x+12$, obtenim $x=\frac{2}{3}$ i $x=6$. Aquesta paràbola és negativa a l'interval $(\frac{2}{3},6)$ i és positiva als intervals que són la solució d'aquest apartat: $(0,\frac{2}{3})\cup(6,+\infty)$. Hem tingut en compte que, pel context del problema, $x\geq 0$. Per tant, la despesa mensual en tabac és inferior a 60 € si el salari és inferior a 666,67 € o si és superior a 6.000 €.

Criteris de correcció: a) Càlcul de la derivada: 0,25 p. Obtenció del punt on s'obté el màxim: 0,25 p. Justificació del fet que es tracta d'un màxim: 0,25 p. Càlcul de la despesa màxima: 0,25 p. b) Plantejament de la inequació: 0,25 p. Resolució de l'equació de segon grau: 0,25 p. Obtenció de l'interval que és solució: 0,5 p.

5. Resoleu les preguntes següents:

a) Trobeu les matrius ***A*** i ***B*** que compleixen que $A-2B=\begin{pmatrix}1 & 13\\ 0 & -5\end{pmatrix}$ i $2A+3B=\begin{pmatrix}2 & -9\\ 7 & 4\end{pmatrix}$.

[1 punt]

b) Determineu el valor de a, b, c i d perquè es verifiqui que $\begin{pmatrix}1 & 2\\ a & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & c\\ 2 & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b & -5\\ d & -7\end{pmatrix}$.

[1 punt]

a) Observem que $2(A-2B)-(2A+3B)=-7B$. Per tant,

$$-7B=2\begin{pmatrix}1 & 13\\ 0 & -5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & -9\\ 7 & 4\end{pmatrix}.$$

D'aquí obtenim que $B=\begin{pmatrix}0 & -5\\ 1 & 2\end{pmatrix}$. I, d'altra banda, $A=2B+\begin{pmatrix}1 & 13\\ 0 & -5\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}0 & -5\\ 1 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 13\\ 0 & -5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & -1\end{pmatrix}$.

b) Calculem el producte de matrius $\begin{pmatrix}1 & 2\\ a & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & c\\ 2 & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & c-8\\ 2 & ac-4\end{pmatrix}$. Per tant, tenim que $\begin{pmatrix}4 & c-8\\ 2 & ac-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b & -5\\ d & -7\end{pmatrix}$. D'aquí obtenim que $b=4$, $c-8=-5$, és a dir, $c=3$, $d=2$ i $ac-4=-7$, per tant, $3a=-3$, és a dir, $a=-1$.

Criteris de correcció: a) Càlcul de la matriu A: 0,5 p. Càlcul de la matriu B: 0,5 p. b) Càlcul del producte de matrius: 0,5 p. Obtenció del valor dels quatre paràmetres: 0,5 p.

6. Sabem que la funció $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+1}$ passa pel punt $(2,-5)$ i que les rectes $x=1$ i $y=2$ en són les asímptotes vertical i horitzontal, respectivament. Calculeu *a*, *b* i *c*.

[2 punts]

Com que es tracta d'una funció racional, l'asímptota vertical la tindrà en el punt que anul·la el denominador; és a dir, cal que $cx+1=0$ per a $x=1$, per tant, $c=-1$.

Observem que el $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\frac{a}{c}$ i també $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\frac{a}{c}$. Per tant, tenim que $\frac{a}{c}=2$ (l'asímptota horitzontal). Per tant, $a=2c=-2$.

Finalment, sabem que passa pel punt $(2,-5)$, per tant, $f(2)=-5$, és a dir, $\frac{2a+b}{2c+1}=-5$, i deduïm que $b=9$.

Criteris de correcció: Plantejament del punt on hi ha l'asímptota vertical i obtenció del paràmetre c: 0,5 p. Plantejament del punt on hi ha l'asímptota horitzontal i obtenció del paràmetre a: 0,75 p. Plantejament i obtenció del paràmetre b: 0,75 p.