



Generalitat de Catalunya
Consell Interuniversitari de Catalunya

Oficina d'Accés a la Universitat

Proves d'accés a la universitat

2019

Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales

Serie 1

Responda a CINCO de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué.

Cada cuestión vale 2 puntos.

Puede utilizar calculadora, pero no se permite el uso de calculadoras u otros aparatos que pueden almacenar datos o que pueden transmitir o recibir información.

1. En un estudio de mercado, 500 participantes han probado tres cafés diferentes, presentados como producto A, producto B y producto C, y han escogido cuál de los tres les ha gustado más. Sabemos que el producto B ha sido escogido por el doble de personas que el producto A y que el producto B lo han escogido 32 personas más que los productos A y C juntos. Calcule cuántas personas han escogido cada producto.

[2 puntos]

2. Resuelva las siguientes cuestiones:

- a) Considere la matriz $M = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Calcule los valores de a y b para que se verifique la

igualdad $M^2 + a \cdot M + b \cdot I = 0$ donde I es la matriz identidad $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y es la matriz nula

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

[1 punto]

- b) Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Encuentre todas las matrices B que conmutan con la matriz A , es decir, que cumplen que $A \cdot B = B \cdot A$.

[1 punto]

3. La gráfica de la función $f(x) = ax + b + \frac{8}{x}$ pasa por el punto $(-2, -6)$ y la recta tangente en este punto es paralela al eje de abscisas.

- a) Calcule el valor de a .

[1 punto]

- b) Calcule el valor de b .

[1 punto]

4. La función $f(x) = \frac{40}{x^2 - 22x + 125}$ muestra aproximadamente la venta diaria, en miles de unidades, de un perfume de moda en función de x , donde x es el día del mes de febrero.
- a) ¿Cuántas unidades de perfume se vendieron, aproximadamente, el día 5 de febrero? ¿Cuál es el incremento de ventas entre el día 7 y el día 9 de febrero?
[0,75 puntos]
- b) ¿Qué día del mes de febrero se vendieron más perfumes y cuántas unidades se vendieron?
[1,25 puntos]
5. En una fábrica se dispone de 80 kg de acero y 120 kg de aluminio para fabricar bicicletas de montaña y de paseo, que se venderán a 200 € y 150 €, respectivamente. Para fabricar una bicicleta de montaña son necesarios 1 kg de acero y 3 kg de aluminio, y para fabricar una de paseo, 2 kg de cada uno de los dos metales.
- a) Determine la función objetivo y las restricciones, y dibuje la región factible.
[1,25 puntos]
- b) Calcule cuántas bicicletas de cada tipo hay que fabricar para obtener el máximo beneficio y diga cuál es este beneficio.
[0,75 puntos]
6. Una tienda abre al público desde las 10 horas hasta las 21 horas. Se sabe que los ingresos por ventas, en función de la hora del día, vienen dados por la función:
- $$I(t) = -5(m-t)^2 + n$$
- para $10 \leq t \leq 21$.
- a) Encuentre el valor de m sabiendo que los ingresos máximos se producen a las 18 horas.
[1,25 puntos]
- b) Encuentre el valor de n sabiendo que a las 21 horas hay unos ingresos de 500 €.
[1,25 puntos]

SOLUCIONES

1. En un estudio de mercado, 500 participantes han probado tres cafés diferentes, presentados como producto A, producto B y producto C, y han escogido cuál de los tres les ha gustado más. Sabemos que el producto B ha sido escogido por el doble de personas que el producto A y que el producto B lo han escogido 32 personas más que los productos A y C juntos. Calcule cuántas personas han escogido cada producto. [2 puntos]

Llamamos x , y , z al número de personas que han escogido el café A, B o C respectivamente.

- 500 participantes han probado tres cafés diferentes $\rightarrow x + y + z = 500$.
- El producto B ha sido escogido por el doble de personas que el producto A $\rightarrow y = 2x$.
- El producto B lo han escogido 32 personas más que los productos A y C juntos $\rightarrow y = x + z + 32$.

Reunimos las tres ecuaciones obtenidas en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 500 \\ y = 2x \\ y = x + z + 32 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 2x + z = 500 \\ 2x = x + z + 32 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3x + z = 500 \\ x = z + 32 \end{array} \right\} \Rightarrow 3(z + 32) + z = 500 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3z + 96 + z = 500 \Rightarrow 4z = 404 \Rightarrow z = \frac{404}{4} = 101 \Rightarrow x = 101 + 32 = 133 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = 2 \cdot 133 = 266$$

El producto A ha sido escogido por 133 personas, el B por 266 y el C por las restantes 101 personas.

2. Resuelva las siguientes cuestiones:

- a)** Considere la matriz $M = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Calcule los valores de a y b para que se verifique la igualdad $M^2 + a \cdot M + b \cdot I = 0$ donde I es la matriz identidad $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y es la matriz nula $0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. [1 punto]
- b)** Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Encuentre todas las matrices B que conmutan con la matriz A , es decir, que cumplen que $A \cdot B = B \cdot A$. [1 punto]

a) Resolvemos la ecuación matricial planteada.

$$\begin{aligned}
 M^2 &= \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+10 & 10-5 \\ 4-2 & 10+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 5 \\ 2 & 11 \end{pmatrix} \\
 M^2 + a \cdot M + b \cdot I = 0 &\Rightarrow \begin{pmatrix} 14 & 5 \\ 2 & 11 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \\
 \Rightarrow \begin{pmatrix} 14+2a+b & 5+5a \\ 2+2a & 11-a+b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &\Rightarrow \begin{cases} 14+2a+b=0 \\ 5+5a=0 \\ 2+2a=0 \\ 11-a+b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 14+2a+b=0 \\ 1+a=0 \\ 1+a=0 \\ 11-a+b=0 \end{cases} \Rightarrow \\
 \Rightarrow \begin{cases} 14+2a+b=0 \\ \boxed{a=-1} \\ 11-a+b=0 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} 14-2+b=0 \\ 11+1+b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 12+b=0 \\ 12+b=0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{b=-12}
 \end{aligned}$$

Los valores buscados son $a = -1$ y $b = -12$.

b) Para que sea posible el producto por la matriz A por ambos lados la matriz B debe ser cuadrada de orden 2 $\rightarrow B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Obtenemos los valores de a , b , c y d para los que $A \cdot B = B \cdot A$.

$$\begin{aligned}
 A \cdot B = B \cdot A &\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} c & d \\ a-c & b-d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & a-b \\ d & c-d \end{pmatrix} \Rightarrow \\
 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{c=b} \\ d=a-b \\ a-c=d \\ b-d=c-d \rightarrow b=c \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} \boxed{d=a-c} \\ a-c=d \end{cases} \Rightarrow \boxed{B = \begin{pmatrix} a & c \\ c & a-c \end{pmatrix}}
 \end{aligned}$$

Las matrices B que conmutan con la matriz A tienen la expresión $B = \begin{pmatrix} a & c \\ c & a-c \end{pmatrix}$, siendo a y c números reales cualesquiera.

3. La gráfica de la función $f(x) = ax + b + \frac{8}{x}$ pasa por el punto $(-2, -6)$ y la recta tangente en este punto es paralela al eje de abscisas.

a) Calcule el valor de a .

[1 punto]

b) Calcule el valor de b .

[1 punto]

a) Si la recta tangente en este punto es paralela al eje de abscisas significa que la recta tangente tiene pendiente 0 y por tanto la derivada en $x = -2$ es nula $\rightarrow f'(-2) = 0$.

$$\left. \begin{aligned} f(x) = ax + b + \frac{8}{x} &\Rightarrow f'(x) = a - \frac{8}{x^2} \\ f'(-2) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 0 = a - \frac{8}{(-2)^2} \Rightarrow 0 = a - 2 \Rightarrow \boxed{a = 2}$$

El valor de a es 2.

b) Sabemos que $a = 2$, por lo que la función es $f(x) = 2x + b + \frac{8}{x}$.

Si la gráfica de la función $f(x) = 2x + b + \frac{8}{x}$ pasa por el punto $(-2, -6)$ significa que $f(-2) = -6$.

$$\left. \begin{aligned} f(-2) &= -6 \\ f(x) &= 2x + b + \frac{8}{x} \end{aligned} \right\} \Rightarrow -6 = 2(-2) + b + \frac{8}{-2} \Rightarrow -6 = -4 + b - 4 \Rightarrow \boxed{2 = b}$$

El valor de b es 2.

4. La función $f(x) = \frac{40}{x^2 - 22x + 125}$ muestra aproximadamente la venta diaria, en miles de unidades, de un perfume de moda en función de x , donde x es el día del mes de febrero.
- a) ¿Cuántas unidades de perfume se vendieron, aproximadamente, el día 5 de febrero? ¿Cuál es el incremento de ventas entre el día 7 y el día 9 de febrero?
[0,75 puntos]
- b) ¿Qué día del mes de febrero se vendieron más perfumes y cuántas unidades se vendieron?
[1,25 puntos]

a) Nos piden calcular $f(5)$.

$$f(5) = \frac{40}{5^2 - 22 \cdot 5 + 125} = 1$$

El día 5 de febrero se venden 1000 unidades de perfume.

También se nos pide el incremento $f(9) - f(7)$.

$$f(9) - f(7) = \frac{40}{9^2 - 22 \cdot 9 + 125} - \frac{40}{7^2 - 22 \cdot 7 + 125} = 3$$

El incremento es de 3000 unidades del día 7 al 9 de febrero.

b) Utilizamos la derivada para encontrar el punto crítico de la función.

$$f(x) = \frac{40}{x^2 - 22x + 125} \Rightarrow f'(x) = \frac{0 \cdot (x^2 - 22x + 125) - 40(2x - 22)}{(x^2 - 22x + 125)^2} = \frac{-40(2x - 22)}{(x^2 - 22x + 125)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-40(2x - 22)}{(x^2 - 22x + 125)^2} = 0 \Rightarrow -40(2x - 22) = 0 \Rightarrow 2x - 22 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x - 11 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 11}$$

Comprobamos el signo de la derivada antes y después de $x = 11$.

- Antes de $x = 11$ tomamos $x = 10$ y la derivada vale

$$f'(10) = \frac{-40(2 \cdot 10 - 22)}{(10^2 - 22 \cdot 10 + 125)^2} = \frac{80}{25} > 0. \text{ La función crece entre 1 y 11.}$$

- Después de $x = 11$ tomamos $x = 20$ y la derivada vale

$$f'(20) = \frac{-40(2 \cdot 20 - 22)}{(20^2 - 22 \cdot 20 + 125)^2} = \frac{-720}{7225} < 0. \text{ La función decrece del 11 al final de}$$

febrero.

Como la función crece antes y decrece después de $x = 11$ tenemos en dicho valor un máximo de la función.

El número de unidades vendidas el 11 de febrero fueron $f(11) = \frac{40}{11^2 - 22 \cdot 11 + 125} = 10$ mil unidades.

El día de febrero que más unidades se vendieron fue el día 11, siendo esta cantidad máxima de 10 000 unidades.

5. En una fábrica se dispone de 80 kg de acero y 120 kg de aluminio para fabricar bicicletas de montaña y de paseo, que se venderán a 200 € y 150 €, respectivamente. Para fabricar una bicicleta de montaña son necesarios 1 kg de acero y 3 kg de aluminio, y para fabricar una de paseo, 2 kg de cada uno de los dos metales.

a) Determine la función objetivo y las restricciones, y dibuje la región factible. [1,25 puntos]

b) Calcule cuántas bicicletas de cada tipo hay que fabricar para obtener el máximo beneficio y diga cuál es este beneficio. [0,75 puntos]

a) Llamamos “x” al número de bicicletas de montaña e “y” al número de bicicletas de paseo que se fabrican.

Realizamos una tabla con los datos del problema.

	Kg de acero	Kg de aluminio	Ingresos
Nº bicicletas de montaña (x)	x	3x	200x
Nº bicicletas de paseo (y)	2y	2y	150y
TOTALES	$x + 2y$	$3x + 2y$	$200x + 150y$

La función objetivo que deseamos maximizar son los ingresos: $I(x, y) = 200x + 150y$.

Las restricciones son:

En una fábrica se dispone de 80 kg de acero y 120 kg de aluminio para fabricar bicicletas de montaña y de paseo $\rightarrow x + 2y \leq 80$, $3x + 2y \leq 120$.

Las cantidades deben ser enteras y positivas $\rightarrow x \geq 0$, $y \geq 0$.

Reunimos las restricciones en un sistema de inecuaciones.

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y \leq 80 \\ 3x + 2y \leq 120 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

$$x + 2y = 80$$

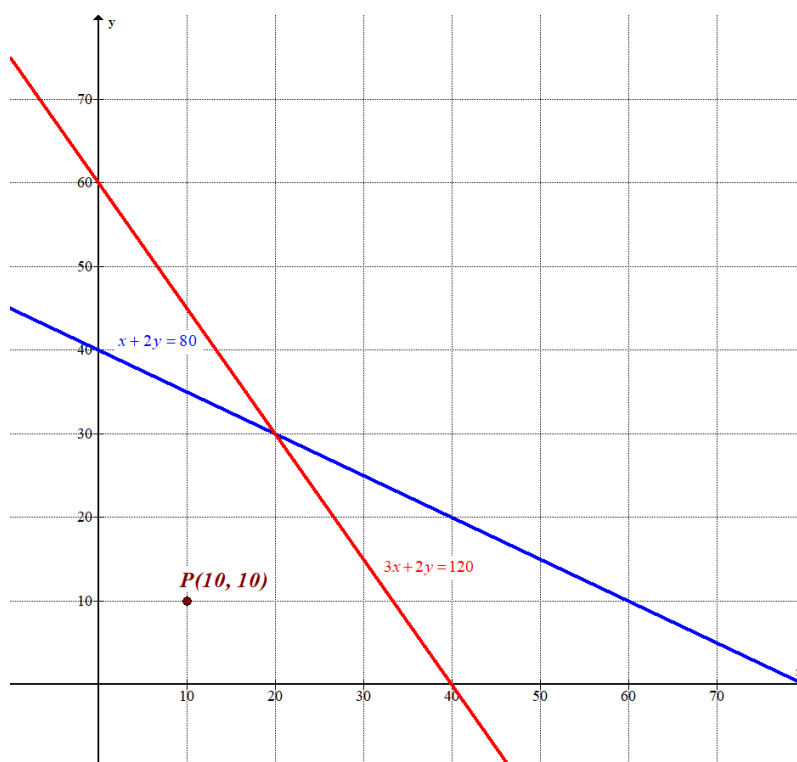
x	$y = \frac{80 - x}{2}$
0	40
20	30
80	0

$$3x + 2y = 120$$

x	$y = \frac{120 - 3x}{2}$
0	60
20	30
40	0

$$x \geq 0, y \geq 0$$

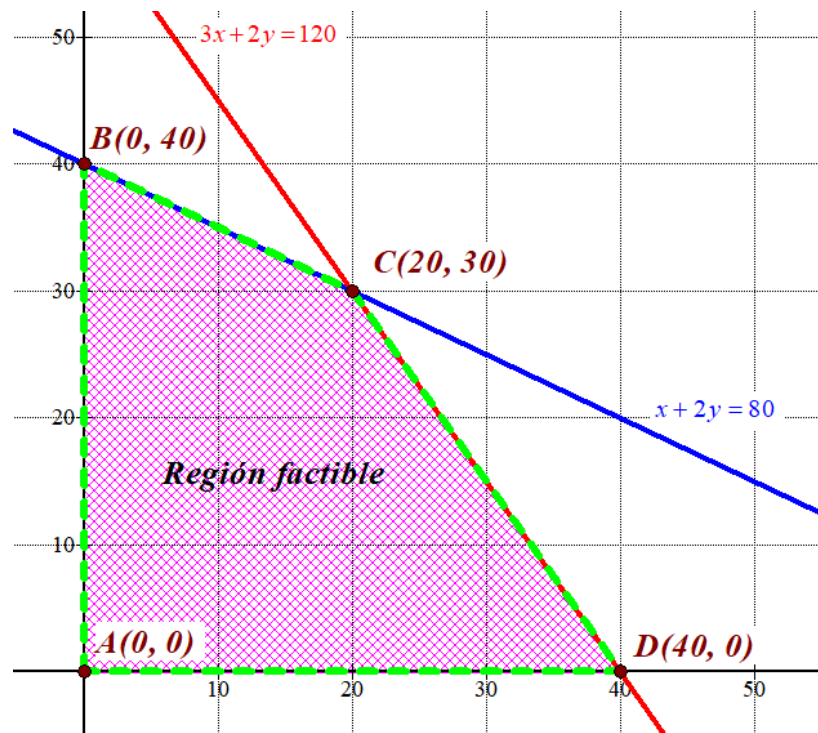
Primer
cuadrante



Comprobamos que el punto $P(10, 10)$ cumple todas las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 10 + 2 \cdot 10 \leq 80 \\ 3 \cdot 10 + 2 \cdot 10 \leq 120 \\ 10 \geq 0, 10 \geq 0 \end{array} \right\} \text{¡Se cumplen todas!}$$

La región factible es la región del primer cuadrante limitada por las rectas y que contiene el punto $P(10, 10)$. La coloreamos en el siguiente dibujo.



- b) Valoramos la función ingresos $I(x, y) = 200x + 150y$ en cada vértice de la región factible en busca del valor máximo.

$$A(0, 0) \rightarrow I(0, 0) = 0$$

$$B(0, 40) \rightarrow I(0, 40) = 200 \cdot 0 + 150 \cdot 40 = 6000$$

$$C(20, 30) \rightarrow I(20, 30) = 200 \cdot 20 + 150 \cdot 30 = 8500 \text{ ¡Máximo!}$$

$$D(40, 0) \rightarrow I(40, 0) = 200 \cdot 40 + 150 \cdot 0 = 8000$$

Los máximos ingresos se consiguen fabricando 20 bicicletas de montaña y 30 de paseo, siendo estos ingresos máximos de 8500 euros.

- 6.** Una tienda abre al público desde las 10 horas hasta las 21 horas. Se sabe que los ingresos por ventas, en función de la hora del día, vienen dados por la función:

$$I(t) = -5(m-t)^2 + n$$

para $10 \leq t \leq 21$.

- a)** Encuentre el valor de m sabiendo que los ingresos máximos se producen a las 18 horas.
[1,25 puntos]

- b)** Encuentre el valor de n sabiendo que a las 21 horas hay unos ingresos de 500 €.
[1,25 puntos]

- a) Si los ingresos máximos se producen a las 18 horas la derivada de la función debe anularse
 $\Rightarrow I'(18) = 0$.

$$\left. \begin{aligned} I(t) = -5(m-t)^2 + n &\Rightarrow I'(t) = -10(m-t)(-1) \\ I'(18) = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 0 = -10(m-18)(-1) \Rightarrow \boxed{m=18}$$

Para $m=18$ la función queda $I(t) = -5(18-t)^2 + n$. Comprobamos que la segunda derivada es negativa para $m=18$ y por tanto los ingresos máximos se producen a las 18 horas como se pide.

$$I(t) = -5(18-t)^2 + n \Rightarrow I'(t) = -10(18-t)(-1) = 180 - 10t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I''(t) = -10 \Rightarrow I''(18) = -10 < 0$$

Se cumple lo pedido para $m=18$.

- b) La función ingresos queda $I(t) = -5(18-t)^2 + n$. Si a las 21 horas hay unos ingresos de 500 € entonces $I(21) = 500$.

$$\left. \begin{aligned} I(t) = -5(18-t)^2 + n \\ I(21) = 500 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 500 = -5(18-21)^2 + n \Rightarrow 500 = -45 + n \Rightarrow \boxed{n=545}$$

El valor buscado es $n=545$.