



Generalitat de Catalunya
Consell Interuniversitari de Catalunya

Oficina d'Accés a la Universitat

Proves d'accés a la universitat

2019

Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales

Serie 4

Responda a CINCO de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué.

Cada cuestión vale 2 puntos.

Puede utilizar calculadora, pero no se permite el uso de calculadoras u otros aparatos que pueden almacenar datos o que pueden transmitir o recibir información.

1. Considere la función $f(x) = 2x^3 + ax$. Calcule el valor de la constante a para que esta función tenga un extremo relativo en el punto de abscisa $x = -1$. Diga si se trata de un máximo o de un mínimo y dé también el valor que toma la función $f(x)$ en este punto.
[2 puntos]

2. La empresa de deporte de aventura Xtrem prepara para la última semana de junio dos paquetes: el paquete básico (PB) y el paquete súper (PS). El PB incluye una bajada de *rafting*, una bajada haciendo barranquismo y un salto en caída libre haciendo *puenting*, y tiene un precio de 50 €. Por otro lado, el PS incluye tres bajadas de *rafting*, dos de barranquismo y un *puenting*, y el precio es de 120 €.

Por limitaciones climáticas y de personal, solo se pueden hacer 12 bajadas de *rafting*, 9 haciendo barranquismo y 8 *puentings*.

Para hacer la promoción turística, se quiere saber qué combinación de paquetes proporciona más ingresos.

- a) Encuentre las inecuaciones que han de cumplir todas las posibles combinaciones de paquetes. Dibuje la región del plano donde se encuentran estas posibles soluciones y encuentre la función que da los ingresos en función del número de paquetes de cada tipo.
[1,25 puntos]

- b) Encuentre el número de paquetes de cada tipo que tiene que ofrecer la empresa para obtener los ingresos máximos y diga cuáles serían estos ingresos.
[0,75 puntos]

3. Un nutricionista, después de hacer un estudio personalizado a un paciente, le propone una dieta. Según el modelo del nutricionista, el peso en kilogramos del paciente seguirá la función

$$f(x) = \frac{63x + 510}{x + 6},$$

donde x denota el número de meses que lleva siguiendo la dieta.

- a) Justifique que la función f es estrictamente decreciente cuando $x \geq 0$.
[0,75 puntos]

- b) Determine el peso inicial del paciente y cuánto pesará al cabo de dos meses siguiendo la dieta según el modelo. ¿Hacia qué valor tenderá su peso a largo plazo? Argumente si este valor límite se alcanzará en algún momento.
[1,25 puntos]

4. Por la Fiesta Mayor, la pastelería del pueblo elabora unas cajas de bombones especiales. La caja pequeña contiene 10 bombones, la mediana tiene 15 bombones y la grande tiene 25. Cada caja va decorada con un lazo conmemorativo. En total han utilizado 210 lazos y 2.650 bombones. Teniendo en cuenta que han elaborado el doble de cajas pequeñas que de medianas y grandes juntas, ¿cuántas cajas de cada tipo han elaborado?
[2 puntos]
5. Un comerciante puede comprar artículos a 350 € la unidad. Si los vende a 750 € la unidad, vende 30. Se sabe que la relación entre estas dos variables (el precio de venta y el número de unidades vendidas) es lineal y que, por cada descuento de 20 € en el precio de venta, incrementa las ventas en 3 unidades. Considerando que el comerciante solo comprará el número de artículos que sabe que venderá:
- a) Escriba la función de beneficios a partir del número de veces x que se aplica el descuento.
[1 punto]
- b) Determine el precio de venta que hace máximos los beneficios del comerciante y justifique que es un máximo. Determine cuántas unidades venderá.
[1 punto]
6. En una oficina tienen tres proveedores que les suministran el material. La matriz P nos da los precios unitarios, en euros, de cada uno de los artículos A1, A2 y A3, según los proveedores p_1 , p_2 y p_3 .

$$P = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 4 \\ 11 & 12 & 13 \\ 13 & 13 & 12 \end{pmatrix}$$

Representamos un pedido de x unidades de A1, y unidades de A2 y z unidades de A3 por un vector fila $C = (x \ y \ z)$.

- a) Explique qué representan cada uno de los elementos del vector que resulta de multiplicar $C \cdot P$.
[0,5 puntos]
- b) Si tenemos que comprar 25 unidades de A1, 10 de A2 y 15 de A3, ¿cuál de los tres proveedores nos ofrece un mejor precio para todo el pedido? ¿Cuál es este precio?
[1,5 puntos]

SOLUCIONES

1. Considere la función $f(x) = 2x^3 + ax$. Calcule el valor de la constante a para que esta función tenga un extremo relativo en el punto de abscisa $x = -1$. Diga si se trata de un máximo o de un mínimo y dé también el valor que toma la función $f(x)$ en este punto. [2 puntos]

Si la función tiene un extremo relativo en el punto de abscisa $x = -1$ implica que la derivada de la función se anula para este valor $\rightarrow f'(-1) = 0$.

$$\left. \begin{array}{l} f'(-1) = 0 \\ f(x) = 2x^3 + ax \rightarrow f'(x) = 6x^2 + a \end{array} \right\} \Rightarrow 0 = 6(-1)^2 + a \Rightarrow 0 = 6 + a \Rightarrow \boxed{a = -6}$$

El valor buscado es $a = -6$.

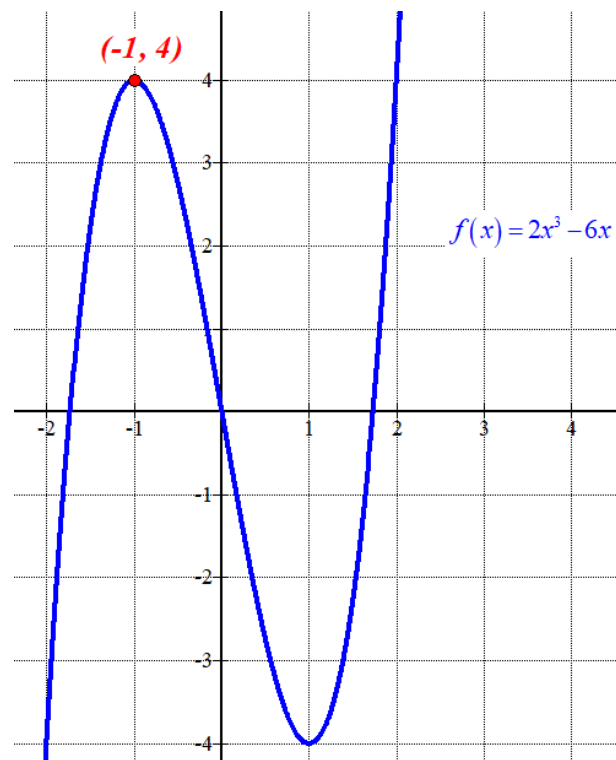
Para este valor la función queda $f(x) = 2x^3 - 6x$.

Sustituimos $x = -1$ en la segunda derivada.

$$f(x) = 2x^3 - 6x \Rightarrow f'(x) = 6x^2 - 6 \Rightarrow f''(x) = 12x \Rightarrow f''(-1) = 12(-1) = -12 < 0$$

Como la derivada segunda es negativa la función presenta un máximo relativo en $x = -1$.

El valor que toma la función $f(x)$ en este punto es $f(-1) = 2(-1)^3 - 6(-1) = -2 + 6 = 4$.



2. La empresa de deporte de aventura Xtrem prepara para la última semana de junio dos paquetes: el paquete básico (PB) y el paquete súper (PS). El PB incluye una bajada de *rafting*, una bajada haciendo barranquismo y un salto en caída libre haciendo *puenting*, y tiene un precio de 50 €. Por otro lado, el PS incluye tres bajadas de *rafting*, dos de barranquismo y un *puenting*, y el precio es de 120 €.

Por limitaciones climáticas y de personal, solo se pueden hacer 12 bajadas de *rafting*, 9 haciendo barranquismo y 8 *puentings*.

Para hacer la promoción turística, se quiere saber qué combinación de paquetes proporciona más ingresos.

a) Encuentre las inecuaciones que han de cumplir todas las posibles combinaciones de paquetes. Dibuje la región del plano donde se encuentran estas posibles soluciones y encuentre la función que da los ingresos en función del número de paquetes de cada tipo. [1,25 puntos]

b) Encuentre el número de paquetes de cada tipo que tiene que ofrecer la empresa para obtener los ingresos máximos y diga cuáles serían estos ingresos. [0,75 puntos]

a) Llamamos “x” al número de paquetes PB e “y” al número de paquetes PS.

Realizamos una tabla con los datos del problema.

	Raftings	Barranquismo	Puentings	Ingresos
Nº PB (x)	x	x	x	50x
Nº PS (y)	3y	2y	y	120y
TOTALES	$x + 3y$	$x + 2y$	$x + y$	$50x + 120y$

La función objetivo que deseamos maximizar son los ingresos: $I(x, y) = 50x + 120y$.

Las restricciones son:

Solo se pueden hacer 12 bajadas de *rafting*, 9 haciendo barranquismo y 8 *puentings* $\rightarrow$
 $x + 3y \leq 12$, $x + 2y \leq 9$; $x + y \leq 8$.

Las cantidades deben ser enteras y positivas $\rightarrow x \geq 0$, $y \geq 0$.

Reunimos las restricciones en un sistema de inecuaciones.

$$\left. \begin{array}{l} x + 3y \leq 12 \\ x + 2y \leq 9 \\ x + y \leq 8 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3y \leq 12 - x \\ 2y \leq 9 - x \\ y \leq 8 - x \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

$$x + 3y = 12$$

$$x + 2y = 9$$

$$x + y = 8$$

$$x \geq 0, y \geq 0$$

x	$y = \frac{12-x}{3}$
0	4
3	3
12	0

x	$y = \frac{9-x}{2}$
0	4.5
3	3
7	1
9	0

x	$y = 8 - x$
0	8
7	1
8	0

Primer
cuadrante



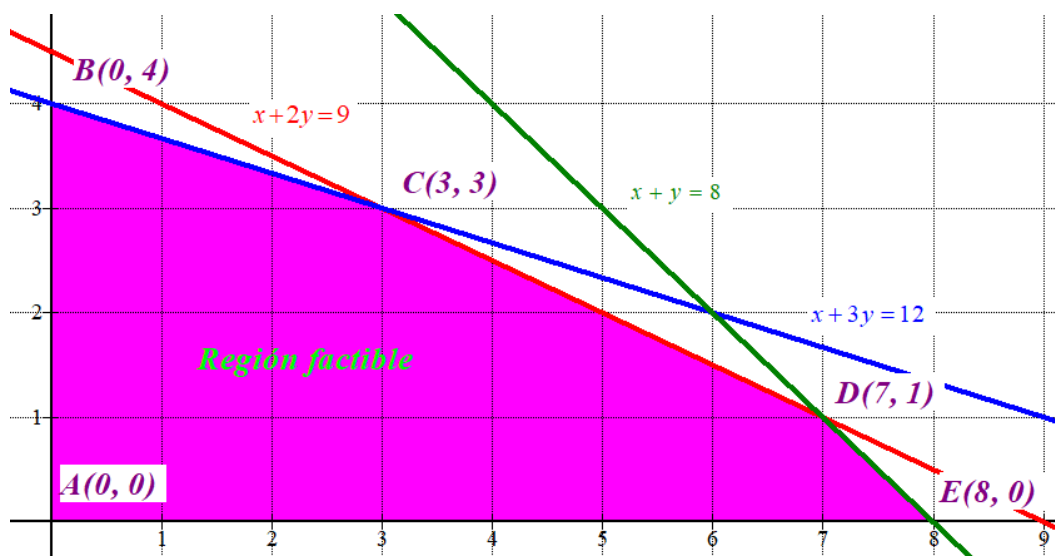
Como las restricciones son
$$\left. \begin{array}{l} 3y \leq 12 - x \\ 2y \leq 9 - x \\ y \leq 8 - x \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{array} \right\}$$
 la región factible es la región del primer cuadrante

situada por debajo de las tres rectas dibujadas.

Comprobamos que el punto $P(1, 1)$ perteneciente a esta región cumple las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 3 \leq 12 - 1 \\ 2 \leq 9 - 1 \\ 1 \leq 8 - 1 \\ 1 \geq 0, 1 \geq 0 \end{array} \right\} \text{ ¡Se cumplen todas! }$$

Coloreamos de rosa la región factible en el siguiente dibujo.



b) Valoramos la función ingresos $I(x, y) = 50x + 120y$ en cada vértice de la región factible en busca del valor máximo.

$$A(0, 0) \rightarrow I(0, 0) = 0$$

$$B(0, 4) \rightarrow I(0, 4) = 50 \cdot 0 + 120 \cdot 4 = 480$$

$$C(3, 3) \rightarrow I(3, 3) = 50 \cdot 3 + 120 \cdot 3 = 510 \text{ ¡Máximo!}$$

$$D(7, 1) \rightarrow I(7, 1) = 50 \cdot 7 + 120 \cdot 1 = 470$$

$$E(8, 0) \rightarrow I(8, 0) = 50 \cdot 8 + 120 \cdot 0 = 400$$

Los máximos ingresos se consiguen con 3 paquetes de PB y otros 3 de PS, siendo estos ingresos máximos de 510 euros.

3. Un nutricionista, después de hacer un estudio personalizado a un paciente, le propone una dieta. Según el modelo del nutricionista, el peso en kilogramos del paciente seguirá la función

$$f(x) = \frac{63x + 510}{x + 6},$$

donde x denota el número de meses que lleva siguiendo la dieta.

a) Justifique que la función f es estrictamente decreciente cuando $x \geq 0$. [0,75 puntos]

b) Determine el peso inicial del paciente y cuánto pesará al cabo de dos meses siguiendo la dieta según el modelo. ¿Hacia qué valor tenderá su peso a largo plazo? Argumente si este valor límite se alcanzará en algún momento. [1,25 puntos]

a) Obtenemos la derivada de la función.

$$f(x) = \frac{63x + 510}{x + 6} \Rightarrow f'(x) = \frac{63(x + 6) - (63x + 510)}{(x + 6)^2} = \frac{\cancel{63x} + 378 - \cancel{63x} - 510}{(x + 6)^2} = \frac{-132}{(x + 6)^2}$$

El denominador de la derivada es $(x + 6)^2 \geq 0$ y el numerador es $-132 < 0$, por lo que la derivada siempre es negativa y la función es decreciente cuando $x \geq 0$.

b) Nos piden determinar el valor de $f(0) = \frac{63 \cdot 0 + 510}{0 + 6} = 85$. El peso inicial del paciente es de 85 kilos.

Al cabo de dos meses su peso será $f(2) = \frac{63 \cdot 2 + 510}{2 + 6} = 79.5$ kilos.

$$\text{Como } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{63x + 510}{x + 6} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{63x}{x} + \frac{510}{x}}{\frac{x}{x} + \frac{6}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{63 + \frac{510}{x}}{1 + \frac{6}{x}} = \frac{63 + 0}{1 + 0} = 63 \text{ podemos}$$

afirmar que a largo plazo el peso va descendiendo y tendiendo a ser de 63 kilos.

Este valor límite del peso nunca se alcanzará, se estará muy cerca de él con el paso de los meses, peso según el modelo siempre tendrá el paciente un peso un poco superior. Por

ejemplo, al cabo de un año (12 meses) el peso será de $f(12) = \frac{63 \cdot 12 + 510}{12 + 6} = 70.333$ kilos.

Al cabo de 3 años (36 meses) el peso del paciente será $f(36) = \frac{63 \cdot 36 + 510}{36 + 6} = 66.14$ kilos.

Al cabo de 10 años (120 meses) el peso será $f(120) = \frac{63 \cdot 120 + 510}{120 + 6} = 64.05$ kilos.

4. Por la Fiesta Mayor, la pastelería del pueblo elabora unas cajas de bombones especiales. La caja pequeña contiene 10 bombones, la mediana tiene 15 bombones y la grande tiene 25. Cada caja va decorada con un lazo conmemorativo. En total han utilizado 210 lazos y 2.650 bombones. Teniendo en cuenta que han elaborado el doble de cajas pequeñas que de medianas y grandes juntas, ¿cuántas cajas de cada tipo han elaborado? [2 puntos]

Llamamos x , y , z al número de cajas de bombones pequeñas, medianas y grandes, respectivamente.

- Si se han utilizado 210 lazos es que se han elaborado 210 cajas de bombones $\rightarrow x + y + z = 210$.
- La caja pequeña contiene 10 bombones, la mediana tiene 15 bombones y la grande tiene 25. Si se han utilizado 2650 bombones $\rightarrow 10x + 15y + 25z = 2650$.
- Se han elaborado el doble de cajas pequeñas que de medianas y grandes juntas $\rightarrow x = 2(y + z)$

Reunimos las tres ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 210 \\ 10x + 15y + 25z = 2650 \\ x = 2(y + z) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 210 \\ 2x + 3y + 5z = 530 \\ x = 2y + 2z \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2y + 2z + y + z = 210 \\ 2(2y + 2z) + 3y + 5z = 530 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3y + 3z = 210 \\ 4y + 4z + 3y + 5z = 530 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y + z = 70 \\ 7y + 9z = 530 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y = 70 - z \\ 7y + 9z = 530 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 7(70 - z) + 9z = 530 \Rightarrow 490 - 7z + 9z = 530 \Rightarrow 2z = 40 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{z = 20} \Rightarrow \boxed{y = 70 - 20 = 50} \Rightarrow \boxed{x = 2(50 + 20) = 140}$$

Se han elaborado 140 cajas de bombones pequeñas, 50 medianas y 20 grandes.

5. Un comerciante puede comprar artículos a 350 € la unidad. Si los vende a 750 € la unidad, vende 30. Se sabe que la relación entre estas dos variables (el precio de venta y el número de unidades vendidas) es lineal y que, por cada descuento de 20 € en el precio de venta, incrementa las ventas en 3 unidades. Considerando que el comerciante solo comprará el número de artículos que sabe que venderá:

a) Escriba la función de beneficios a partir del número de veces x que se aplica el descuento.
[1 punto]

b) Determine el precio de venta que hace máximos los beneficios del comerciante y justifique que es un máximo. Determine cuántas unidades venderá.
[1 punto]

a) Si por cada descuento de 20 € en el precio de venta, incrementa las ventas en 3 unidades entonces por x descuentos de 20 € incrementa $3x$ unidades vendidas, es decir con un precio de $750 - 20x$ se venden $30 + 3x$ unidades.

El beneficio por unidad de artículo vendido sin descuento es de $750 - 350 = 400$ €.

El beneficio por unidad de artículo vendido con x descuentos de 20 € es $400 - 20x$.

El beneficio total es el producto del beneficio por unidad por las unidades vendidas.

$$B(x) = (400 - 20x)(30 + 3x) = 12000 + 1200x - 600x - 60x^2 = -60x^2 + 600x + 12000$$

b) Derivamos la función y averiguamos cuando se anula la derivada.

$$B(x) = -60x^2 + 600x + 12000 \Rightarrow B'(x) = -120x + 600$$

$$B'(x) = 0 \Rightarrow -120x + 600 = 0 \Rightarrow 120x = 600 \Rightarrow x = \frac{600}{120} = 5$$

La función beneficios tiene un punto crítico en $x = 5$. Sustituimos este valor en la segunda derivada para comprobar si es máximo o mínimo.

$$B'(x) = -120x + 600 \Rightarrow B''(x) = -120 \Rightarrow B''(5) = -120 < 0$$

La segunda derivada es negativa, por lo que el beneficio tiene un máximo valor para 5 descuentos de 20 €. Se venderán $30 + 3 \cdot 5 = 45$ unidades a un precio por artículo de $750 - 100 = 650$ €.

Se obtienen unos beneficios máximos de $B(5) = -60 \cdot 5^2 + 600 \cdot 5 + 12000 = 13500$ euros.

6. En una oficina tienen tres proveedores que les suministran el material. La matriz P nos da los precios unitarios, en euros, de cada uno de los artículos A1, A2 y A3, según los proveedores $p1$, $p2$ y $p3$.

$$P = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 4 \\ 11 & 12 & 13 \\ 13 & 13 & 12 \end{pmatrix}$$

Representamos un pedido de x unidades de A1, y unidades de A2 y z unidades de A3 por un vector fila $C = (x \ y \ z)$.

- a)** Explique qué representan cada uno de los elementos del vector que resulta de multiplicar $C \cdot P$. [0,5 puntos]
b) Si tenemos que comprar 25 unidades de A1, 10 de A2 y 15 de A3, ¿cuál de los tres proveedores nos ofrece un mejor precio para todo el pedido? ¿Cuál es este precio? [1,5 puntos]

a) Calculamos la expresión de la matriz que resulta del producto $C \cdot P$.

$$C \cdot P = (x \ y \ z) \begin{pmatrix} 5 & 4 & 4 \\ 11 & 12 & 13 \\ 13 & 13 & 12 \end{pmatrix} = (5x+11y+13z \quad 4x+12y+13z \quad 4x+13y+12z)$$

$$1 \times \boxed{3} \cdot 3 \times 3 \longrightarrow 1 \times 3$$

La matriz obtenida nos indica el coste del pedido realizándolo a cada uno de los tres proveedores $p1$, $p2$ y $p3$.

b) Si $x = 25$, $y = 10$, $z = 15$ el coste del pedido será:

$$C \cdot P = (5 \cdot 25 + 11 \cdot 10 + 13 \cdot 15 \quad 4 \cdot 25 + 12 \cdot 10 + 13 \cdot 15 \quad 4 \cdot 25 + 13 \cdot 10 + 12 \cdot 15)$$

$$C \cdot P = (430 \quad 415 \quad 410)$$

El mejor precio nos lo da el proveedor $p3$, siendo un precio de 410 €.