



SÈRIE 4

RECORDEU:

- Podeu valorar amb tants decimals com considereu convenient, però aconsellem no fer-ho en més de dos decimals.
- Cal arrodonir a un decimal la nota final de l'examen, no les notes parcials.
- Cal traslladar la puntuació de cada pregunta a la casella **amb el número corresponent** de la primera pàgina de l'examen.

- c) Considereu la funció $f(x) = 2x^3 + ax$. Calculeu el valor de la constant a per tal que aquesta funció tingui un extrem relatiu en el punt d'abscissa $x = -1$. Digueu si es tracta d'un màxim o d'un mínim i doneu també el valor que pren la funció $f(x)$ en aquest punt. [2 punts]

Comencem calculant la derivada de la funció $f(x)$:

$$f'(x) = 6x^2 + a.$$

Per tal que la funció tingui un extrem relatiu en $x = -1$ cal que en aquest punt s'anul·li la derivada. Imposant doncs que $f'(-1) = 0$ trobem que $a = -6$. Per tant la funció és $f(x) = 2x^3 - 6x$ i la derivada $f'(x) = 6x^2 - 6$. Observem que $f'(x) > 0$ per $x < -1$ i que $f'(x) < 0$ per $x \in (-1, 1)$. Per tant la funció $f(x)$ és creixent en l'interval $(-\infty, -1)$ i és decreixent en l'interval $(-1, 1)$. Així doncs en el punt $x = -1$ hi trobem un màxim relatiu.

Finalment ens demanen $f(-1) = 2 \cdot (-1)^3 - 6 \cdot (-1) = 4$.

Criteris de correcció: Càlcul de la derivada: 0,5 p. Imposar que la derivada en el punt s'anul·li i trobar el valor de a : 0,5 p. Justificació de que es tracta d'un màxim: 0,75 p. Càlcul del valor de la funció en el punt: 0,25 p.

- d) L'empresa d'esport d'aventura Xtrem prepara per a la darrera setmana de juny dos paquets: el paquet bàsic (PB) i el paquet súper (PS). El PB inclou una baixada de ràfting, una baixada fent barranquisme i un salt de pont, i té un preu de 50€. D'altra banda, el PS inclou tres baixades de ràfting, dues fent barranquisme i un salt de pont, i el preu és de 120€. Per limitacions climàtiques i de personal, només es poden fer 12 baixades de ràfting, 9 fent barranquisme i 8 salts de pont. Per a fer la promoció turística, es vol saber quina combinació de paquets proporciona més ingressos.



- a) Trobeu les inequacions que han de complir totes les possibles combinacions de paquets. Dibuixeu la regió del pla en què es troben aquestes possibles solucions i trobeu la funció que dona els ingressos en funció del nombre de paquets de cada tipus. [1,25 punts]
- b) Trobeu el nombre de paquets de cada tipus que ha d'oferir l'empresa per a obtenir els ingressos màxims i digueu quins serien aquests ingressos. [0,75 punts]

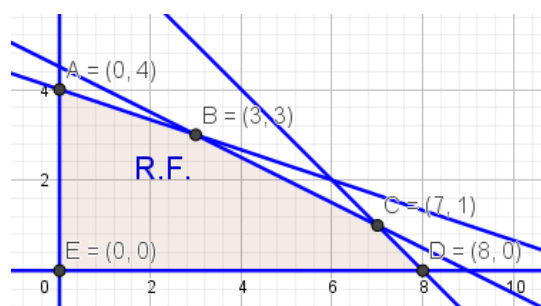
- a) Anomenem x el nombre de paquets PB venuts i y el nombre de paquets PS venuts. Tenim les següents dades:

Paquets	PB (x)	PS (y)	Disponible
Ràfting	1	3	12
Barranquisme	1	2	9
Pònting	1	1	8
Preu (€)	50	120	

I, per tant, tenim les següents restriccions:

$$\begin{cases} x + 3y \leq 12 \\ x + 2y \leq 9 \\ x + y \leq 8 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Si les representem gràficament obtenim:



D'altra banda, la funció objectiu serà $Guanys(x, y) = 50x + 120y$.

- b) Per saber quins són els ingressos màxims hem d'avaluar la funció objectiu en cada uns dels vèrtexs de la regió factible:

$$Guanys(A(0,4)) = 50 \cdot 0 + 120 \cdot 4 = 480 \text{ €}$$

$$Guanys(B(3,3)) = 50 \cdot 3 + 120 \cdot 3 = 510 \text{ €}$$



$$\text{Guany}(C(7,1)) = 50 \cdot 7 + 120 \cdot 1 = 470 \text{ €}$$

$$\text{Guany}(D(8,0)) = 50 \cdot 8 + 120 \cdot 0 = 400 \text{ €}$$

$$\text{Guany}(E(0,0)) = 50 \cdot 0 + 120 \cdot 0 = 0 \text{ €}$$

Per tant, per obtenir els màxims beneficis caldrà vendre 3 paquets de cada tipus, PB i PS, i els ingressos que obtindrem seran de 510 euros.

Criteris de correcció: a) Càlcul de les restriccions: 0,5 p. Dibuix de la regió factible: 0,5 p. Obtenció de la funció objectiu: 0,25 p. b) Obtenció dels vèrtexs: 0,25 p. Obtenció del punt en què s'assoleix el màxim: 0,25 p. Obtenció del benefici màxim: 0,25 p.

- 3 Un nutricionista, després de fer un estudi personalitzat a un pacient, li proposa una dieta. Segons el model del nutricionista, el pes en kilograms del pacient seguirà la funció

$$f(x) = \frac{63x+510}{x+6},$$

en què x denota el nombre de mesos que fa que segueix la dieta.

- a) Justifiqueu que la funció f és estrictament decreixent quan $x \geq 0$. [0,75 punts]
b) Determineu el pes inicial del pacient i quant pesarà al cap de dos mesos de seguir la dieta segons el model. Cap a quin valor tendirà el seu pes a llarg termini? Argumenteu si aquest valor límit s'assolirà en algun moment. [1,25 punts]
- a) Tenint en compte que x és el nombre de mesos seguint la dieta cal considerar $\text{Dom}(f) = [0, +\infty)$. En aquest interval la funció f no presenta cap discontinuïtat, ja que l'únic valor de x pel qual s'anul·la el denominador és $x = -6$. Per estudiar si la funció és decreixent en aquest interval caldrà calcular la funció derivada de $f(x)$:

$$f'(x) = \frac{-132}{(x+6)^2}.$$

L'equació $f'(x) = 0$ no presenta cap solució i veiem clarament que $f'(x) < 0$ per a tot $x \geq 0$. Així doncs la funció és estrictament decreixent en tot el seu domini.

- b) El pes inicial del pacient serà $f(0) = \frac{510}{6} = 85$. Al cap de dos mesos pesaria $f(2) = 79,5$ kg. Per saber a quin valor tendeix el pes cal calcular el límit de $f(x)$ quan $x \rightarrow +\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{63x+510}{x+6} = 63.$$

Aquest valor no s'assolirà mai ja que la funció és estrictament decreixent per a tot $x \geq 0$.

Criteris de correcció: a) Càlcul de la derivada: 0,25 p. Justificació de que la funció és decreixent per $x \geq 0$: 0,5 p. b) Càlcul del pes inicial: 0,25 p. Càlcul del pes als dos mesos: 0,25 p. Càlcul del límit: 0,5 p. Justificació de que no s'assoleix: 0,25 p.



- 4 Per la Festa Major, la pastisseria del poble elabora unes capsas de bombons especials. La capsa petita conté 10 bombons, la mitjana té 15 bombons i la gran en té 25. Cada capsa va decorada amb una llaç commemoratiu. En total han utilitzat 210 llaços i 2.650 bombons. Tenint en compte que han elaborat el doble de capsas petites que de mitjanes i grans juntes, quantes capsas de cada tipus han elaborat? [2 punts]

Sigui x la quantitat de capsas de bombons petites elaborades, y la quantitat de capsas mitjanes i z la quantitat de grans.

A partir de les condicions de l'enunciat obtenim el següent sistema d'equacions:

$$\begin{cases} x + y + z = 210 \\ 10x + 15y + 25z = 2.650 \\ 2 \cdot (y + z) = x \end{cases}$$

Que és equivalent al sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = 210 \\ 2x + 3y + 5z = 530 \\ x - 2y - 2z = 0 \end{cases}$$

Si el resollem pel mètode de Gauss obtenim

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 210 \\ 2 & 3 & 5 & 530 \\ 1 & -2 & -2 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 210 \\ 0 & 1 & 3 & 110 \\ 0 & -3 & -3 & -210 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 210 \\ 0 & 1 & 3 & 110 \\ 0 & 0 & -6 & -120 \end{array} \right).$$

I d'aquí deduïm que $x = 140$, $y = 50$ i $z = 20$.

Criteris de correcció: Plantejament del sistema: 0,75 p. Resolució del sistema: 1 p. Obtenció de la solució final: 0,25 p.

- 5 Un comerciant pot comprar articles a 350 € la unitat. Si els ven a 750 € la unitat, en ven 30. Sabem que la relació entre aquestes dues variables (el preu de venda i el nombre d'unitats venudes) és lineal i que, per cada descompte de 20 € en el preu de venda, incrementa les vendes en 3 unitats. Considerant que el comerciant només comprarà el nombre d'articles que sap que vendrà:
- Escriuiu la funció de beneficis a partir del nombre de vegades x que s'aplica el descompte. [1 punt]
 - Determineu el preu de venda que fa màxims els beneficis del comerciant i justifiqueu que és un màxim. Determineu quantes unitats vendrà. [1 punt]
- a) Anomenem x el nombre de vegades que s'aplica el descompte de 20 €. La funció que dona el benefici del comerciant és el producte entre dels diners que guanya per cada unitat venuda pel nombre d'unitats que ven:



$$B(x) = (400 - 20x) \cdot (30 + 3x) = -60x^2 + 600x + 12.000.$$

- b) Per trobar el punt on s'assoleix el màxim derivem la funció $B(x)$:

$$B'(x) = -120x + 600.$$

Si igualem la derivada a zero veiem que hi ha un extrem relatiu en el punt $x = 5$.
Veiem que es tracta d'un màxim perquè la derivada és positiva per $x < 5$ i és negativa per $x > 5$.

Per tant el preu de venda és $750 - 5 \cdot 20 = 650$ €. D'altra banda, mensualment es vendran $30 + 5 \cdot 3 = 45$ unitats.

Criteris de correcció: a) Obtenció dels guanys per unitat venuda en funció de x : 0,25p. Obtenció del nombre d'unitats venudes en funció de x : 0,25p. Obtenció de la funció de beneficis: 0,5p. b) Obtenció del punt on s'assoleix el màxim: 0,25 p. Justificació de que es tracta d'un màxim: 0,25 p. Càlcul del preu de venda: 0,25 p. Càlcul del nombre d'unitats venudes: 0,25p.

6. En una oficina tenen tres proveïdors que els subministren el material. La matriu P ens dona els preus unitaris, en euros, de cada un dels articles $A1, A2$ i $A3$, segons els proveïdors $p1, p2$ i $p3$.

$$P = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 4 \\ 11 & 12 & 13 \\ 13 & 13 & 12 \end{pmatrix}.$$

Representem una comanda de x unitats de $A1$, y unitats de $A2$ i z unitats de $A3$ per un vector fila $C = (x \ y \ z)$.

- a) Expliqueu què representen cadascun dels elements del vector que resulta de multiplicar $C \cdot P$. [0,5 punts]
b) Si hem de comprar 25 unitats de $A1$, 10 de $A2$ i 15 de $A3$, quin dels tres proveïdors ens ofereix un millor preu per tota la comanda? Quin és aquest preu? [1,5 punts]

- a) Quan fem el producte de la comanda C per la matriu de preus unitaris P obtenim un vector fila que és el preu total de la comanda per cadascun dels tres proveïdors.
b) En aquest cas el vector de la comanda és $C = (25 \ 10 \ 15)$. Calculem el producte $C \cdot P$:

$$(25 \ 10 \ 15) \cdot \begin{pmatrix} 5 & 4 & 4 \\ 11 & 12 & 13 \\ 13 & 13 & 12 \end{pmatrix} = (430 \ 415 \ 410).$$

Per tant el preu total de la comanda és de 430 € pel proveïdor $p1$, de 415 € pel proveïdor $p2$ i de 410 € en el cas del proveïdor $p3$.

Així doncs el millor preu del total de la comanda ens l'ofereix el proveïdor $p3$ i és de 410 €.

Criteris de correcció: a) Explicació del que representa el producte $C \cdot P$: 0,5 p. b) Escriure la comanda com a vector C : 0,25 p. Càlcul del producte $C \cdot P$: 0,75 p. Obtenció del proveïdor que ofereix un millor preu total: 0,25 p. Obtenció del preu: 0,25 p.