



Proves d'accés a la universitat

Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales

Serie 1

Responda a CUATRO de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué.

Cada cuestión vale 2,5 puntos.

Puede utilizar calculadora, pero no se permite el uso de calculadoras u otros aparatos que pueden almacenar datos o que pueden transmitir o recibir información.

Puede utilizar las páginas en blanco (páginas 14 y 15) para hacer esquemas, borradores, etc., o para acabar de responder a alguna cuestión si necesita más espacio. En este último caso, debe indicarlo claramente al final de la página de la cuestión correspondiente.

1. Un vendedor de una librería de viejo cobra, además de un sueldo fijo, varias comisiones dependiendo del tipo de libro que vende. Cobra 1 € por cada cómic, 1,5 € por cada revista y 2 € por cada novela.

Ayer, vendió el doble de revistas que de novelas y 5 cómics menos que revistas, y consiguió en total una comisión de 30 €.

¿Cuántas publicaciones vendió de cada tipo?

[2,5 puntos]

2. El 1 de enero de 2019 salió al mercado un nuevo modelo de un producto técnico de esquí. La función de tercer grado $f(x) = 10x^3 - 210x^2 + 1.470x$ nos da el número total de unidades vendidas, en la que x denota el número de meses transcurridos, desde el lanzamiento del producto, durante el primer año (es decir, $x \in [0, 12]$).

a) ¿Cuántas unidades se habían vendido al cabo de 3 meses? ¿Cuántas se vendieron al cabo de un año? Determine la tasa de variación media entre los meses 3 y 12.

[1,25 puntos]

b) Compruebe que la función es creciente en el intervalo $[0, 12]$ y encuentre en qué instante el crecimiento ha sido más lento.

[1,25 puntos]

3. El coste de elaboración de un menú en un restaurante es de 8 €. Se ha realizado un estudio de mercado y se ha llegado a la conclusión de que si el precio del menú es de 18 € entran a comer en el restaurante 120 clientes. También se ha concluido que la relación entre el precio del menú y el número de clientes es lineal, de forma que, por cada euro que se aumenta el precio del menú, disminuye en 4 el número de clientes. Y al revés, por cada euro que se disminuye el precio, aumenta en 4 el número de clientes.

a) Obtenga la función que expresa el beneficio del restaurante en función del número de euros en que se aumenta o se disminuye el precio inicial del menú.

[1,25 puntos]

- b)** Encuentre en cuántos euros hay que aumentar o disminuir el precio inicial del menú para que el restaurante obtenga el beneficio máximo. ¿Cuál sería el precio final del menú y cuál sería el beneficio obtenido con este precio?
[1,25 puntos]
- 4.** Un fabricante de muebles de jardín fabrica sillas y mesas de madera de exterior. Cada silla le aporta un beneficio de 20 € y cada mesa uno de 25 €. Se sabe que cada mes puede producir como máximo un total de 120 muebles entre los dos productos. También se sabe que, como máximo, puede fabricar 100 sillas y que debe fabricar un mínimo de 10 mesas. Por otra parte, el número de sillas fabricadas debe ser igual o superior al triple de mesas fabricadas.
- a)** Determine la función objetivo y las restricciones. Dibuje la región factible.
[1,25 puntos]
- b)** ¿Cuál es la producción mensual que le aporta el máximo beneficio una vez vendida?
¿Cuál es este beneficio?
[1,25 puntos]
- 5.** Considere las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$
- a)** Compruebe que se cumple que $A^{-1} = A^2$.
[1,25 puntos]
- b)** Resuelva la ecuación matricial $A \cdot X + B = I$, donde I es la matriz identidad de orden 2.
[1,25 puntos]
- 6.** El beneficio de una empresa, expresado en millones de euros, viene dado por la siguiente función, en la que x indica el número de años que han pasado desde que empezó a funcionar:
- $$B(x) = \frac{5x + 20}{x^2 + 9} - \frac{20}{9}.$$
- a)** ¿Cuál es el beneficio en el momento en que la empresa comienza su funcionamiento? ¿En qué momento la empresa pasa de tener beneficios a tener pérdidas?
[1,25 puntos]
- b)** ¿En qué momento consigue la empresa el beneficio máximo? ¿Cuál es este beneficio máximo?
[1,25 puntos]

SOLUCIONES

1. Un vendedor de una librería de viejo cobra, además de un sueldo fijo, varias comisiones dependiendo del tipo de libro que vende. Cobra 1 € por cada cómic, 1,5 € por cada revista y 2 € por cada novela.

Ayer, vendió el doble de revistas que de novelas y 5 cómics menos que revistas, y consiguió en total una comisión de 30 €.

¿Cuántas publicaciones vendió de cada tipo?

[2,5 puntos]

Llamamos "x" al número de comics que vende, "y" al número de revistas y "z" al número de novelas.

Cobra 1 € de comisión por cada comic que vende, 1.5 por cada revista y 2 € por cada novela. Siendo el total de la comisión que recibe de 30 € por estas ventas $\rightarrow x + 1,5y + 2z = 30$

Vende el doble de revistas que de novelas $\rightarrow y = 2z$

Vende 5 comics menos que revistas $\rightarrow x = y - 5$

Juntamos estas ecuaciones en un sistema de ecuaciones lineales y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} x + 1,5y + 2z = 30 \\ x = y - 5 \\ y = 2z \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 1,5 \cdot 2z + 2z = 30 \\ x = 2z - 5 \end{array} \right\} \Rightarrow 2z - 5 + 3z + 2z = 30 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 7z = 35 \Rightarrow \boxed{z = 5} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \boxed{x = 10 - 5 = 5} \\ \boxed{y = 10} \end{array} \right.$$

Vende 5 comics, 10 revistas y 5 novelas.

2. El 1 de enero de 2019 salió al mercado un nuevo modelo de un producto técnico de esquí. La función de tercer grado $f(x) = 10x^3 - 210x^2 + 1470x$ nos da el número total de unidades vendidas, en la que x denota el número de meses transcurridos, desde el lanzamiento del producto, durante el primer año (es decir, $x \in [0, 12]$).
- a)** ¿Cuántas unidades se habían vendido al cabo de 3 meses? ¿Cuántas se vendieron al cabo de un año? Determine la tasa de variación media entre los meses 3 y 12. [1,25 puntos]
- b)** Compruebe que la función es creciente en el intervalo $[0, 12]$ y encuentre en qué instante el crecimiento ha sido más lento. [1,25 puntos]

a) Nos piden $f(3)$, sustituimos en la función:

$$f(3) = 10 \cdot 3^3 - 210 \cdot 3^2 + 1470 \cdot 3 = 2790 \text{ unidades.}$$

Al final del año es el mes 12, se venden:

$$f(12) = 10 \cdot 12^3 - 210 \cdot 12^2 + 1470 \cdot 12 = 4680 \text{ unidades.}$$

La tasa de variación media entre el mes 3 y 12 es

$$TVM(3,12) = \frac{4680 - 2790}{12 - 3} = 210$$

b) Utilizamos la derivada y vemos si es creciente en el intervalo $[0, 12]$.

$$f(x) = 10x^3 - 210x^2 + 1470x \Rightarrow f'(x) = 30x^2 - 420x + 1470$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 30x^2 - 420x + 1470 = 0 \Rightarrow x^2 - 14x + 49 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{14 \pm \sqrt{(-14)^2 - 4 \cdot 49}}{2} = \frac{14}{2} = 7$$

Veamos el signo de la derivada antes y después de $x = 7$.

- En $(0, 7)$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale $f'(1) = 30 - 420 + 1470 = 1020 > 0$. La función crece en $(-\infty, 7)$.
- En $(7, 12)$ tomamos $x = 10$ y la derivada vale $f'(10) = 3000 - 4200 + 1470 = 270 > 0$. La función crece en $(7, 12)$.

La función crece en $[0, 12]$.

Nos preguntan dónde alcanza la derivada $f'(x) = 30x^2 - 420x + 1470$ el valor más pequeño.

Como la derivada hemos visto que siempre es positiva o cero el valor más pequeño que toma es 0. Esto ocurre en $x = 7$.

El crecimiento es más lento en el mes 7 (Julio).

3. El coste de elaboración de un menú en un restaurante es de 8 €. Se ha realizado un estudio de mercado y se ha llegado a la conclusión de que si el precio del menú es de 18 € entran a comer en el restaurante 120 clientes. También se ha concluido que la relación entre el precio del menú y el número de clientes es lineal, de forma que, por cada euro que se aumenta el precio del menú, disminuye en 4 el número de clientes. Y al revés, por cada euro que se disminuye el precio, aumenta en 4 el número de clientes.

a) Obtenga la función que expresa el beneficio del restaurante en función del número de euros en que se aumenta o se disminuye el precio inicial del menú. [1,25 puntos]

b) Encuentre en cuántos euros hay que aumentar o disminuir el precio inicial del menú para que el restaurante obtenga el beneficio máximo. ¿Cuál sería el precio final del menú y cuál sería el beneficio obtenido con este precio? [1,25 puntos]

a) Llamemos “ x ” al número de euros que aumenta o disminuye el precio del menú e “ y ” al número de clientes.

Nos dicen que el número de clientes está en función del cambio del precio del menú de forma lineal.

$$y = mx + n$$

Por cada 1 € que aumenta el precio del menú disminuye en 4 el número de clientes. Si con 18 € ($x = 0$) tienen 120 clientes con un precio de 19 € ($x = 1$) tendrán $120 - 4 = 116$ ($y = 116$).

Hacemos un sistema y determinamos el valor de “ m ” y “ n ”.

$$\left. \begin{array}{l} 120 = m \cdot 0 + n \\ 116 = m \cdot 1 + n \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 120 = n \\ 116 = m + n \end{array} \right\} \Rightarrow 116 = m + 120 \Rightarrow \boxed{-4 = m}$$

La función que relaciona la variación del precio del menú y el número de clientes es $y = -4x + 120$.

Como la elaboración del menú cuesta 8 € y se vende a un precio “ $18 + x$ ” por cada menú se gana $18 + x - 8 = 10 + x$.

Como se venden “ y ” menús el beneficio es $B(x, y) = y(10 + x)$.

Además, sabemos que el precio y el número de clientes está relacionado con la fórmula $y = -4x + 120$ la función beneficio queda:

$$B(x) = (10 + x)(-4x + 120) = -4x^2 - 40x + 120x + 1200 = -4x^2 + 80x + 1200$$

$$\boxed{B(x) = -4x^2 + 80x + 1200}$$

b) Buscamos un máximo de esta función usando su derivada.

$$B(x) = -4x^2 + 80x + 1200 \Rightarrow B'(x) = -8x + 80$$

$$B'(x) = 0 \Rightarrow -8x + 80 = 0 \Rightarrow x = \frac{80}{8} = 10$$

Sustituimos en la derivada segunda y vemos si es un máximo.

$$B'(x) = -8x + 80 \Rightarrow B''(x) = -8 \Rightarrow B''(10) = -8 < 0$$

En $x = 10$ hay un máximo relativo.

Con una subida de precio de 10 € se obtiene un beneficio máximo.

El precio del menú para obtener el máximo beneficio es de $18 + 10 = 28$ € y el beneficio máximo que se puede obtener es de $B(10) = -4 \cdot 10^2 + 80 \cdot 10 + 1200 = 1600$ €

4. Un fabricante de muebles de jardín fabrica sillas y mesas de madera de exterior. Cada silla le aporta un beneficio de 20 € y cada mesa uno de 25 €. Se sabe que cada mes puede producir como máximo un total de 120 muebles entre los dos productos. También se sabe que, como máximo, puede fabricar 100 sillas y que debe fabricar un mínimo de 10 mesas. Por otra parte, el número de sillas fabricadas debe ser igual o superior al triple de mesas fabricadas.

a) Determine la función objetivo y las restricciones. Dibuje la región factible. [1,25 puntos]

b) ¿Cuál es la producción mensual que le aporta el máximo beneficio una vez vendida? ¿Cuál es este beneficio? [1,25 puntos]

a) Llamemos “x” al número de sillas que fabrica en un mes e “y” al número de mesas.

Como cada silla le proporciona un beneficio de 20 € y cada mesa 25 € el beneficio total es:

$$B(x, y) = 20x + 25y. \text{ Esta es la función objetivo que deseamos maximizar.}$$

Las restricciones son:

$$\text{“Cada mes produce como máximo 120 muebles”} \rightarrow x + y \leq 120$$

$$\text{“Como máximo puede fabricar 100 sillas y un mínimo de 10 mesas”} \rightarrow x \leq 100; \quad y \geq 10$$

$$\text{“El número de sillas ha de ser igual o superior al triple de mesas”} \rightarrow x \geq 3y$$

$$\text{“El número de sillas y mesas debe ser positivo o cero”} \rightarrow x \geq 0; \quad y \geq 0$$

Reunimos todas las restricciones:

$$\left. \begin{array}{l} x + y \leq 120 \\ x \leq 100 \\ y \geq 10 \\ x \geq 3y \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y \leq 120 \\ x \leq 100 \\ y \geq 10 \\ x \geq 3y \end{array} \right\}$$

Para dibujar la región factible primero dibujamos las rectas que la delimitan.

$$x + y = 120$$

$$x = 100$$

$$y = 10$$

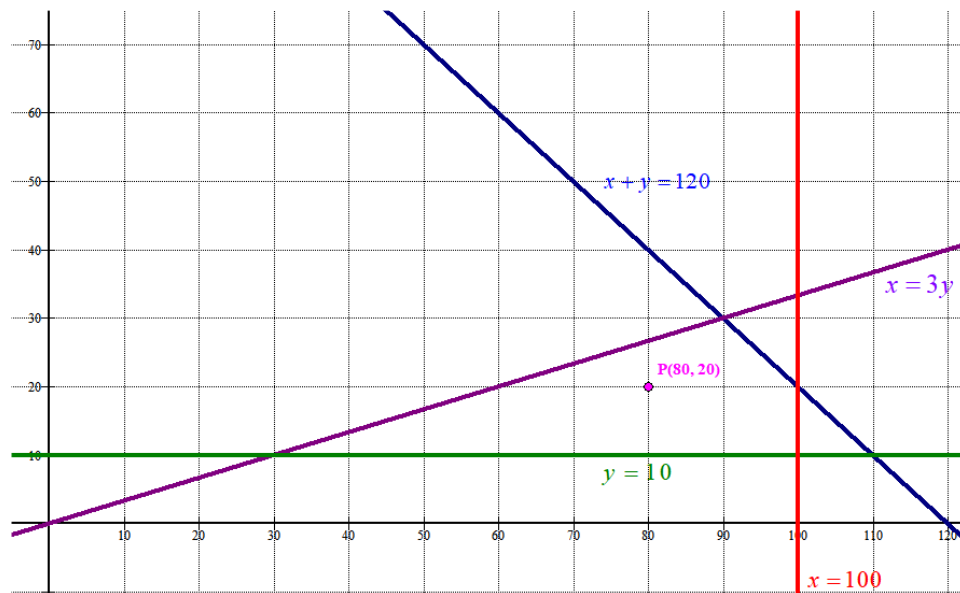
$$x = 3y$$

x	y = 120 - x
0	120
120	0

x = 100	y
100	0
100	120

x	y = 10
0	10
120	10

x	y = $\frac{x}{3}$
0	0
120	40



Probamos si el punto $P(80, 20)$ cumple las restricciones.

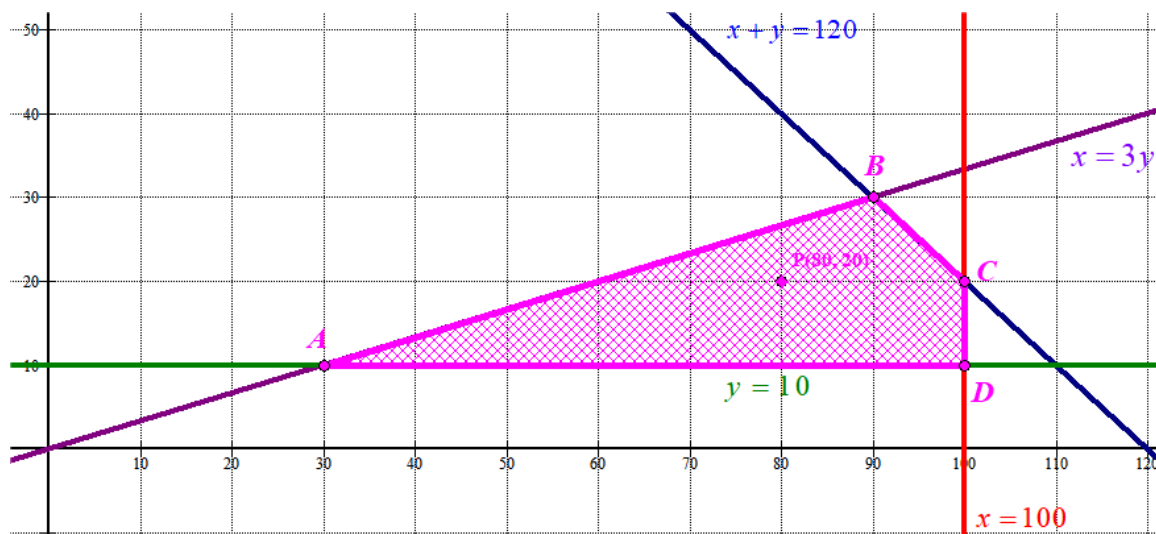
$$80 + 20 \leq 120$$

$$80 \leq 100$$

$$20 \geq 10$$

$$80 \geq 3 \cdot 20$$

Se cumplen todas y la región factible es la zona rayada del dibujo.



b) Para determinar con qué producción se puede obtener máximo beneficio, cumpliendo las restricciones, averiguamos las coordenadas de los vértices de la región factible y valoramos la función beneficio en ellos.

$$A(30, 10) \rightarrow B(30, 10) = 600 + 250 = 850$$

$$B(90, 30) \rightarrow B(90, 30) = 1800 + 750 = 2550$$

$$C(100, 20) \rightarrow B(100, 20) = 2000 + 500 = 2500$$

$$D(100, 10) \rightarrow B(100, 10) = 2000 + 250 = 2250$$

El máximo beneficio es de 2550 € y se consigue en el punto $B(90, 30)$ que significa una producción de 90 sillas y 30 mesas.

5. Considere las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

a) Compruebe que es cumple que $A^{-1} = A^2$. [1,25 puntos]

b) Resuelva la ecuación matricial $A \cdot X + B = I$, donde I es la matriz identidad de orden 2. [1,25 puntos]

a) Determinamos la expresión de A^2 y comprobamos que es la inversa de la matriz A .

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Para que A^2 sea la inversa de A debe cumplirse que $A^2 \cdot A = I$ y $A \cdot A^2 = I$.

$$A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+1 & -1+1 \\ 0+0 & 1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

$$A \cdot A^2 = A \cdot A \cdot A = A^2 \cdot A = I$$

Queda demostrado que $A^{-1} = A^2$

b) Despejamos X de la ecuación matricial.

$$AX + B = I \Rightarrow AX = I - B \Rightarrow X = A^{-1}(I - B)$$

Obtenemos la expresión de la matriz X .

$$X = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

6. El beneficio de una empresa, expresado en millones de euros, viene dado por la siguiente función, en la que x indica el número de años que han pasado desde que empezó a funcionar:

$$B(x) = \frac{5x+20}{x^2+9} - \frac{20}{9}.$$

- a) ¿Cuál es el beneficio en el momento en que la empresa comienza su funcionamiento? ¿En qué momento la empresa pasa de tener beneficios a tener pérdidas? [1,25 puntos]
 b) ¿En qué momento consigue la empresa el beneficio máximo? ¿Cuál es este beneficio máximo? [1,25 puntos]

a) Nos piden calcular $B(0)$, sustituimos y calculamos.

$$B(0) = \frac{0+20}{0^2+9} - \frac{20}{9} = 0. \text{ En los comienzos de la empresa el beneficio es 0.}$$

Nos preguntan por el momento en que el beneficio $B(x) = \frac{5x+20}{x^2+9} - \frac{20}{9}$ pasa de tomar valores positivos ($B(x) > 0$) a tener valores negativos ($B(x) < 0$). Para ello averiguamos primero cuando se anula la función.

$$B(x) = 0 \Rightarrow \frac{5x+20}{x^2+9} - \frac{20}{9} = 0 \Rightarrow \frac{5x+20}{x^2+9} = \frac{20}{9} \Rightarrow 45x+180 = 20x^2+180 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 20x^2 - 45x = 0 \Rightarrow 5x(4x-9) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 4x-9 = 0 \Rightarrow x = \frac{9}{4} = 2,25 \end{cases}$$

Como es una función continua basta ver como son los beneficios antes y después de 2,25 años.

- En $(0, 2.25)$ tomamos $x = 2$ y obtenemos $B(2) = \frac{5 \cdot 2 + 20}{2^2 + 9} - \frac{20}{9} = \frac{10}{117} > 0$. Los beneficios son positivos antes de 2.25 años.
- En $(2.25, +\infty)$ tomamos $x = 3$ y obtenemos $B(3) = \frac{15+20}{3^2+9} - \frac{20}{9} = -\frac{5}{28} < 0$. Los beneficios son negativos a partir de 2,25 años.

A los 2.25 años cambian de signo los beneficios. A los 2 años y 3 meses.

b) Utilizamos la derivada de la función para obtener los puntos críticos.

$$B(x) = \frac{5x+20}{x^2+9} - \frac{20}{9} \Rightarrow B'(x) = \frac{5(x^2+9) - 2x(5x+20)}{(x^2+9)^2} = \frac{5x^2+45-10x^2-40x}{(x^2+9)^2}$$

$$B'(x) = \frac{-5x^2-40x+45}{(x^2+9)^2} \left. \vphantom{\frac{-5x^2-40x+45}{(x^2+9)^2}} \right\} \Rightarrow \frac{-5x^2-40x+45}{(x^2+9)^2} = 0 \Rightarrow -5x^2-40x+45 = 0 \Rightarrow$$

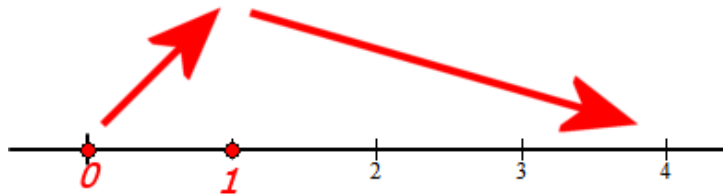
$$B'(x) = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + 8x - 9 = 0 \Rightarrow x = \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 + 36}}{2} = \frac{-8 \pm 10}{2} = \begin{cases} \frac{-8+10}{2} = 1 = x \\ \frac{-8-10}{2} = -9 = x \end{cases}$$

No consideramos el valor $x = -9$ por ser negativo y vemos que ocurre antes y después del año 1.

- En $(0,1)$ tomamos $x = 0.5$ y la derivada vale $B'(x) = \frac{-5x^2 - 40x + 45}{(x^2 + 9)^2}$. La función crece en $(0,1)$.
- En $(1, +\infty)$ tomamos $x = 2$ y la derivada vale $B'(2) = \frac{-20 - 80 + 45}{(2^2 + 9)^2} = \frac{-55}{169} < 0$. La función decrece en $(1, +\infty)$.

La función sigue el esquema siguiente.



La empresa tiene un máximo beneficio en el año 1.

Este beneficio máximo tiene un valor de $B(1) = \frac{5+20}{1^2+9} - \frac{20}{9} = \frac{5}{18} = 0.277777$ millones. Un beneficio de 277 777 €.