



Proves d'accés a la universitat

Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales

Serie 3

Responda a CUATRO de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué.

Cada cuestión vale 2,5 puntos.

Puede utilizar calculadora, pero no se permite el uso de calculadoras u otros aparatos que pueden almacenar datos o que pueden transmitir o recibir información.

Puede utilizar las páginas en blanco (páginas 14 y 15) para hacer esquemas, borradores, etc., o para acabar de responder a alguna cuestión si necesita más espacio. En este último caso, debe indicarlo claramente al final de la página de la cuestión correspondiente.

1. La siguiente tabla refleja el precio unitario, expresado en euros, de tres productos $P1$, $P2$ y $P3$, suministrados a un restaurante por dos empresas diferentes $E1$ y $E2$:

	E1	E2
P1	6	5
P2	5	8
P3	9	7

El restaurante tendrá que hacer dos pedidos: uno esta semana y otro la semana que viene. Esta semana necesita 8 unidades del producto $P1$, 5 unidades del producto $P2$ y 12 unidades del producto $P3$; mientras que para la próxima semana necesitará 10 unidades del producto $P1$, 15 unidades del producto $P2$ y 7 unidades del producto $P3$.

- a) Escriba en forma matricial la información que relaciona el precio unitario de los productos y las empresas suministradoras, y también la información de las cantidades de productos solicitados en cada uno de los dos pedidos que debe hacer el restaurante.

[1,25 puntos]

- b) Calcule a cuál de las dos empresas debe encargar el restaurante cada uno de los pedidos para que le salga más económico y a qué precio le saldrá cada uno.

[1,25 puntos]

2. Una empresa quiere fabricar un producto nuevo. Encarga un estudio de mercado que determina que la evolución de las ventas en los próximos seis años seguirá la función $f(t) = t^3 - 12t^2 + 36t$, en la que $f(t)$ representa la cantidad de miles de unidades vendidas en función del tiempo $t \in [0, 6]$ expresado en años.

- a) ¿Cuántas unidades venderá el primer año? Salvo el instante inicial ($t = 0$), ¿se prevé que habrá algún otro año en el que no se producirá ninguna venta?

[1,25 puntos]

- b) ¿En qué año se producirá el máximo número de ventas y cuántos productos se habrán vendido ese año?

[1,25 puntos]

3. Una fábrica especializada en ropa de deporte tiene problemas con el suministro de las fibras. Para satisfacer un pedido de camisetas y mallas solo dispone de 90 km de fibra de polipropileno, 3,2 km de fibra de poliamida y 6,8 km de fibra de elastano. Debe fabricar, por lo menos, 80 camisetas y 50 mallas.

Para fabricar cada pieza de ropa, tanto si es una camiseta como si son unas mallas, se necesitan en total 200 metros de fibra, de los cuales el 90 % son de polipropileno en ambos casos. En la composición de las camisetas hay además un 6 % de poliamida y un 4 % de elastano, y en la composición de las mallas hay un 2 % de poliamida y un 8 % de elastano.

El beneficio que el fabricante obtiene por cada camiseta que fabrica es de 5 € y por cada una de las mallas obtiene un beneficio de 3 €.

- a) Determine la función objetivo y las restricciones, y dibuje la región de las posibles opciones que tiene el fabricante para satisfacer el pedido con las fibras disponibles.

[1,25 puntos]

- b) Calcule cuántas camisetas y cuántas mallas deben fabricarse para que el beneficio sea máximo. ¿Cuál es este beneficio?

[1,25 puntos]

4. Considere la función $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$.

- a) Encuentre los valores de los parámetros a , b y c sabiendo que la función tiene un máximo en el punto $(2, 1)$ y un mínimo en el punto $(0, -1)$.

[1,25 puntos]

- b) Encuentre los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función para los valores de los parámetros a , b y c encontrados en el apartado anterior.

[1,25 puntos]

5. En una empresa de tecnología hay un total de 100 empleados divididos en tres secciones: administración, investigación y publicidad. Todos los empleados de cada sección cobran el mismo sueldo mensual: 2.000 euros los de administración, 2.400 euros los de investigación y 2.800 euros los de publicidad, y el gasto total mensual en salarios de la empresa es de 228.000 euros.

- a) Plantee y estudie el sistema de ecuaciones asociado. Justifique si se puede determinar el número de empleados de cada sección.

[1,25 puntos]

- b) Una reestructuración reciente ha obligado a despedir $\frac{1}{10}$ parte de los empleados de

administración, $\frac{1}{6}$ parte de los de investigación y $\frac{1}{5}$ parte de los de publicidad. Este hecho

ha supuesto un ahorro mensual en salarios de 33.200 euros. Determine cuántos empleados tenía cada sección de la empresa antes de la reestructuración.

[1,25 puntos]

6. Un centro de formación organiza un curso subvencionado que tiene un coste fijo de 9.000 €, al que hay que sumar una cantidad que varía según el número de alumnos del curso y que viene dada por la función $0,02x^3 - 24x$, en la que x representa el número de alumnos matriculados. El Consejo Comarcal ha otorgado al centro una subvención de 5.000 € para la organización del curso y el Ayuntamiento paga al centro 30 € por cada alumno matriculado.

El gasto que debe asumir el centro es la diferencia entre el coste total del curso y las dos subvenciones recibidas.

¿Cuántos alumnos deben matricularse al curso para que el gasto sea mínimo para el centro y cuál sería este gasto?

[2,5 puntos]

SOLUCIONES

1. La siguiente tabla refleja el precio unitario, expresado en euros, de tres productos $P1$, $P2$ y $P3$, suministrados a un restaurante por dos empresas diferentes $E1$ y $E2$:

	E1	E2
P1	6	5
P2	5	8
P3	9	7

El restaurante tendrá que hacer dos pedidos: uno esta semana y otro la semana que viene. Esta semana necesita 8 unidades del producto $P1$, 5 unidades del producto $P2$ y 12 unidades del producto $P3$; mientras que para la próxima semana necesitará 10 unidades del producto $P1$, 15 unidades del producto $P2$ y 7 unidades del producto $P3$.

- a) Escriba en forma matricial la información que relaciona el precio unitario de los productos y las empresas suministradoras, y también la información de las cantidades de productos solicitados en cada uno de los dos pedidos que debe hacer el restaurante. [1,25 puntos]
- b) Calcule a cuál de las dos empresas debe encargar el restaurante cada uno de los pedidos para que le salga más económico y a qué precio le saldrá cada uno. [1,25 puntos]

a) La matriz de precios es $C = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 5 & 8 \\ 9 & 7 \end{pmatrix}$, donde en las filas aparecen los precios de cada producto y en las

columnas los dos proveedores. La matriz de pedidos es $P = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 12 \\ 10 & 15 & 7 \end{pmatrix}$, donde en las filas aparecen el primer y segundo pedido y en las columnas las cantidades de cada uno de los tres productos.

b) Hacemos el producto matricial $P \cdot C$ para obtener el coste de los dos pedidos en cada proveedor.

$$P \cdot C = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 12 \\ 10 & 15 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 5 & 8 \\ 9 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \cdot 6 + 5 \cdot 5 + 12 \cdot 9 & 8 \cdot 5 + 5 \cdot 8 + 12 \cdot 7 \\ 10 \cdot 6 + 15 \cdot 5 + 7 \cdot 9 & 10 \cdot 5 + 15 \cdot 8 + 7 \cdot 7 \end{pmatrix} =$$

$$2 \times \boxed{3 \cdot 3} \times 2 \longrightarrow 2 \times 2$$

$$= \begin{pmatrix} 181 & 164 \\ 198 & 219 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{Pedido 1} \\ \text{Pedido 2} \end{matrix}$$

El primer pedido es más económico (164 euros) en la empresa E2 y el segundo pedido es más económico (198 euros) en la empresa E1.

2. Una empresa quiere fabricar un producto nuevo. Encarga un estudio de mercado que determina que la evolución de las ventas en los próximos seis años seguirá la función $f(t) = t^3 - 12t^2 + 36t$, en la que $f(t)$ representa la cantidad de miles de unidades vendidas en función del tiempo $t \in [0, 6]$ expresado en años.

a) ¿Cuántas unidades venderá el primer año? Salvo el instante inicial ($t = 0$), ¿se prevé que habrá algún otro año en el que no se producirá ninguna venta? [1,25 puntos]

b) ¿En qué año se producirá el máximo número de ventas y cuántos productos se habrán vendido ese año? [1,25 puntos]

a) Calculamos $f(1) = 1^3 - 12 \cdot 1^2 + 36 \cdot 1 = 25$. Venderá 25 000 unidades el primer año.

Buscamos cuando son iguales a 0 las ventas.

$$f(t) = 0 \Rightarrow t^3 - 12t^2 + 36t = 0 \Rightarrow t(t^2 - 12t + 36) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t^2 - 12t + 36 = 0 \rightarrow t = \frac{12 \pm \sqrt{(-12)^2 - 4(1)(36)}}{2} = \frac{12}{2} = 6 \end{cases}$$

No se producirán ventas el año 0 y el año 6, al final del periodo de estudio.

b) Buscamos los valores que anulan la derivada.

$$f(t) = t^3 - 12t^2 + 36t \Rightarrow f'(t) = 3t^2 - 24t + 36$$

$$f'(t) = 0 \Rightarrow 3t^2 - 24t + 36 = 0 \Rightarrow t^2 - 8t + 12 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = \frac{8 \pm \sqrt{(-8)^2 - 4(1)(12)}}{2} = \frac{8 \pm 4}{2} = \begin{cases} \frac{8+4}{2} = 6 \in [0, 6] \\ \frac{8-4}{2} = 2 \in [0, 6] \end{cases}$$

La función tiene dos puntos críticos: $t = 2$ y $t = 6$. Determinamos el signo de la derivada segunda para estos valores.

$$f'(t) = 3t^2 - 24t + 36 \Rightarrow f''(t) = 6t - 24 \Rightarrow \begin{cases} f''(2) = 6 \cdot 2 - 24 = -12 < 0 \\ f''(6) = 6 \cdot 6 - 24 = 12 > 0 \end{cases}$$

La segunda derivada es negativa para $t = 2$, por lo que la función presenta un máximo relativo en $t = 2$. En $t = 6$ hay un mínimo.

Para encontrar el máximo absoluto valoramos la función en $t = 2$ y en los extremos del intervalo $[0, 6]$.

$$f(0) = 0 \qquad f(2) = 2^3 - 12 \cdot 2^2 + 36 \cdot 2 = 32 \qquad f(6) = 0$$

El máximo de ventas se produce al segundo año con 32 000 unidades.

3. Una fábrica especializada en ropa de deporte tiene problemas con el suministro de las fibras. Para satisfacer un pedido de camisetas y mallas solo dispone de 90 km de fibra de polipropileno, 3,2 km de fibra de poliamida y 6,8 km de fibra de elastano. Debe fabricar, por lo menos, 80 camisetas y 50 mallas.

Para fabricar cada pieza de ropa, tanto si es una camiseta como si son unas mallas, se necesitan en total 200 metros de fibra, de los cuales el 90 % son de polipropileno en ambos casos. En la composición de las camisetas hay además un 6 % de poliamida y un 4 % de elastano, y en la composición de las mallas hay un 2 % de poliamida y un 8 % de elastano.

El beneficio que el fabricante obtiene por cada camiseta que fabrica es de 5 € y por cada una de las mallas obtiene un beneficio de 3 €.

a) Determine la función objetivo y las restricciones, y dibuje la región de las posibles opciones que tiene el fabricante para satisfacer el pedido con las fibras disponibles. [1,25 puntos]

b) Calcule cuántas camisetas y cuántas mallas deben fabricarse para que el beneficio sea máximo. ¿Cuál es este beneficio? [1,25 puntos]

a) Llamemos “x” al número de camisetas e “y” al número de mallas que fabrica.

Como cada camiseta le proporciona un beneficio de 5 € y cada malla 3 € el beneficio total es: $B(x, y) = 5x + 3y$. Esta es la función objetivo que deseamos maximizar.

Para cada camiseta se necesitan en total 200 metros de fibra, de los cuales el 90 % son de polipropileno. En la composición de las camisetas hay además un 6 % de poliamida y un 4 % de elastano $\rightarrow 0.90 \cdot 200 = 180$ metros de polipropileno, $0.06 \cdot 200 = 12$ metros de poliamida y $0.04 \cdot 200 = 8$ metros de elastano son necesarios para fabricar cada camiseta.

Para cada malla se necesitan en total 200 metros de fibra, de los cuales el 90 % son de polipropileno. En la composición de las mallas hay un 2 % de poliamida y un 8 % de elastano $\rightarrow 0.90 \cdot 200 = 180$ metros de polipropileno, $0.02 \cdot 200 = 4$ metros de poliamida y $0.08 \cdot 200 = 16$ metros de elastano son necesarios para fabricar cada malla.

Hacemos una tabla con los datos.

	Metros de polipropileno	Metros de poliamida	Metros de elastano
Nº camisetas (x)	180x	12x	8x
Nº mallas (y)	180y	4y	16y
TOTALES	180x + 180y	12x + 4y	8x + 16y

Las restricciones son:

“Debe fabricar, por lo menos, 80 camisetas y 50 mallas” $\rightarrow x \geq 80; y \geq 50$

“Solo dispone de 90 km de fibra de polipropileno, 3,2 km de fibra de poliamida y 6,8 km de fibra de elastano” $\rightarrow 180x + 180y \leq 90000; 12x + 4y \leq 3200; 8x + 16y \leq 6800$

Reunimos todas las restricciones en un sistema de inecuaciones.

$$\left. \begin{array}{l} x \geq 80 \\ y \geq 50 \\ 180x + 180y \leq 90000 \\ 12x + 4y \leq 3200 \\ 8x + 16y \leq 6800 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x \geq 80 \\ y \geq 50 \\ x + y \leq 500 \\ 3x + y \leq 800 \\ x + 2y \leq 850 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x \geq 80 \\ y \geq 50 \\ y \leq 500 - x \\ y \leq 800 - 3x \\ 2y \leq 850 - x \end{array} \right\}$$

Para dibujar la región factible primero dibujamos las rectas que la delimitan.

$x = 80$

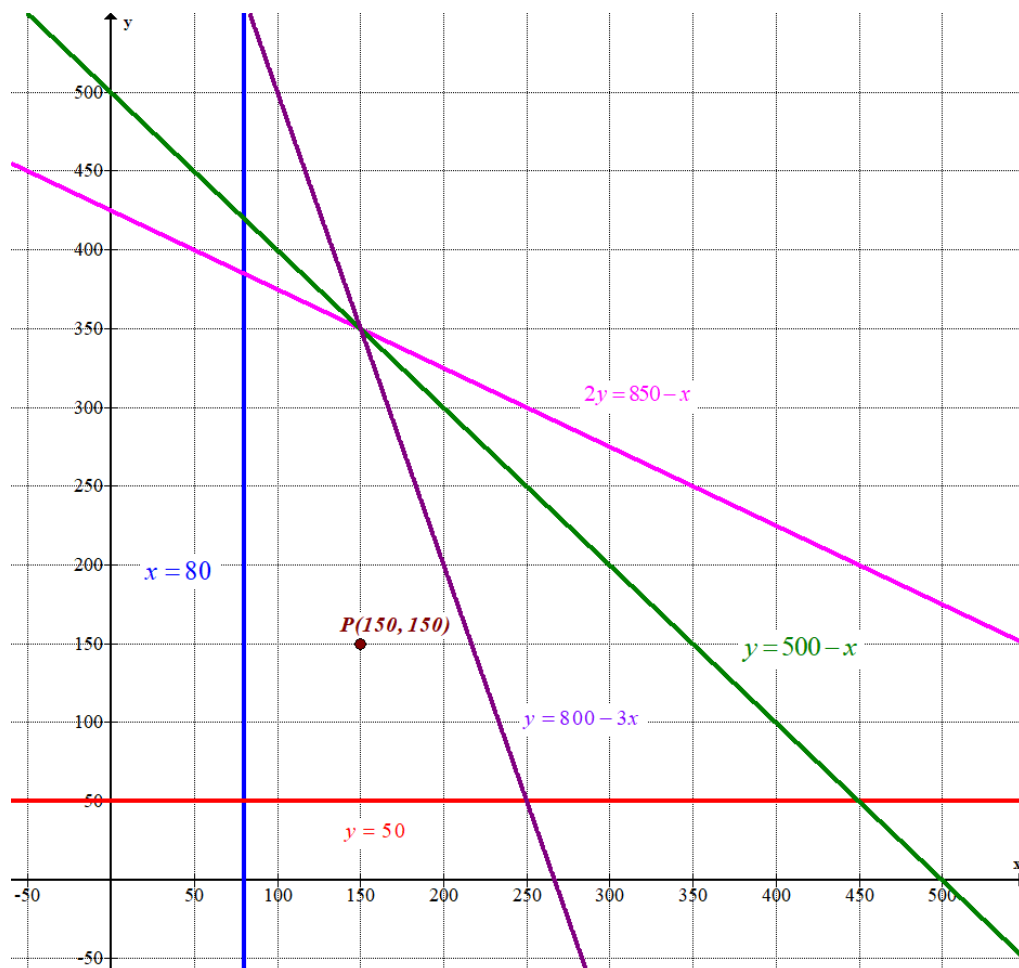
$y = 50$

$y = 500 - x$

$y = 800 - 3x$

$2y = 850 - x$

$x = 80$	y	x	$y = 50$	x	$y = 500 - x$	x	$y = 800 - 3x$	x	$y = \frac{850 - x}{2}$
80	0	0	50	0	500	0	800	80	385
80	385	80	50	150	350	150	350	150	350

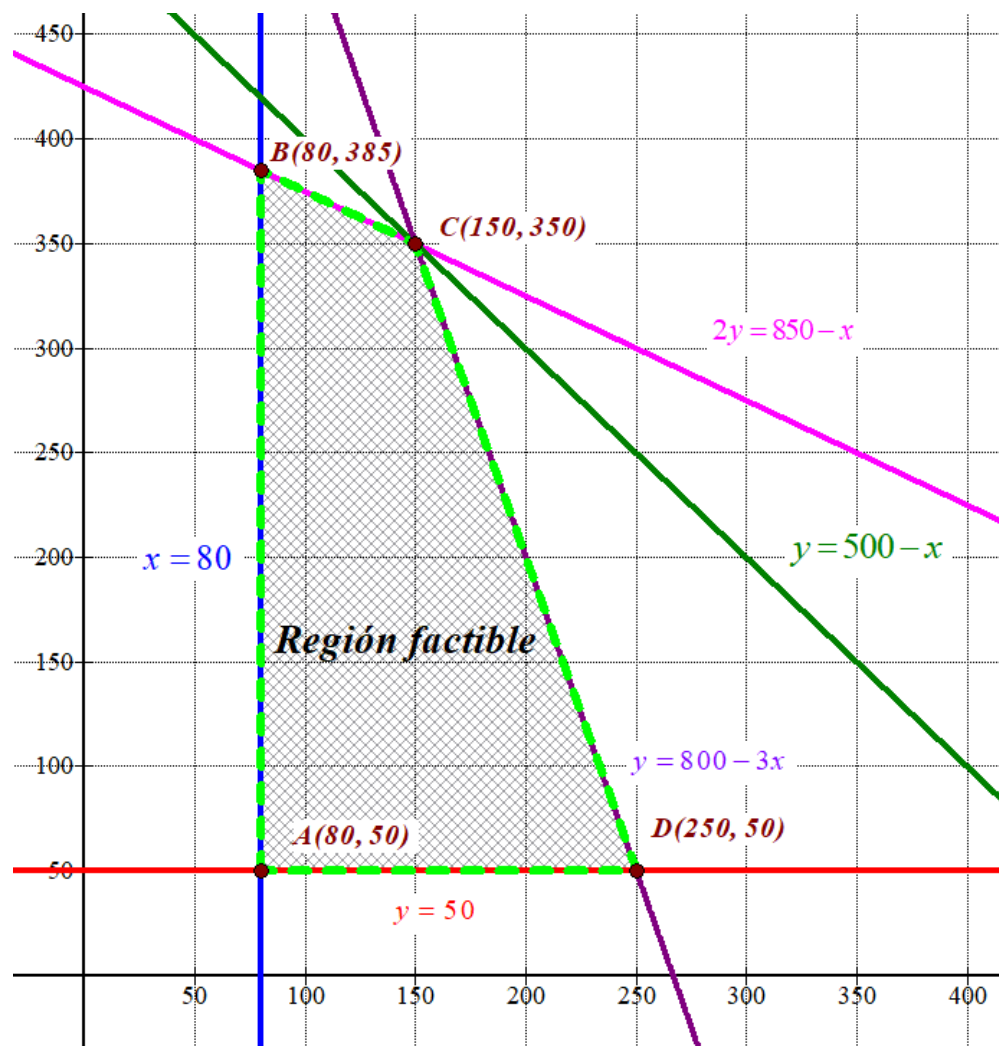


Como las restricciones son $\left. \begin{array}{l} x \geq 80 \\ y \geq 50 \\ y \leq 500 - x \\ y \leq 800 - 3x \\ 2y \leq 850 - x \end{array} \right\}$ la región factible es la región del plano situada a la

derecha de la recta vertical azul, por encima de la recta horizontal roja y por debajo de las rectas oblicuas verde, violeta y rosa. Lo comprobamos viendo si el punto $P(150, 150)$ perteneciente a esta región cumple las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 150 \geq 80 \\ 150 \geq 50 \\ 150 \leq 500 - 150 \\ 150 \leq 800 - 3 \cdot 150 \\ 2 \cdot 150 \leq 850 - 150 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 150 \geq 80 \\ 150 \geq 50 \\ 150 \leq 500 - 150 \\ 150 \leq 800 - 450 \\ 300 \leq 850 - 150 \end{array} \right\}$$

Se cumplen todas y la región factible es la zona rayada del dibujo.



- b) Para determinar con qué producción se puede obtener mayores beneficios, cumpliendo las restricciones, valoramos los beneficios $B(x, y) = 5x + 3y$ en cada uno de los vértices de la región factible buscando el máximo.

$$A(80, 50) \rightarrow B(80, 50) = 5 \cdot 80 + 3 \cdot 50 = 550$$

$$B(80, 385) \rightarrow B(80, 385) = 5 \cdot 80 + 3 \cdot 385 = 1555$$

$$C(150, 350) \rightarrow B(150, 350) = 5 \cdot 150 + 3 \cdot 350 = 1800 \text{ ¡Máximo!}$$

$$D(250, 50) \rightarrow B(250, 50) = 5 \cdot 250 + 3 \cdot 50 = 1400$$

El máximo beneficio que se puede conseguir es de 1800 € y se consigue en el punto C(150, 350) que significa fabricar 150 camisetas y 350 mallas.

4. Considere la función $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$.

a) Encuentre los valores de los parámetros a , b y c sabiendo que la función tiene un máximo en el punto $(2, 1)$ y un mínimo en el punto $(0, -1)$. [1,25 puntos]

b) Encuentre los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función para los valores de los parámetros a , b y c encontrados en el apartado anterior. [1,25 puntos]

a) La función tiene un máximo en el punto $(2, 1)$ y un mínimo en el punto $(0, -1)$, por lo que la derivada se anula en $x = 2$ y en $x = 0 \Rightarrow f'(2) = 0$ y $f'(0) = 0$.

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= ax^4 + bx^2 + c \Rightarrow f'(x) = 4ax^3 + 2bx \\ f'(0) &= 0 \\ f'(2) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} 4a \cdot 0^3 + 2b \cdot 0 &= 0 \\ 4a \cdot 2^3 + 2b \cdot 2 &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 32a + 4b = 0 \Rightarrow 8a + b = 0 \Rightarrow \boxed{b = -8a}$$

La función queda $f(x) = ax^4 - 8ax^2 + c$.

La función tiene un máximo en el punto $(2, 1)$ y un mínimo en el punto $(0, -1)$, por lo que la función pasa por estos puntos $\Rightarrow f(2) = 1$ y $f(0) = -1$.

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= ax^4 - 8ax^2 + c \\ f(0) &= -1 \\ f(2) &= 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} -1 &= a \cdot 0^4 - 8a \cdot 0^2 + c \\ 1 &= a \cdot 2^4 - 8a \cdot 2^2 + c \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} -1 &= c \\ 1 &= 16a - 32a + c \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 = -16a - 1 \Rightarrow 2 = -16a \Rightarrow \boxed{a = \frac{2}{-16} = \frac{-1}{8}}$$

Los valores buscados son $a = \frac{-1}{8} = -0.125$, $b = -8 \frac{-1}{8} = 1$ y $c = -1$.

b) Para los valores $a = \frac{-1}{8}$, $b = 1$ y $c = -1$ la función queda $f(x) = \frac{-x^4}{8} + x^2 - 1$.

Buscamos los puntos críticos de la función averiguando cuando se anula la derivada.

$$f(x) = \frac{-x^4}{8} + x^2 - 1 \Rightarrow f'(x) = \frac{-4x^3}{8} + 2x = \frac{-x^3}{2} + 2x$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-x^3}{2} + 2x = 0 \Rightarrow -x^3 + 4x = 0 \Rightarrow -x(x^2 - 4) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{aligned} &\boxed{x = 0} \\ &x^2 - 4 = 0 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow \boxed{x = \sqrt{4} = \pm 2} \end{aligned} \right.$$

La función presenta tres puntos críticos. Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos valores.

- En el intervalo $(-\infty, -2)$ tomamos $x = -3$ y la derivada vale

$$f'(-3) = \frac{-(-3)^3}{2} + 2(-3) = 7.5 > 0. \text{ La función crece en } (-\infty, -2).$$

- En el intervalo $(-2, 0)$ tomamos $x = -1$ y la derivada vale

$$f'(-1) = \frac{-(-1)^3}{2} + 2(-1) = -1.5 < 0. \text{ La función decrece en } (-2, 0).$$

- En el intervalo $(0, 2)$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale $f'(1) = \frac{-1^3}{2} + 2 \cdot 1 = 1.5 > 0$. La función crece en $(0, 2)$.

- En el intervalo $(2, +\infty)$ tomamos $x = 3$ y la derivada vale

$$f'(3) = \frac{-3^3}{2} + 2 \cdot 3 = -7.5 < 0. \text{ La función decrece en } (2, +\infty).$$

La función crece en $(-\infty, -2) \cup (0, 2)$ y decrece en $(-2, 0) \cup (2, +\infty)$.

5. En una empresa de tecnología hay un total de 100 empleados divididos en tres secciones: administración, investigación y publicidad. Todos los empleados de cada sección cobran el mismo sueldo mensual: 2.000 euros los de administración, 2.400 euros los de investigación y 2.800 euros los de publicidad, y el gasto total mensual en salarios de la empresa es de 228.000 euros.

a) Plantee y estudie el sistema de ecuaciones asociado. Justifique si se puede determinar el número de empleados de cada sección. [1,25 puntos]

b) Una reestructuración reciente ha obligado a despedir $\frac{1}{10}$ parte de los empleados de administración, $\frac{1}{6}$ parte de los de investigación y $\frac{1}{5}$ parte de los de publicidad. Este hecho ha supuesto un ahorro mensual en salarios de 33.200 euros. Determine cuántos empleados tenía cada sección de la empresa antes de la reestructuración. [1,25 puntos]

a) Llamamos x , y , z al número de empleados en administración, investigación y publicidad, respectivamente.

En una empresa de tecnología hay un total de 100 empleados divididos en tres secciones $\rightarrow$
 $x + y + z = 100$.

Cobran 2.000 euros los de administración, 2.400 euros los de investigación y 2.800 euros los de publicidad, y el gasto total mensual en salarios de la empresa es de 228.000 euros $\rightarrow$
 $2000x + 2400y + 2800z = 228000$.

Reunimos las ecuaciones en un sistema.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 100 \\ 2000x + 2400y + 2800z = 228000 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 100 \\ 5x + 6y + 7z = 570 \end{array} \right\}$$

No se pueden determinar el número de empleados en cada sección pues falta información, hay 3 incógnitas y solo 2 ecuaciones.

b) Al no pagar los sueldos de todos los despedidos se han ahorrado 33.200 euros. Podemos obtener una tercera ecuación con la nueva información.

$\frac{1}{10}$ parte de los empleados de administración, $\frac{1}{6}$ parte de los de investigación y $\frac{1}{5}$ parte de los de publicidad cobran, sumando todos sus sueldos 33200 € $\rightarrow$

$$\frac{x}{10} 2000 + \frac{y}{6} 2400 + \frac{z}{5} 2800 = 33200.$$

Añadimos esta ecuación al sistema anterior y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 100 \\ 5x + 6y + 7z = 570 \\ \frac{x}{10} 2000 + \frac{y}{6} 2400 + \frac{z}{5} 2800 = 33200 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 100 \\ 5x + 6y + 7z = 570 \\ 200x + 400y + 560z = 33200 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} x = 100 - y - z \\ \Rightarrow 5x + 6y + 7z = 570 \\ 5x + 10y + 14z = 830 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 5(100 - y - z) + 6y + 7z = 570 \\ 5(100 - y - z) + 10y + 14z = 830 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 500 - 5y - 5z + 6y + 7z = 570 \\ 500 - 5y - 5z + 10y + 14z = 830 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y + 2z = 70 \\ 5y + 9z = 330 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y = 70 - 2z \\ 5y + 9z = 330 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5(70 - 2z) + 9z = 330 \Rightarrow 350 - 10z + 9z = 330 \Rightarrow -z = -20 \Rightarrow \boxed{z = 20} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{y = 70 - 2 \cdot 20 = 30} \Rightarrow \boxed{x = 100 - 30 - 20 = 50}$$

Antes de la reestructuración había 50 empleados en administración, 30 en investigación y 20 en publicidad.

6. Un centro de formación organiza un curso subvencionado que tiene un coste fijo de 9.000 €, al que hay que sumar una cantidad que varía según el número de alumnos del curso y que viene dada por la función $0,02x^3 - 24x$, en la que x representa el número de alumnos matriculados. El Consejo Comarcal ha otorgado al centro una subvención de 5.000 € para la organización del curso y el Ayuntamiento paga al centro 30 € por cada alumno matriculado. El gasto que debe asumir el centro es la diferencia entre el coste total del curso y las dos subvenciones recibidas.
¿Cuántos alumnos deben matricularse al curso para que el gasto sea mínimo para el centro y cuál sería este gasto? [2,5 puntos]

Determinamos la expresión del gasto del curso en función del número de alumnos que participan. Llamamos $C(x)$ al coste del curso y $S(x)$ al total de las subvenciones que se reciben.

$$\left. \begin{array}{l} C(x) = 9000 + 0,02x^3 - 24x \\ S(x) = 5000 + 30x \\ G(x) = C(x) - S(x) \end{array} \right\} \Rightarrow G(x) = 9000 + 0,02x^3 - 24x - (5000 + 30x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{G(x) = 0,02x^3 - 54x + 4000}$$

La función que establece el gasto que debe realizar el centro para impartir el curso en función de los alumnos matriculados tiene la expresión: $G(x) = 0,02x^3 - 54x + 4000$.

Derivamos esta función y buscamos los valores de x que anulan la derivada (puntos críticos).

$$G(x) = 0,02x^3 - 54x + 4000 \Rightarrow G'(x) = 0,06x^2 - 54$$

$$G'(x) = 0 \Rightarrow 0,06x^2 - 54 = 0 \Rightarrow 0,06x^2 = 54 \Rightarrow x^2 = \frac{54}{0,06} = 900 \Rightarrow \boxed{x = \sqrt{900} = 30}$$

La función presenta un punto crítico en $x = 30$. Sustituimos este valor en la segunda derivada.

$$G'(x) = 0,06x^2 - 54 \Rightarrow G''(x) = 0,12x \Rightarrow G''(30) = 0,12 \cdot 30 = 3,6 > 0$$

Al ser positiva la segunda derivada la función presenta un mínimo relativo para $x = 30$. Hallamos el gasto para este valor: $G(30) = 0,02 \cdot 30^3 - 54 \cdot 30 + 4000 = 2920$.

Para que el gasto sea mínimo para el centro deben matricularse 30 alumnos en el curso. Este gasto mínimo es de un importe de 2920 euros.