



SÈRIE 3

1. La taula següent reflecteix el preu unitari, expressat en euros, de tres productes P_1 , P_2 i P_3 , subministrats a un restaurant per dues empreses diferents E_1 i E_2 :

	E_1	E_2
P_1	6	5
P_2	5	8
P_3	9	7

El restaurant haurà de fer dues comandes. Aquesta setmana necessita 8 unitats del producte P_1 , 5 unitats del producte P_2 i 12 unitats del producte P_3 . Mentre que per la setmana vinent necessitarà 10 unitats del producte P_1 , 15 unitats del producte P_2 i 7 unitats del producte P_3 .

- a) Escriviu en forma matricial la informació que relaciona el preu unitari i les empreses subministradores i també la informació de les quantitats de cada una de les dues comandes que vol fer el restaurant. *[1,25 punts]*
- b) Calculeu a quina de les dues empreses ha d'encarregar el restaurant cada una de les comandes per tal que li surti més econòmica i a quin preu li sortirà cadascuna. *[1,25 punts]*
- a) La matriu que relaciona el preu unitari de cada producte amb l'empresa subministradora és:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 5 & 8 \\ 9 & 7 \end{pmatrix}.$$

I les matrius files de les dues comandes són:

$$B = (8 \quad 5 \quad 12) \text{ i } C = (10 \quad 15 \quad 7)$$



Criteris de correcció

Matemàtiques aplicades a les ciències socials

- b) Per saber el preu total, en euros, de la primera comanda a cada una de les empreses calculem:

$$B \cdot A = (8 \quad 5 \quad 12) \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 5 & 8 \\ 9 & 7 \end{pmatrix} = (181 \quad 164).$$

Per tant la primera comanda és més econòmic fer-la a l'empresa E_2 i ens costarà 164 €.

Per saber el preu de la segona comanda a cada una de les empreses calculem:

$$C \cdot A = (10 \quad 15 \quad 7) \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 5 & 8 \\ 9 & 7 \end{pmatrix} = (198 \quad 219).$$

Per tant la segona comanda és més econòmic fer-la a l'empresa E_1 i ens costarà 198 €.

Criteris de correcció: a) Obtenció de la matriu A: 0,75 p. Obtenció dels vectors de les comandes: 0,25 p. cadascun. b) Plantejament: 0,25 p. Càlcul dels dos productes de matrius: 0,25 p. cadascun. Obtenció dels preus finals de les dues comandes: 0,25 p. Cadascun.



Criteris de correcció

Matemàtiques aplicades a les ciències socials

2. Una empresa vol fabricar un producte nou. Encomana un estudi de mercat que determina que l'evolució de les vendes al llarg dels propers sis anys seguirà la funció $f(t) = t^3 - 12t^2 + 36t$, en què $f(t)$ representa la quantitat de milers d'unitats venudes en funció del temps $t \in [0,6]$ expressat en anys.

- a) Quantes unitats vendrà el primer any? Tret de l'instant inicial ($t = 0$), es preveu que hi haurà algun altre any en el que no es produirà cap venda? [1,25 punts]
- b) En quin any es produirà el màxim nombre de vendes i quants productes s'hauran venut aquell any. [1,25 punts]

- a) Calculem $f(1) = 1 - 12 + 36 = 25$. Per tant, el primer any es vendran 25.000 unitats.

D'altra banda, observem que $f(t) = t^3 - 12t^2 + 36t = t \cdot (t - 6)^2$. Per tant, els únics instants en que no es produeix cap venda és a l'instant inicial $t = 0$ i al sisè any, $t = 6$.

- b) Si calculem la derivada $f'(t) = 3t^2 - 24t + 36 = 3 \cdot (t - 6) \cdot (t - 2)$, observem que s'anul·la en els punts $t = 2$ i $t = 6$. Sabem, per l'apartat anterior, que en l'instant $t = 6$ és l'únic $t > 0$ pel qual no s'ha produït cap venda, per tant serà un mínim. Observem que passa amb l'instant $t = 2$. Veiem que $f'(t) > 0$ per $t < 2$ i, en canvi $f'(t) < 0$ per $t \in (2,6)$. Per tant, com que nosaltres tenim definida la funció en $t \in [0,6]$, el màxim de vendes es produeix el segon any. Calculem $f(2) = 8 - 48 + 72 = 32$ i, per tant, el nombre de productes venuts aquest any és de 32.000 unitats.

Criteris de correcció: a) Obtenció de les vendes del primer any: 0,5 p. Obtenció de l'any en que no hi haurà vendes: 0,75 p. b) Càlcul de la derivada: 0,5 p. Obtenció de l'instant en què les vendes són màximes: 0,25 p. Justificació de que es tracta d'un màxim: 0,25 p. Obtenció de les vendes d'aquest any: 0,25 p.



Criteris de correcció

Matemàtiques aplicades a les ciències socials

3. Una fàbrica especialitzada en roba d'esport té problemes amb el subministrament de les fibres. Per satisfer una comanda de samarretes i malles només disposa de 90 km de fibra de polipropilè, 3,2 km de fibra de poliamida i 6,8 km de fibra d'elastà. Ha de fabricar com a mínim 80 samarretes i 50 malles.

Per fabricar cada peça de roba, tant si és una samarreta com si és una malla, calen en total 200 metres de fibra dels quals el 90% són de polipropilè en ambdós casos. En la composició de les samarretes hi ha, a més a més, un 6% de poliamida i un 4% d'elastà i en la composició de les malles hi ha un 2% de poliamida i un 8% d'elastà.

El benefici que el fabricant obté per cada samarreta que fabrica és de 5 € i per cada malla obté un benefici de 3 €.

- a) Determineu la funció objectiu, les restriccions, i dibuixeu la regió de les possibles opcions que té el fabricant per satisfer la comanda amb les fibres disponibles. [1,25 punts]
- b) Calculeu quantes samarretes i quantes malles s'han de fabricar perquè el benefici sigui màxim. Quin és aquest benefici? [1,25 punts]

- a) Les dades del problema són :

		Polipropilè		Poliamida		Elastà	
x nombre de samarretes que cal fabricar	90%	180 m	6%	12 m	4%	8 m	
y nombre de malles que cal fabricar	90%	180 m	2%	4 m	8%	16 m	
Total		$180x + 180y$		$12x + 4y$		$8x + 16y$	

Per tant, les restriccions són:

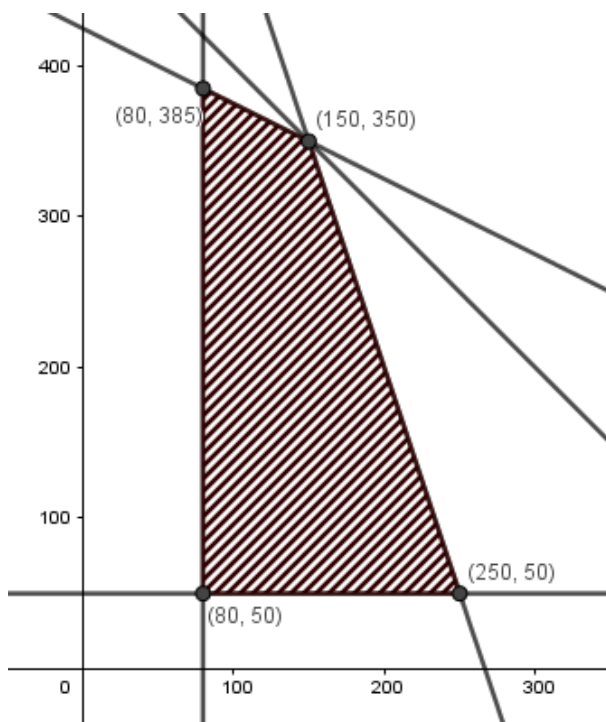
$$\begin{cases} x \geq 80 \\ y \geq 50 \\ 180x + 180y \leq 90.000 \\ 12x + 4y \leq 3.200 \\ 8x + 16y \leq 6.800 \end{cases}$$

Que simplificant ens queden:

$$\begin{cases} x \geq 80 \\ y \geq 50 \\ x + y \leq 500 \\ 3x + y \leq 800 \\ x + 2y \leq 850 \end{cases}$$



La regió factible és la següent:



I la funció objectiu, que ens dona el benefici, ve donada per $F(x, y) = 5x + 3y$

b) El benefici màxim s'assoleix en un dels vèrtex de la regió factible. Calculem en quin:

$A = (80, 50)$	$F(A) = 550 \text{ €}$
$B = (250, 50)$	$F(B) = 1.400 \text{ €}$
$C = (80, 385)$	$F(C) = 1.555 \text{ €}$
$D = (150, 350)$	$F(D) = 1.800 \text{ €}$

Per tant el benefici màxim és de 1.800 € i s'obté fabricant 150 samarretes i 350 malles.

Criteris de correcció: a) Càlcul de les restriccions: 0,5 p. Dibuix de la regió factible: 0,5 p. Obtenció de la funció objectiu: 0,25 p. b) Obtenció dels vèrtexs: 0,5 p. Obtenció del punt en què s'assoleix el màxim: 0,25 p. Obtenció del benefici màxim: 0,5 p.



Criteris de correcció

Matemàtiques aplicades a les ciències socials

4. Considereu la funció $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$
- a) Trobeu els valors dels paràmetres a , b i c sabent que té un màxim en el punt $(2,1)$ i un mínim en el punt $(0,-1)$. [1,25 punts]
- b) Trobeu els intervals de creixement i de decreixement de la funció pels valors dels paràmetres a , b i c trobats a l'apartat anterior. [1,25 punts]

- a) Comencem calculant la derivada de la funció: $f'(x) = 4ax^3 + 2bx$. Sabem que la funció passa pel punt $(0,-1)$. D'altra banda, $f(0) = c$. Per tant, deduïm que $c = -1$.

Sabem també que passa pel punt $(2,1)$, i com que $f(2) = 16a + 4b - 1$ deduïm que $16a + 4b - 1 = 1$, és a dir, que $16a + 4b = 2$.

Com que en $x=0$ i en $x=2$ hi ha extrems relatius, en aquests punts s'ha d'anul·lar la derivada. D'una banda, $f'(0) = 0$, i per tant no ens aporta informació addicional, però d'altra banda tenim que $f'(2) = 32a + 4b$. I, per tant, sabem que $32a + 4b = 0$.

Resolem el sistema

$$\begin{cases} 16a + 4b = 2 \\ 32a + 4b = 0 \end{cases}$$

I trobem que la solució és $a = -\frac{1}{8} = -0,125$, $b = 1$ i, ja sabíem que, $c = -1$.

- b) Tenim la funció $f(x) = -\frac{1}{8}x^4 + x^2 - 1$. Calculem la seva derivada

$$f'(x) = -\frac{1}{2}x^3 + 2x$$

Si l'igualem a zero tenim que $-\frac{1}{2}x^3 + 2x = 0$, que és equivalent a, $x \cdot (x^2 - 4) = 0$ que té per solucions $x = 0$, $x = 2$ i $x = -2$.

Observem que $f'(x) > 0$ si $x < -2$, que $f'(x) < 0$ si $x \in (-2,0)$, $f'(x) > 0$ si $x \in (0,2)$ i $f'(x) < 0$ si $x > 2$. Per tant, la funció és creixent en els intervals $(-\infty, -2) \cup (0,2)$ i és decreixent en $(-2,0) \cup (2, +\infty)$.

Criteris de correcció: a) Plantejament: 0,5 p. Obtenció dels paràmetres a, b i c: 0,25 p. cadascun. b) Càlcul de la derivada: 0,5 p. Obtenció dels punts crítics: 0,25 p. Obtenció dels intervals de creixement i decreixement: 0,25 p. Justificació de perquè la funció és creixent o decreixent: 0,25 p.



Criteris de correcció

Matemàtiques aplicades a les ciències socials

5. En una empresa de tecnologia hi ha un total de 100 empleats dividits en tres seccions: administració, recerca i publicitat. Tots els empleats de cada secció cobren el mateix sou mensual: 2.000 euros els d'administració, 2.400 euros els de recerca i 2.800 euros els de publicitat, i la despesa total mensual en salaris de l'empresa és de 228.000 euros.

- a) Plantegeu i estudeu el sistema d'equacions associat. Justifiqueu si es pot determinar el nombre d'empleats de cada secció. *[1,25 punts]*
- b) Una reestructuració recent ha obligat a acomiadar $\frac{1}{10}$ part dels empleats d'administració, $\frac{1}{6}$ part dels de recerca i $\frac{1}{5}$ part dels de publicitat. Aquest fet ha suposat un estalvi mensual en salaris de 33.200 euros. Determineu quants empleats tenia cada secció de l'empresa abans de la reestructuració. *[1,25 punts]*

- a) Considerem les variables x, y, z com el número d'empleats de les seccions d'administració, recerca i publicitat, respectivament. Obtenim el següent sistema d'equacions:

$$\begin{cases} x + y + z = 100 \\ 2.000x + 2.400y + 2.800z = 228.000 \end{cases}$$

que podem reescriure com

$$\begin{cases} x + y + z = 100 \\ 5x + 6y + 7z = 570 \end{cases}$$

Aplicarem el mètode de Gauss. Prenem les variables en l'ordre donat x, y, z . Tenim

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 100 \\ 5 & 6 & 7 & 570 \end{array} \right)$$

I, aplicant el mètode de Gauss s'obté

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 100 \\ 0 & 1 & 2 & 70 \end{array} \right)$$

Per tant tenim que la matriu i la matriu ampliada tenen rang 2, mentre que el número d'incògnites és 3, així que es tracta d'un sistema compatible indeterminat i no poden determinar el nombre d'empleats de cada secció.

- b) Plantegem el problema com abans però afegint l'equació addicional que ens dona l'enunciat:

$$\begin{cases} x + y + z = 100 \\ 5x + 6y + 7z = 570 \\ 2000 \cdot \frac{x}{10} + 2400 \cdot \frac{y}{6} + 2800 \cdot \frac{z}{5} = 33.200 \end{cases}$$

que reescrivim com a:

$$\begin{cases} x + y + z = 100 \\ 5x + 6y + 7z = 570 \\ 5x + 10y + 14z = 830 \end{cases}$$

Aplicant el mètode de Gauss tenim

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 100 \\ 5 & 6 & 7 & 570 \\ 5 & 10 & 14 & 830 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 100 \\ 0 & 1 & 2 & 70 \\ 0 & 5 & 9 & 330 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 100 \\ 0 & 1 & 2 & 70 \\ 0 & 0 & -1 & -20 \end{array} \right)$$



Criteris de correcció

Matemàtiques aplicades a les ciències socials

Podem concloure que és un sistema compatible determinat ja que, tant el rang de la matriu, com el de la matriu ampliada, com el nombre d'incògnites, és 3.

Resolent-lo s'obté la solució $x = 50$, $y = 30$ i $z = 20$. És a dir, inicialment hi havia 50 empleats d'administració, 30 de recerca i 20 de publicitat.

Criteris de correcció: a) Plantejament: 0,5 p. Justificació de que no podem determinar el nombre d'empleats de cada secció: 0,75 p. b) Plantejament: 0,25 p. Resolució i obtenció de la solució final: 1 p.



Criteris de correcció

Matemàtiques aplicades a les ciències socials

6. Un centre de formació organitza un curs subvencionat que té un cost fix de 9.000 € al qual cal sumar una quantitat que varia segons el nombre d'alumnes del curs i que ve donada per la funció $0,02x^3 - 24x$, en què x representa el nombre d'alumnes matriculats. El consell comarcal ha atorgat al centre una subvenció de 5.000 € per a l'organització del curs i l'ajuntament paga al centre 30 euros per cada alumne matriculat.

La despesa que ha d'assumir el centre és la diferència entre el cost total del curs i les dues subvencions rebudes.

Quants alumnes s'han de matricular al curs perquè la despesa sigui mínima per al centre i quina seria aquesta despesa? [2,5 punts]

El cost del curs, en funció del nombre d'alumnes matriculats x , serà: $C(x) = 9.000 + 0,02x^3 - 24x$.

La subvenció rebuda en funció del nombre d'alumnes serà: $S(x) = 5.000 + 30x$.

Per tant, la despesa en funció del nombre d'alumnes serà:

$$\begin{aligned} D(x) &= C(x) - S(x) \\ &= 9000 + 0,02x^3 - 24x - (5.000 + 30x) \\ &= 0,02x^3 - 54x + 4.000 \end{aligned}$$

Calculem la derivada: $D'(x) = 0,06x^2 - 54$. Igualant la derivada a zero obtenim que s'anul·la per $x = -30$ (que no té sentit en el nostre context) i per $x = 30$. Observem que $f'(x) < 0$ per $x \in (0,30)$ i, en canvi, $f'(x) > 0$ per $x > 30$. Per tant, en $x = 30$ hi ha un mínim.

Així doncs la despesa mínima s'obté amb 30 alumnes matriculats. Calculem $D(30) = 0,02 \cdot 30^3 - 54 \cdot 30 + 4.000 = 2.920$ €.

Per tant, la despesa és mínima si hi ha 30 alumnes matriculats i és de 2.920 €.

Criteris de correcció: a) Obtenció de la funció de costos: 0,25 p. Obtenció de la funció de subvencions: 0,25 p. Obtenció de la funció de despeses: 0,5 p. Càlcul de la derivada: 0,5 p. Obtenció del punt on s'obté el mínim: 0,5 p. Justificació de que es tracta d'un mínim: 0,25 p. Càlcul de la despesa mínima: 0,25 p..