



Generalitat de Catalunya
Consell Interuniversitari de Catalunya

Oficina d'Accés a la Universitat



Proves d'accés a la universitat

Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales

Serie 5

Responda a CUATRO de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué.

Cada cuestión vale 2,5 puntos.

Puede utilizar calculadora, pero no se permite el uso de calculadoras u otros aparatos que pueden almacenar datos o que pueden transmitir o recibir información.

Puede utilizar las páginas en blanco (páginas 14 y 15) para hacer esquemas, borradores, etc., o para acabar de responder a alguna cuestión si necesita más espacio. En este último caso, debe indicarlo claramente al final de la página de la cuestión correspondiente.

1. En los últimos meses, la demanda de gel hidroalcohólico ha bajado mucho respecto a los primeros momentos de la pandemia. La función $f(x) = \frac{12+8x}{4x+1}$, donde $x \in [0, +\infty)$ indica el número de meses transcurridos desde el inicio de la pandemia, da las ventas mensuales, en millones de litros, de gel hidroalcohólico.
 - a) Determine si la función $f(x)$ es continua en todo su dominio. Calcule la tasa de variación media del intervalo $[0, 1]$. ¿A qué valor tenderán las ventas mensuales de gel a lo largo del tiempo?
[1,25 puntos]
 - b) Compruebe que la función es decreciente en todo su dominio y encuentre la recta tangente en el punto $x = 1$.
[1,25 puntos]
2. Una gran pastelería especializada en cocas de San Juan elabora la masa de las cocas con harina y azúcar. En la pastelería disponen de 60 kg de harina y 30 kg de azúcar para las cocas de este año y quieren hacer de dos tipos: sin relleno y rellenas de crema.

Para elaborar la masa de una coca sin relleno se necesitan 500 g de harina y 300 g de azúcar. Este tipo de coca la ponen a la venta a 15 €. En cambio, para elaborar la masa de una coca rellena de crema se necesitan 400 g de harina y 120 g de azúcar. Y esta otra coca se vende a 25 €.

La pastelería ya ha cerrado el periodo de pedidos anticipados y, una vez contabilizados, se sabe que como mínimo tendrá que elaborar 60 cocas sin relleno y 30 cocas rellenas de crema. La pastelera jefa quiere saber cuántas cocas de cada tipo tendría que elaborar y vender para obtener el máximo de ingresos.

 - a) Determine la función objetivo y las restricciones. Dibuje la región factible.
[1,25 puntos]
 - b) Determine cuántas cocas de cada tipo hay que elaborar para obtener el máximo de ingresos y cuáles serán esos ingresos. ¿Sobrarán alguna cantidad de los ingredientes utilizados para elaborar la masa? En caso afirmativo, ¿de qué ingrediente y de qué cantidad se trata?
[1,25 puntos]

3. Una empresa distribuye dos tipos de paquetes a las farmacias (A y B). El paquete de tipo A contiene los siguientes productos: 5 termómetros digitales por infrarrojos, 30 mascarillas y 10 test rápidos de antígenos. El paquete de tipo B contiene 1 termómetro digital por infrarrojos, 15 mascarillas y 20 test rápidos de antígenos.

El precio del paquete de tipo A es de 550 € y el del paquete de tipo B es de 200 €. El precio de cada producto es el mismo en los dos tipos de paquetes.

- a) Con los datos del enunciado, ¿es posible encontrar el precio de un termómetro, el de una mascarilla y el de un test de antígenos? Justifique su respuesta planteando y clasificando un sistema de ecuaciones. Resuelva el sistema dejando la solución en función del precio del test de antígenos.

[1,75 puntos]

- b) Si un test de antígenos cuesta 4 €, ¿cuál será el precio de una mascarilla? ¿Y el de un termómetro?

[0,75 puntos]

4. El coste anual de la limpieza de las instalaciones de una empresa que abrió hace 20 años, expresado en centenares de euros, viene dado por la función

$$C(t) = \begin{cases} \frac{t^2}{10} + 10, & \text{si } t \in [0, 10] \\ 28 - \frac{(t-14)^2}{2}, & \text{si } t \in (10, 20] \end{cases}$$

en la que t es el tiempo expresado en años.

- a) ¿Cuál fue el coste de la limpieza de la empresa en el momento de abrir? ¿Y al cabo de los 10 años de funcionamiento? Compruebe que en este punto la función es continua. ¿Cuál es el coste de la limpieza de la empresa al cabo de 20 años de funcionamiento?

[1,25 puntos]

- b) Represente gráficamente la función $C(t)$. ¿En qué momento el coste de la limpieza de la empresa fue máximo?

[1,25 puntos]

5. Considere las matrices $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, donde a y b son dos parámetros reales.

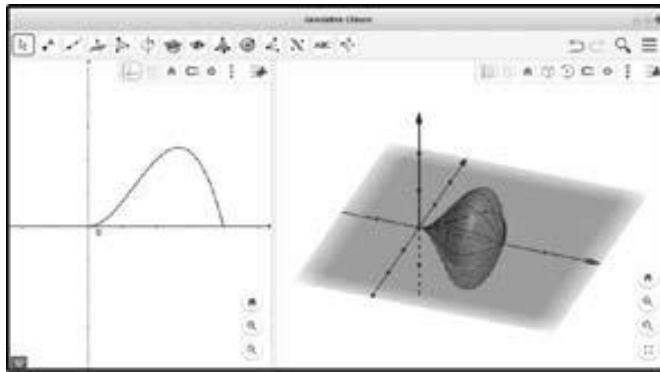
- a) Encuentre los valores de los parámetros a y b para los que se cumple que $A^2 - 2A = B$.

[1,25 puntos]

- b) Si $a = 1$ y $b = 1$, resuelva la ecuación matricial $2A = AX + B$.

[1,25 puntos]

6. Una joven emprendedora quiere crear una empresa de peonzas, que tiene pensado imprimir con una impresora 3D a partir de un diseño matemático hecho con el programa GeoGebra. Para hacerlo, hace girar el perfil de la función $f(x) = -x^3 + 2x^2$ alrededor del eje de abscisas entre los dos puntos de corte con este eje, y así obtiene una peonza tumbada. Las unidades están expresadas en centímetros.



- a)** ¿Cuál será la altura de la peonza? Observe que para obtenerla debe calcular la distancia entre los dos puntos de corte con el eje de abscisas.
[1 punto]
- b)** ¿Cuál será la anchura de la peonza? Observe que la anchura corresponde al doble del valor que toma la función en el máximo que hay entre los dos puntos de corte con el eje de abscisas.
[1,5 puntos]

SOLUCIONES

1. En los últimos meses, la demanda de gel hidroalcohólico ha bajado mucho respecto a los primeros momentos de la pandemia. La función $f(x) = \frac{12+8x}{4x+1}$, donde $x \in [0, +\infty)$ indica el número de meses transcurridos desde el inicio de la pandemia, da las ventas mensuales, en millones de litros, de gel hidroalcohólico.
- a) Determine si la función $f(x)$ es continua en todo su dominio. Calcule la tasa de variación media del intervalo $[0, 1]$. ¿A qué valor tenderán las ventas mensuales de gel a lo largo del tiempo? [1,25 puntos]
- b) Compruebe que la función es decreciente en todo su dominio y encuentre la recta tangente en el punto $x = 1$. [1,25 puntos]

- a) La función es racional y es continua en todos los valores reales menos los que anulan el denominador.

$$4x+1=0 \Rightarrow 4x=-1 \Rightarrow x=-\frac{1}{4} \notin [0, +\infty)$$

Como el valor que anula el denominador es negativo la función es continua en $[0, +\infty)$.

Calculamos la tasa de variación media del intervalo $[0, 1]$.

$$\left. \begin{aligned} f(0) &= \frac{12+8 \cdot 0}{4 \cdot 0 + 1} = 12 \\ f(1) &= \frac{12+8 \cdot 1}{4 \cdot 1 + 1} = 4 \end{aligned} \right\} \Rightarrow TVM_f[0,1] = \frac{f(1)-f(0)}{1-0} = \frac{4-12}{1} = -8$$

Calculamos el límite de la función cuando x tiende a $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{12+8x}{4x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{12}{x} + \frac{8x}{x}}{\frac{4x}{x} + \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{12}{x} + 8}{4 + \frac{1}{x}} = \frac{\frac{12}{\infty} + 8}{4 + \frac{1}{\infty}} = \frac{8}{4} = 2$$

Las ventas mensuales de gel a lo largo del tiempo tienden a ser de 2 millones de litros.

- b) Obtenemos la derivada de la función.

$$f(x) = \frac{12+8x}{4x+1} \Rightarrow f'(x) = \frac{8(4x+1) - 4(12+8x)}{(4x+1)^2} = \frac{32x+8-48-32x}{(4x+1)^2} = \frac{-40}{(4x+1)^2}$$

Esta expresión de la derivada siempre es negativa, pues el numerador es constante y negativo y el denominador siempre es positivo (elevado al cuadrado).

La función es decreciente en $[0, +\infty)$.

Hallamos la recta tangente en el punto $x = 1$.

$$\left. \begin{aligned} f(1) &= 4 \\ f'(1) &= \frac{-40}{(4+1)^2} = \frac{-8}{5} \\ y - f(1) &= f'(1)(x-1) \end{aligned} \right\} \Rightarrow y - 4 = \frac{-8}{5}(x-1) \Rightarrow y = \frac{-8}{5}x + \frac{8}{5} + 4 \Rightarrow \boxed{y = \frac{-8}{5}x + \frac{28}{5}}$$

2. Una gran pastelería especializada en cocas de San Juan elabora la masa de las cocas con harina y azúcar. En la pastelería disponen de 60 kg de harina y 30 kg de azúcar para las cocas de este año y quieren hacer de dos tipos: sin relleno y rellenas de crema.

Para elaborar la masa de una coca sin relleno se necesitan 500 g de harina y 300 g de azúcar. Este tipo de coca la ponen a la venta a 15 €. En cambio, para elaborar la masa de una coca rellena de crema se necesitan 400 g de harina y 120 g de azúcar. Y esta otra coca se vende a 25 €.

La pastelería ya ha cerrado el periodo de pedidos anticipados y, una vez contabilizados, se sabe que como mínimo tendrá que elaborar 60 cocas sin relleno y 30 cocas rellenas de crema. La pastelera jefa quiere saber cuántas cocas de cada tipo tendría que elaborar y vender para obtener el máximo de ingresos.

a) Determine la función objetivo y las restricciones. Dibuje la región factible.

[1,25 puntos]

b) Determine cuántas cocas de cada tipo hay que elaborar para obtener el máximo de ingresos y cuáles serán esos ingresos. ¿Sobrarán alguna cantidad de los ingredientes utilizados para elaborar la masa? En caso afirmativo, ¿de qué ingrediente y de qué cantidad se trata?

[1,25 puntos]

a) Llamamos “x” al número de cocas sin relleno e “y” al número de cocas con relleno de crema. Hacemos una tabla para ordenar los datos.

	Gramos de harina	Gramos de azúcar	Ingresos
Nº cocas sin relleno (x)	500x	300x	15x
Nº de cocas con relleno (y)	400y	120y	25y
TOTALES	500x + 400y	300x + 120y	15x + 25y

Queremos maximizar los ingresos (función objetivo) $\rightarrow f(x, y) = 15x + 25y$

Las restricciones planteadas en el problema las expresamos como inecuaciones:

“En la pastelería disponen de 60 kg de harina y 30 kg de azúcar para las cocas de este año” $\rightarrow$

$$500x + 400y \leq 60000; 300x + 120y \leq 30000$$

“Como mínimo tendrá que elaborar 60 cocas sin relleno y 30 cocas rellenas de crema” $\rightarrow$

$$x \geq 60; y \geq 30$$

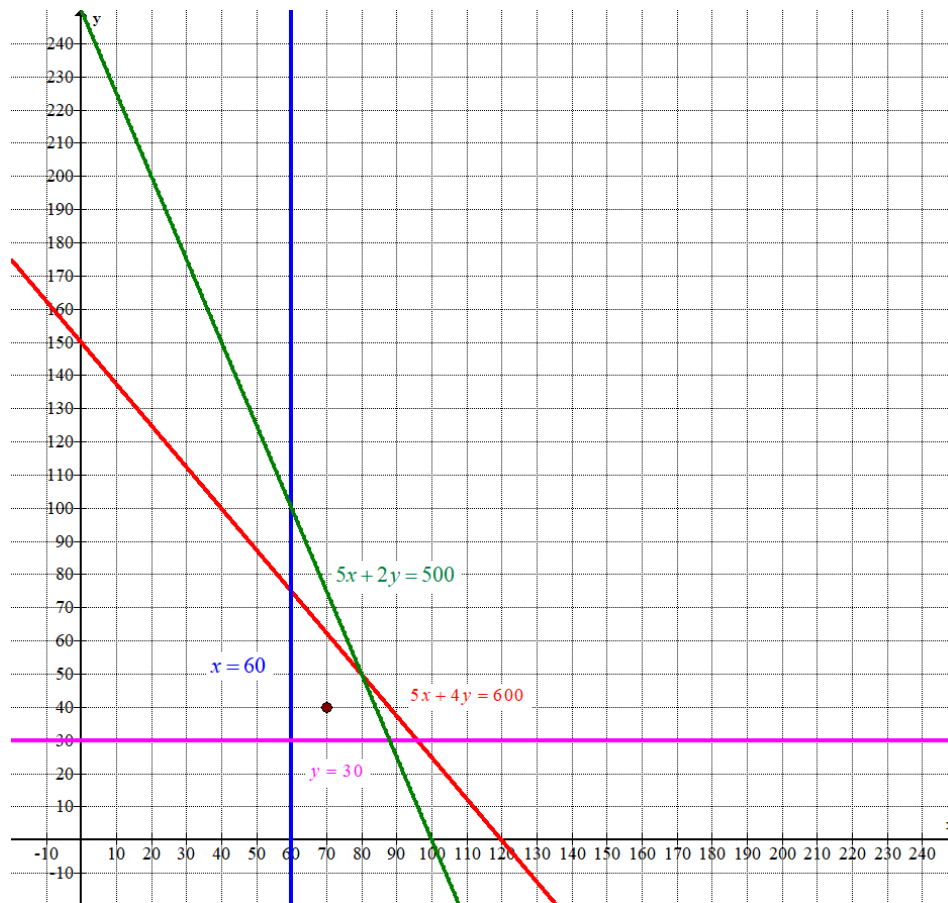
Las cantidades deben ser positivas $\rightarrow x \geq 0; y \geq 0$

Reunimos todas las restricciones en un sistema:

$$\left. \begin{array}{l} 500x + 400y \leq 60000 \\ 300x + 120y \leq 30000 \\ x \geq 60 \\ y \geq 30 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 5x + 4y \leq 600 \\ 5x + 2y \leq 500 \\ x \geq 60 \\ y \geq 30 \end{array} \right\}$$

Para dibujar la región factible dibujamos primero las rectas que la delimitan.

$5x + 4y = 600$	$5x + 2y = 500$	$x = 60$	$y = 30$	$x \geq 0; y \geq 0$																
$x \mid y = \frac{600 - 5x}{4}$ <table> <tr><td>0</td><td>150</td></tr> <tr><td>80</td><td>50</td></tr> </table>	0	150	80	50	$x \mid y = \frac{500 - 5x}{2}$ <table> <tr><td>0</td><td>250</td></tr> <tr><td>80</td><td>50</td></tr> </table>	0	250	80	50	$x = 60 \mid y$ <table> <tr><td>60</td><td>30</td></tr> <tr><td>60</td><td>75</td></tr> </table>	60	30	60	75	$x \mid y = 30$ <table> <tr><td>0</td><td>30</td></tr> <tr><td>60</td><td>30</td></tr> </table>	0	30	60	30	Primer Cuadrante
0	150																			
80	50																			
0	250																			
80	50																			
60	30																			
60	75																			
0	30																			
60	30																			



Como las restricciones son

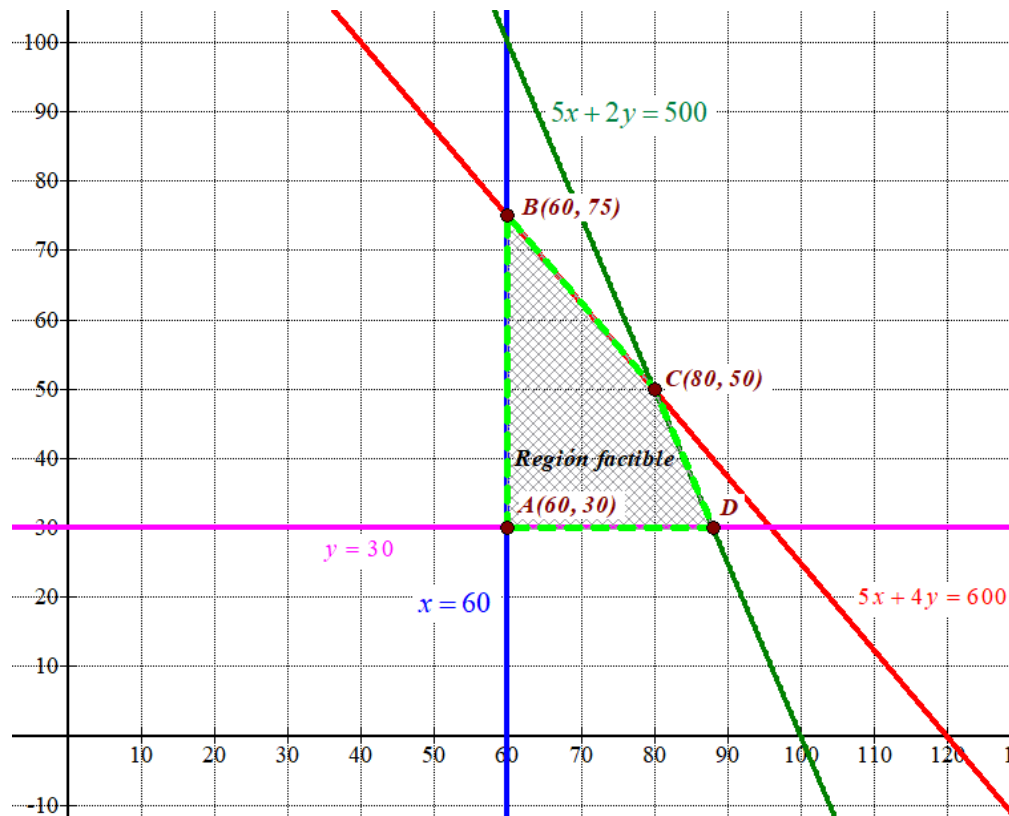
$$\left. \begin{array}{l} 5x + 4y \leq 600 \\ 5x + 2y \leq 500 \\ x \geq 60 \\ y \geq 30 \end{array} \right\} \text{ la región factible es la región del primer cuadrante}$$

situada por debajo de las rectas oblicuas roja y verde, por encima de la recta horizontal rosa y a la derecha de la recta vertical azul.

Comprobamos que el punto $P(70, 40)$ perteneciente a esta región cumple las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 5 \cdot 70 + 4 \cdot 40 \leq 600 \\ 5 \cdot 70 + 2 \cdot 40 \leq 500 \\ 70 \geq 60 \\ 40 \geq 30 \end{array} \right\} \text{ ¡Se cumplen todas!}$$

Coloreamos de gris la región factible.



Determinamos las coordenadas del vértice D.

$$\left. \begin{array}{l} y = 30 \\ 5x + 2y = 500 \end{array} \right\} \Rightarrow 5x + 60 = 500 \Rightarrow 5x = 440 \Rightarrow x = 88 \Rightarrow D(88, 30)$$

- b) Valoramos la función objetivo $f(x, y) = 15x + 25y$ en cada vértice de la región factible para determinar su valor máximo.

$$A(60, 30) \rightarrow f(60, 30) = 15 \cdot 60 + 25 \cdot 30 = 1650$$

$$B(60, 75) \rightarrow f(60, 75) = 15 \cdot 60 + 25 \cdot 75 = 2775 \text{ ¡Máximo!}$$

$$C(80, 50) \rightarrow f(80, 50) = 15 \cdot 80 + 25 \cdot 50 = 2450$$

$$D(88, 30) \rightarrow f(88, 30) = 15 \cdot 88 + 25 \cdot 30 = 2070$$

Los ingresos máximos ajustándose a las restricciones pedidas son 2775 € y se consiguen elaborando 60 cocas sin relleno y 75 rellenas de crema.

Fabricando las cocas indicadas tenemos:

	Gramos de harina	Gramos de azúcar
60 cocas sin relleno	30 000	18000
75 cocas con relleno	30 000	9000
TOTALES	60 000	27 000

Como se dispone de 60 kg de harina y 30 kg de azúcar, no sobra harina y sobran 3 kilogramos de azúcar.

3. Una empresa distribuye dos tipos de paquetes a las farmacias (A y B). El paquete de tipo A contiene los siguientes productos: 5 termómetros digitales por infrarrojos, 30 mascarillas y 10 test rápidos de antígenos. El paquete de tipo B contiene 1 termómetro digital por infrarrojos, 15 mascarillas y 20 test rápidos de antígenos.

El precio del paquete de tipo A es de 550 € y el del paquete de tipo B es de 200 €. El precio de cada producto es el mismo en los dos tipos de paquetes.

a) Con los datos del enunciado, ¿es posible encontrar el precio de un termómetro, el de una mascarilla y el de un test de antígenos? Justifique su respuesta planteando y clasificando un sistema de ecuaciones. Resuelva el sistema dejando la solución en función del precio del test de antígenos. [1,75 puntos]

b) Si un test de antígenos cuesta 4 €, ¿cuál será el precio de una mascarilla? ¿Y el de un termómetro? [0,75 puntos]

a) Llamamos “x” al precio de un termómetro digital, “y” al precio de una mascarilla y “z” al precio de un test rápido de antígenos.

El paquete de tipo A contiene 5 termómetros digitales por infrarrojos, 30 mascarillas y 10 test rápidos de antígenos y cuesta 550 € $\rightarrow 5x + 30y + 10z = 550$.

El paquete de tipo B contiene 1 termómetro digital por infrarrojos, 15 mascarillas y 20 test rápidos de antígenos y cuesta 200 € $\rightarrow x + 15y + 20z = 200$.

El sistema queda
$$\begin{cases} 5x + 30y + 10z = 550 \\ x + 15y + 20z = 200 \end{cases}$$
.

La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A = \begin{pmatrix} 5 & 30 & 10 \\ 1 & 15 & 20 \end{pmatrix}$. Esta matriz tiene rango 2 pues el menor de orden 2 que resulta de quitar la tercera columna tiene determinante no nulo:

$$\begin{vmatrix} 5 & 30 \\ 1 & 15 \end{vmatrix} = 75 - 30 = 45 \neq 0$$

Por lo tanto, el rango de la matriz de coeficientes es 2, al igual que el rango de la matriz ampliada, pero menor que el número de incógnitas (3) y aplicando el teorema de Rouché-Frobenius podemos decir que el sistema es compatible indeterminado.

Resolvemos el sistema.

$$\begin{cases} 5x + 30y + 10z = 550 \\ x + 15y + 20z = 200 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 6y + 2z = 110 \\ x = -15y - 20z + 200 \end{cases} \Rightarrow -15y - 20z + 200 + 6y + 2z = 110 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -9y - 18z = -90 \Rightarrow y + 2z = 10 \Rightarrow \boxed{y = 10 - 2z} \Rightarrow x = -15(10 - 2z) - 20z + 200 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = -150 + 30z - 20z + 200 = 10z + 50 \Rightarrow \begin{cases} x = 10z + 50 \\ y = 10 - 2z \\ z = z \end{cases}$$

El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones). El precio de un termómetro (x) y de una mascarilla (y) depende del precio de un test de antígenos (z).

b) Si el test vale 4 € el termómetro valdrá $4 \cdot 10 + 50 = 90$ euros. El precio de la mascarilla es de $10 - 2 \cdot 4 = 2$ euros.

4. El coste anual de la limpieza de las instalaciones de una empresa que abrió hace 20 años, expresado en centenares de euros, viene dado por la función

$$C(t) = \begin{cases} \frac{t^2}{10} + 10, & \text{si } t \in [0, 10] \\ 28 - \frac{(t-14)^2}{2}, & \text{si } t \in (10, 20] \end{cases}$$

en la que t es el tiempo expresado en años.

- a) ¿Cuál fue el coste de la limpieza de la empresa en el momento de abrir? ¿Y al cabo de los 10 años de funcionamiento? Compruebe que en este punto la función es continua. ¿Cuál es el coste de la limpieza de la empresa al cabo de 20 años de funcionamiento? [1,25 puntos]
 b) Represente gráficamente la función $C(t)$. ¿En qué momento el coste de la limpieza de la empresa fue máximo? [1,25 puntos]

a) Como $C(0) = \frac{0^2}{10} + 10 = 10$ el coste de la limpieza al abrir es de 1000 euros.

Como $C(10) = \frac{10^2}{10} + 10 = 20$ el coste de la limpieza al cabo de 10 años es de 2000 euros.

Comprobamos la continuidad de la función en $t = 10$.

$$\left. \begin{array}{l} C(10) = 20 \\ \lim_{t \rightarrow 10^-} C(t) = \lim_{t \rightarrow 10^-} \frac{t^2}{10} + 10 = 20 \\ \lim_{t \rightarrow 10^+} C(t) = \lim_{t \rightarrow 10^+} 28 - \frac{(t-14)^2}{2} = 28 - \frac{(10-14)^2}{2} = 20 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{t \rightarrow 10^-} C(t) = \lim_{t \rightarrow 10^+} C(t) = C(10) = 20$$

La función es continua en $t = 10$.

Como $C(20) = 28 - \frac{(20-14)^2}{2} = 10$ al cabo de 20 años el coste de la limpieza es de 1000 €.

- b) La gráfica son dos trozos de dos parábolas. Hallamos el vértice de cada una de ellas viendo cuando se anula la derivada.

$$C(t) = \begin{cases} \frac{t^2}{10} + 10, & \text{si } t \in [0, 10] \\ 28 - \frac{(t-14)^2}{2}, & \text{si } t \in (10, 20] \end{cases} \Rightarrow C'(t) = \begin{cases} \frac{2t}{10} = \frac{t}{5}, & \text{si } t \in [0, 10) \\ -\frac{2(t-14)}{2} = -t + 14, & \text{si } t \in (10, 20] \end{cases}$$

$$C'(t) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{t}{5} = 0 \rightarrow t = 0 \in [0, 10) \\ -t + 14 = 0 \rightarrow t = 14 \in (10, 20] \end{cases}$$

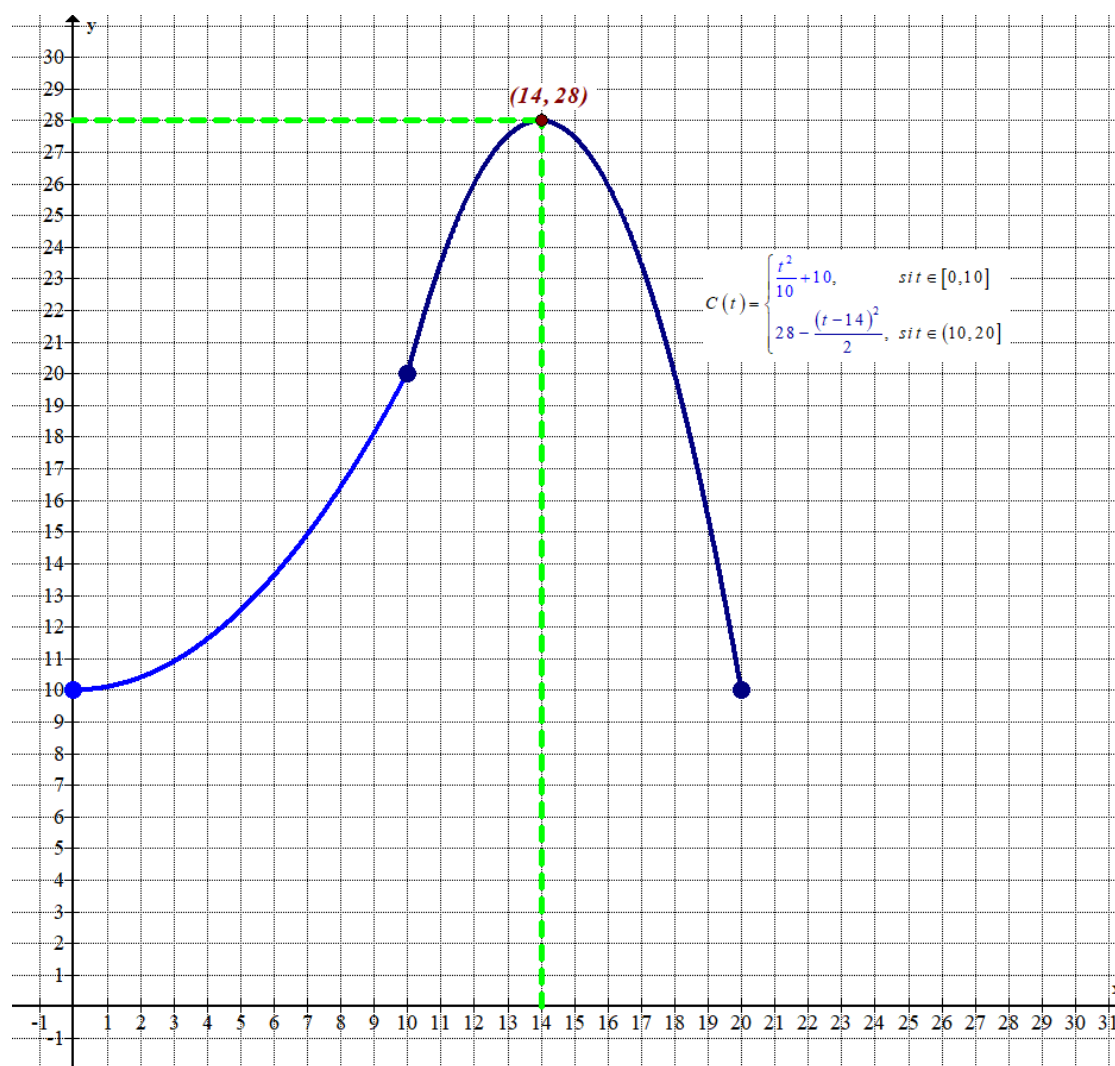
De 0 a 10 la función es creciente pues su derivada $C'(t) = \frac{t}{5}$ es positiva. De 10 a 14 la función es creciente pues su derivada $C'(t) = 14 - t$ es positiva. De 14 a 20 la derivada $C'(t) = 14 - t$ es negativa y la función es decreciente.

$$sit \in [0, 10]$$

t	$C(t) = \frac{t^2}{10} + 10$
0	10
5	12.5
10	20

$$sit \in (10, 20]$$

t	$C(t) = 28 - \frac{(t-14)^2}{2}$
12	26
14	28
20	10



El coste de la limpieza de la empresa fue máximo al cabo del año 14, siendo el coste de 2800 euros.

5. Considere las matrices $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, donde a y b son dos parámetros reales.

a) Encuentre los valores de los parámetros a y b para los que se cumple que $A^2 - 2A = B$.
[1,25 puntos]

b) Si $a = 1$ y $b = 1$, resuelva la ecuación matricial $2A = A \cdot X + B$. [1,25 puntos]

a) Resolvemos la ecuación matricial.

$$\begin{aligned} A^2 - 2A = B &\Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{pmatrix} a^2 & ab+ba \\ 0 & a^2 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a^2-2a & 2ab-2b \\ 0 & a^2-2a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} a^2-2a=0 \\ 2ab-2b=1 \\ 0=0 \\ a^2-2a=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2ab-2b=1 \\ a^2-2a=0 \rightarrow a(a-2)=0 \rightarrow \begin{cases} a=0 \\ a=2 \end{cases} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{Si } \boxed{a=0} \Rightarrow 0-2b=1 \Rightarrow \boxed{b=-\frac{1}{2}}$$

$$\text{Si } \boxed{a=2} \Rightarrow 4b-2b=1 \Rightarrow 2b=1 \Rightarrow \boxed{b=\frac{1}{2}}$$

Hay dos soluciones: $A = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ o bien $A = \begin{pmatrix} 2 & 1/2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

b) Despejamos X en la ecuación matricial.

$$2A = A \cdot X + B \Rightarrow 2A - B = AX \Rightarrow A^{-1}(2A - B) = X \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2A^{-1}A - A^{-1}B = X \Rightarrow X = 2I - A^{-1}B$$

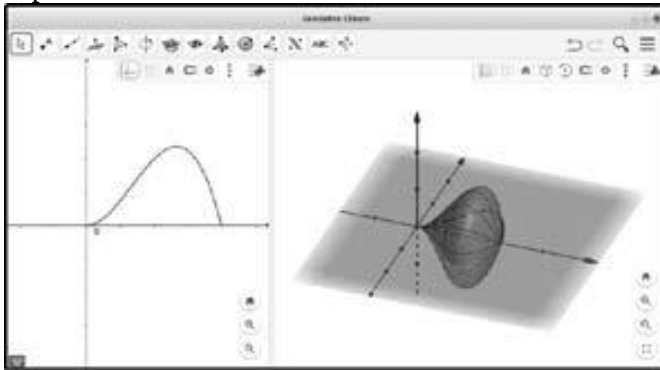
Si $a = 1$ y $b = 1$ la matriz queda $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculamos la inversa de la matriz A .

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^T)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Determinamos la matriz X .

$$X = 2I - A^{-1}B = 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

6. Una joven emprendedora quiere crear una empresa de peonzas, que tiene pensado imprimir con una impresora 3D a partir de un diseño matemático hecho con el programa GeoGebra. Para hacerlo, hace girar el perfil de la función $f(x) = -x^3 + 2x^2$ alrededor del eje de abscisas entre los dos puntos de corte con este eje, y así obtiene una peonza tumbada. Las unidades están expresadas en centímetros.



- a) ¿Cuál será la altura de la peonza? Observe que para obtenerla debe calcular la distancia entre los dos puntos de corte con el eje de abscisas.
[1 punto]
- b) ¿Cuál será la anchura de la peonza? Observe que la anchura corresponde al doble del valor que toma la función en el máximo que hay entre los dos puntos de corte con el eje de abscisas.
[1,5 puntos]

a) Hallamos los puntos de corte de la gráfica de la función $f(x) = -x^3 + 2x^2$ con el eje de abscisas.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = -x^3 + 2x^2 \\ \text{Eje } OX \rightarrow y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow -x^3 + 2x^2 = 0 \Rightarrow x^2(-x + 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ -x + 2 = 0 \rightarrow x = 2 \end{cases}$$

La altura de la peonza es de 2 centímetros.

b) Obtenemos los puntos críticos de la función.

$$\begin{aligned} f(x) &= -x^3 + 2x^2 \Rightarrow f'(x) = -3x^2 + 4x \\ f'(x) &= 0 \Rightarrow -3x^2 + 4x = 0 \Rightarrow x(-3x + 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ -3x + 4 = 0 \rightarrow x = \frac{4}{3} \end{cases} \end{aligned}$$

Sustituimos $x = \frac{4}{3}$ en la segunda derivada para averiguar si es un máximo.

$$f'(x) = -3x^2 + 4x \Rightarrow f''(x) = -6x + 4 \Rightarrow f''\left(\frac{4}{3}\right) = -6 \cdot \frac{4}{3} + 4 = -4 < 0$$

Como la segunda derivada es negativa la función tiene un máximo en $x = \frac{4}{3} \in (0, 2)$.

Como $f\left(\frac{4}{3}\right) = -\left(\frac{4}{3}\right)^3 + 2\left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{32}{27}$ la anchura de la peonza es de $2 \cdot \frac{32}{27} = \frac{64}{27} \approx 2.37$ centímetros.