



**PRUEBA DE EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL
ACCESO A LA UNIVERSIDAD Y PRUEBAS DE ADMISIÓN
ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS
CONVOCATORIA ORDINARIA, CURSO 2022-2023**

MATEMÁTICAS II

- Instrucciones:**
- a) **Duración: 1 hora y 30 minutos**
 - b) **Este examen consta de 8 ejercicios distribuidos en 2 bloques (A y B) de 4 ejercicios cada uno.**
 - c) Cada ejercicio tiene un valor máximo de 2.5 puntos.
 - d) **Se realizarán únicamente cuatro ejercicios, independientemente del bloque al que pertenezcan. En caso de responder a más de cuatro ejercicios, se corregirán únicamente los cuatro que aparezcan físicamente en primer lugar.**
 - e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, ni gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.
 - f) En la puntuación máxima de cada ejercicio están contemplados 0,25 puntos para valorar la expresión correcta de los procesos y métodos utilizados.

BLOQUE A

EJERCICIO 1 (2.5 puntos)

Sea la función $f: [-2, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} 5x+1 & \text{si } -2 \leq x \leq 0 \\ e^x \cos(x) & \text{si } 0 < x \leq 2\pi \end{cases}$.

- a) **[2 puntos]** Halla los extremos relativos y absolutos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).
- b) **[0,5 puntos]** Determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = \frac{\pi}{2}$.

EJERCICIO 2 (2.5 puntos)

Sea $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x(\ln(x))^2$ (ln denota la función logaritmo neperiano).

- a) **[1,25 puntos]** Calcula, si existen, sus extremos relativos (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).
- b) **[1,25 puntos]** Calcula, si existen, sus extremos absolutos (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

EJERCICIO 3 (2.5 puntos)

Calcula a con $0 < a < 1$, tal que $\int_a^1 \frac{\ln(x)}{x} dx + 2 = 0$ (ln denota la función logaritmo neperiano).

EJERCICIO 4 (2.5 puntos)

Considera las funciones $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $g: \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = 5 - x^2$ y $g(x) = \frac{4}{x^2}$.

- a) **[1,25 puntos]** Esboza las gráficas de las dos funciones y calcula los puntos de corte entre ellas.
- b) **[1,25 puntos]** Calcula la suma de las áreas de los recintos limitados por las gráficas de f y g .



**PRUEBA DE EVALUACIÓN DE BACHILLERATO
PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD Y PRUEBAS
DE ADMISIÓN
ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS
CONVOCATORIA ORDINARIA, CURSO 2022-2023**

MATEMÁTICAS II

BLOQUE B

EJERCICIO 5 (2.5 puntos)

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ e I la matriz identidad de orden 3.

- a) **[1 punto]** Halla los valores de m para que la matriz $A - mI$ no tenga inversa.
- b) **[1,5 puntos]** Halla x , distinto de cero, para que $A - xI$ sea la inversa de la matriz $\frac{1}{x}(A - I)$.

EJERCICIO 6 (2.5 puntos)

El dueño de un bar ha comprado refrescos, cerveza y vino por un importe de 500 euros sin incluir impuestos. El gasto en vino es 60 euros menos que los gastos en refrescos y cerveza conjuntamente, sin incluir impuestos. Teniendo en cuenta que los impuestos de los refrescos, la cerveza y el vino son el 6%, el 12% y el 30%, respectivamente, entonces el importe total de la factura incluyendo impuestos ha ascendido a 592,4 euros. Calcula el importe, incluyendo impuestos, invertido en cada una de las bebidas.

EJERCICIO 7 (2.5 puntos)

Considera los planos $\pi_1 \equiv x - y + z = 0$ y $\pi_2 \equiv x + y = 2$.

- a) **[1,5 puntos]** Calcula la distancia entre la recta intersección de π_1 y π_2 y el punto $P(2, 6, -2)$.
- b) **[1 punto]** Halla el ángulo que forman π_1 y π_2 .

EJERCICIO 8 (2.5 puntos)

Calcula el volumen del tetraedro que limita el plano determinado por los puntos $A(0, 2, -2)$, $B(3, 2, 1)$ y $C(2, 3, 2)$ con los planos cartesianos.

SOLUCIONES

EJERCICIO 1 (2.5 puntos)

Sea la función $f: [-2, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} 5x+1 & \text{si } -2 \leq x \leq 0 \\ e^x \cos(x) & \text{si } 0 < x \leq 2\pi \end{cases}$.

- a) **[2 puntos]** Halla los extremos relativos y absolutos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).
 b) **[0,5 puntos]** Determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = \frac{\pi}{2}$.

- a) En el intervalo $-2 \leq x \leq 0$ la función es $f(x) = 5x+1$ una recta creciente, por lo que el valor mínimo lo alcanza en $x = -2$ y el máximo en $x = 0$. Como $f(-2) = 5(-2)+1 = -9$ y $f(0) = 5(0)+1 = 1$ tenemos que el valor mínimo en $[-2, 0]$ es -9 y el máximo es 1 .

En el intervalo $0 < x \leq 2\pi$ la función es $f(x) = e^x \cos(x)$ usamos la derivada para obtener los puntos críticos de la función.

$$f'(x) = e^x \cos(x) - e^x \sin(x) = e^x (\cos(x) - \sin(x))$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow e^x (\cos(x) - \sin(x)) = 0 \Rightarrow \{e^x \neq 0\} \Rightarrow \cos(x) - \sin(x) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos(x) = \sin(x) \Rightarrow \{0 < x \leq 2\pi\} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} \\ x = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4} \end{cases}$$

Estudiamos el signo de la segunda derivada en estos valores.

$$f'(x) = e^x (\cos(x) - \sin(x)) \Rightarrow f''(x) = e^x (\cos(x) - \sin(x)) + e^x (-\sin(x) - \cos(x)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f''(x) = e^x (\cos(x) - \sin(x) - \sin(x) - \cos(x)) = e^x (-2\sin(x)) = -2e^x \sin(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2e^{\pi/4} \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = -e^{\pi/4} \sqrt{2} < 0 \rightarrow \text{¡Máximo!} \\ f''\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -2e^{5\pi/4} \sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) = e^{\pi/4} \sqrt{2} > 0 \rightarrow \text{¡Mínimo!} \end{cases}$$

La función presenta un máximo relativo en $x = \frac{\pi}{4}$. En dicho valor la función vale

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = e^{\pi/4} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\pi/4} \approx 1.55.$$

La función presenta un mínimo relativo en $x = \frac{5\pi}{4}$. En dicho valor la función vale

$$f\left(\frac{5\pi}{4}\right) = e^{5\pi/4} \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} e^{5\pi/4} \approx -35.88.$$

Comprobamos si la función es continua en $x = 0$.

$$\left. \begin{array}{l} f(0) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 5x + 1 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^x \cos(x) = e^0 \cos(0) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$$

La función es continua en el intervalo $x = 0$.

En $x = 0$ la función cambia de definición y no tiene un máximo relativo pues al tener un máximo relativo en $x = \frac{\pi}{4}$ significa que la función crece en el intervalo $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$.

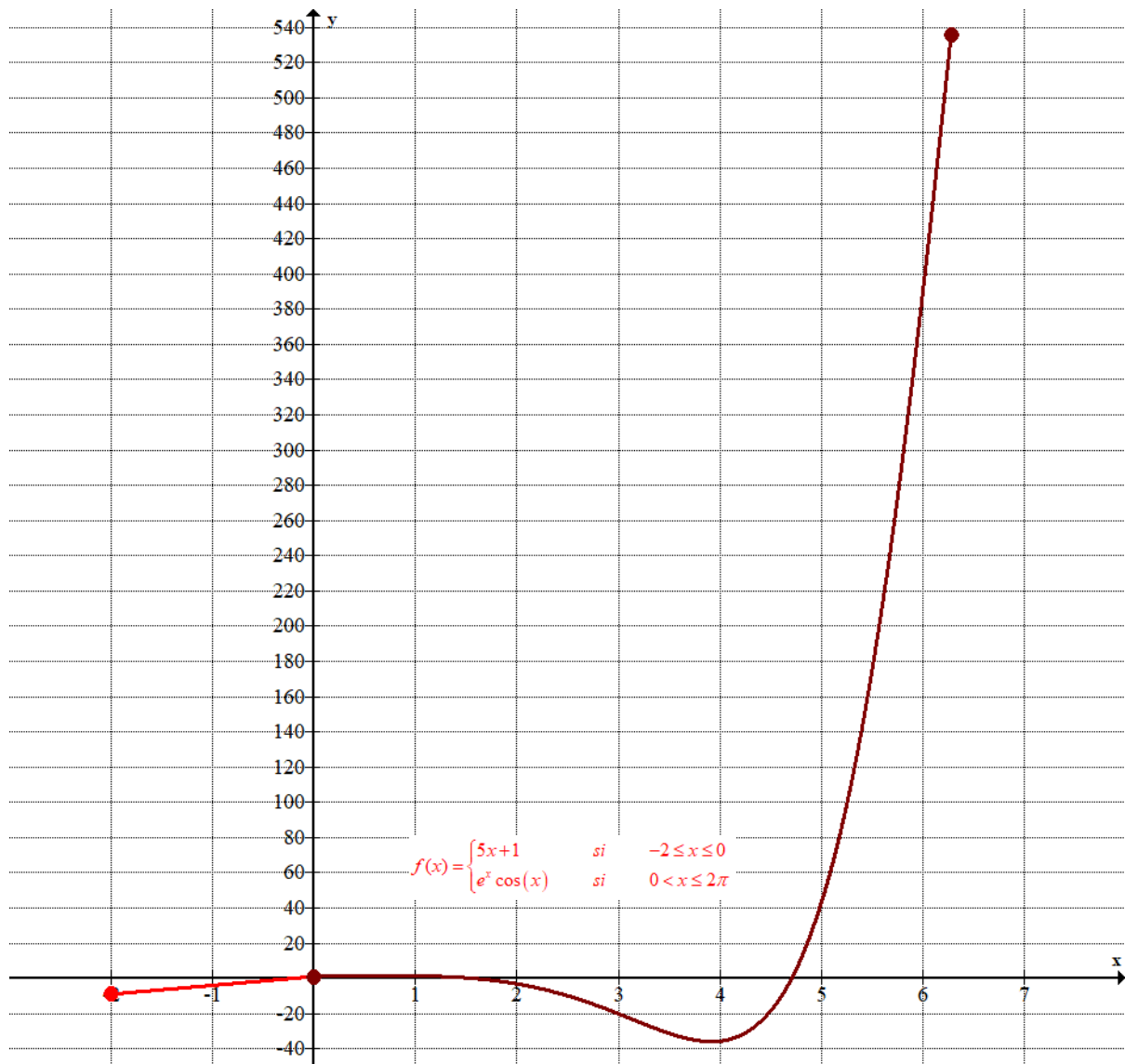
El máximo relativo de la función es $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\pi/4}\right)$ y el mínimo relativo es $\left(\frac{5\pi}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{2} e^{5\pi/4}\right)$

Reunimos toda la información obtenida para decidir donde está el máximo y mínimo absoluto de la función. También valoramos la función en los extremos del intervalo de definición $[-2, 2\pi]$.

- El valor mínimo en $[-2, 0]$ está en $x = -2$ y es -9 y el máximo está en $x = 0$ y es 1 .
- El valor mínimo relativo en $[0, 2\pi]$ está en $x = \frac{5\pi}{4}$ y es -35.88 y el máximo relativo está en $x = \frac{\pi}{4}$ y es 1.55 .
- La función en $x = 2\pi$ vale $e^{2\pi} \cos(2\pi) = e^{2\pi} \approx 535.49$.

El máximo absoluto está en $x = 2\pi$ con valor $e^{2\pi} \approx 535.49$.

El mínimo absoluto está en $x = \frac{5\pi}{4}$ y su valor es $-\frac{\sqrt{2}}{2} e^{5\pi/4} \approx -35.88$.



b) La función en un entorno de $x = \frac{\pi}{2}$ es $f(x) = e^x \cos(x)$.

La ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = \frac{\pi}{2}$ es:

$$\left. \begin{aligned} f\left(\frac{\pi}{2}\right) &= e^{\pi/2} \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \\ f'\left(\frac{\pi}{2}\right) &= e^{\pi/2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) \right) = -e^{\pi/2} \\ y - f\left(\frac{\pi}{2}\right) &= f'\left(\frac{\pi}{2}\right) \left(x - \frac{\pi}{2} \right) \end{aligned} \right\} \Rightarrow y - 0 = -e^{\pi/2} \left(x - \frac{\pi}{2} \right) \Rightarrow \boxed{y = -e^{\pi/2} \left(x - \frac{\pi}{2} \right)}$$

EJERCICIO 2 (2.5 puntos)

Sea $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x(\ln(x))^2$ (ln denota la función logaritmo neperiano).

- a) **[1,25 puntos]** Calcula, si existen, sus extremos relativos (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).
 b) **[1,25 puntos]** Calcula, si existen, sus extremos absolutos (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

a) Averiguamos cuando se anula la función derivada

$$f'(x) = (\ln(x))^2 + x \cdot 2 \ln(x) \cdot \frac{1}{x} = (\ln(x))^2 + 2 \ln(x) = \ln(x)(\ln(x) + 2)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \ln(x)(\ln(x) + 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \ln(x) = 0 \rightarrow \boxed{x=1} \\ \ln(x) + 2 = 0 \rightarrow \ln(x) = -2 \rightarrow \boxed{x=e^{-2}} \end{cases}$$

Sustituimos estos valores en la segunda derivada.

$$f'(x) = (\ln(x))^2 + 2 \ln(x) \Rightarrow f''(x) = 2 \ln(x) \frac{1}{x} + 2 \frac{1}{x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f''(1) = 2 \ln(1) \frac{1}{1} + 2 \frac{1}{1} = 2 > 0 \rightarrow x=1 \text{ es mínimo} \\ f''(e^{-2}) = 2 \ln(e^{-2}) \frac{1}{e^{-2}} + 2 \frac{1}{e^{-2}} = 2(-2)e^2 + 2e^2 = -2e^2 < 0 \rightarrow x=e^{-2} \text{ es máximo} \end{cases}$$

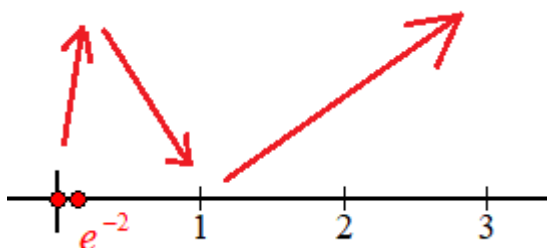
Obtenemos el valor de la función en estos dos puntos críticos.

$$f(1) = 1 \cdot (\ln(1))^2 = 0$$

$$f(e^{-2}) = e^{-2} (\ln(e^{-2}))^2 = 4e^{-2}$$

El mínimo relativo tiene coordenadas $(1, 0)$ y el máximo relativo tiene coordenadas $(e^{-2}, 4e^{-2})$

b) A partir de la información de los extremos relativos la función sigue el esquema siguiente:



Como la función $f(x) = x(\ln(x))^2$ en su dominio $(0, +\infty)$ siempre es mayor o igual que cero el mínimo absoluto de la función es el mínimo relativo $(1, 0)$.

Para decidir el máximo absoluto necesitamos conocer la evolución de la función cuando $x \rightarrow +\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x(\ln(x))^2 = +\infty(+\infty)^2 = +\infty$$

Por lo que la función no tiene máximo absoluto.

EJERCICIO 3 (2.5 puntos)

Calcula a con $0 < a < 1$, tal que $\int_a^1 \frac{\ln(x)}{x} dx + 2 = 0$ ($\ln$ denota la función logaritmo neperiano).

Hay que determinar cuando $\int_a^1 \frac{\ln(x)}{x} dx + 2 = 0 \Rightarrow \int_a^1 \frac{\ln(x)}{x} dx = -2$.

Calculamos primero la integral indefinida.

$$\int \frac{\ln(x)}{x} dx = \int \ln(x) \frac{1}{x} dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ u = \ln(x) \rightarrow du = \frac{1}{x} dx \\ dv = \frac{1}{x} dx \rightarrow v = \int \frac{1}{x} dx = \ln(x) \end{array} \right\} = \ln(x) \ln(x) - \int \ln(x) \frac{1}{x} dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int \ln(x) \frac{1}{x} dx = (\ln(x))^2 - \int \ln(x) \frac{1}{x} dx \Rightarrow 2 \int \ln(x) \frac{1}{x} dx = (\ln(x))^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int \ln(x) \frac{1}{x} dx = \frac{(\ln(x))^2}{2} + K$$

Aplicamos este resultado a la integral definida.

$$\int_a^1 \frac{\ln(x)}{x} dx = \left[\frac{(\ln(x))^2}{2} \right]_a^1 = \left[\frac{(\ln(1))^2}{2} \right] - \left[\frac{(\ln(a))^2}{2} \right] = -\frac{(\ln(a))^2}{2}$$

$$\int_a^1 \frac{\ln(x)}{x} dx = -2 \Rightarrow -\frac{(\ln(a))^2}{2} = -2 \Rightarrow \frac{(\ln(a))^2}{2} = 2 \Rightarrow (\ln(a))^2 = 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln(a) = \sqrt{4} = \pm 2 \Rightarrow \begin{cases} \ln(a) = 2 \rightarrow a = e^2 > 1 \\ \ln(a) = -2 \rightarrow \boxed{a = e^{-2} < 1} \end{cases}$$

El valor buscado es $a = e^{-2}$.

EJERCICIO 4 (2.5 puntos)

Considera las funciones $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $g: \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = 5 - x^2$ y $g(x) = \frac{4}{x^2}$.

- a) [1,25 puntos] Esboza las gráficas de las dos funciones y calcula los puntos de corte entre ellas.
 b) [1,25 puntos] Calcula la suma de las áreas de los recintos limitados por las gráficas de f y g .

a) Hallamos los puntos de corte de las gráficas de las dos funciones.

$$f(x) = g(x) \Rightarrow 5 - x^2 = \frac{4}{x^2} \Rightarrow 5x^2 - x^4 = 4 \Rightarrow -x^4 + 5x^2 - 4 = 0 \Rightarrow$$

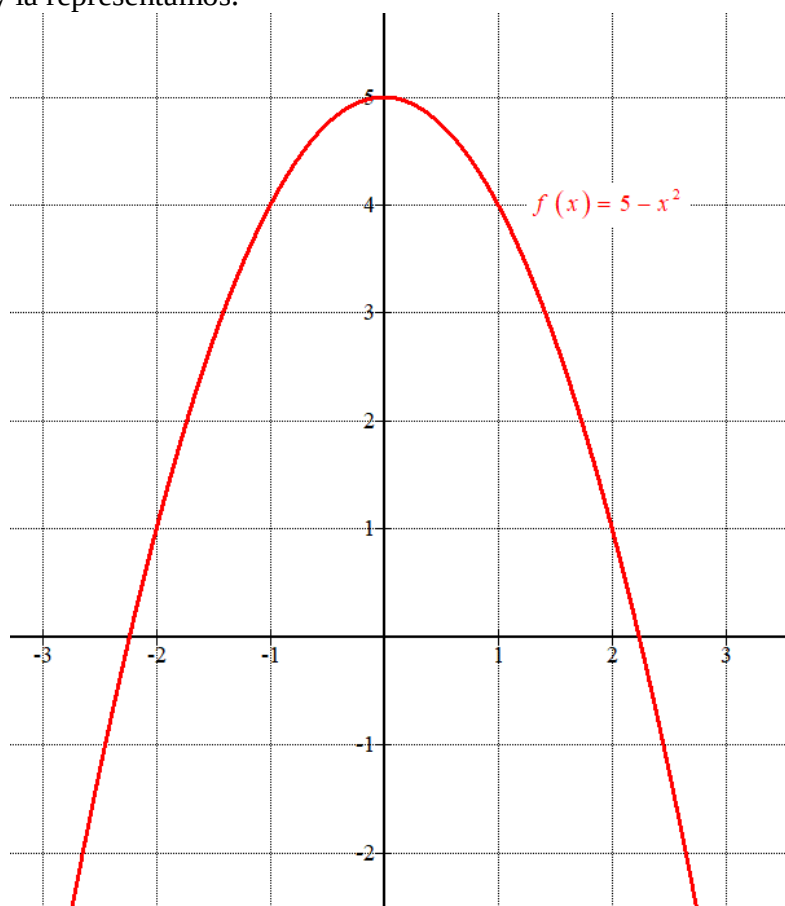
$$\Rightarrow x^2 = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4(-1)(-4)}}{2(-1)} = \frac{-5 \pm 3}{-2} = \begin{cases} \frac{-5+3}{-2} = 1 = x^2 \rightarrow x = \sqrt{1} = \pm 1 \\ \frac{-5-3}{-2} = 4 = x^2 \rightarrow x = \sqrt{4} = \pm 2 \end{cases}$$

Las gráficas tienen 4 puntos de corte: $x = -2$, $x = -1$, $x = 1$, $x = 2$.

La función $f(x) = 5 - x^2$ es una parábola con vértice en $x = \frac{-b}{2a} = \frac{0}{-2} = 0$.

Hacemos una tabla de valores y la representamos.

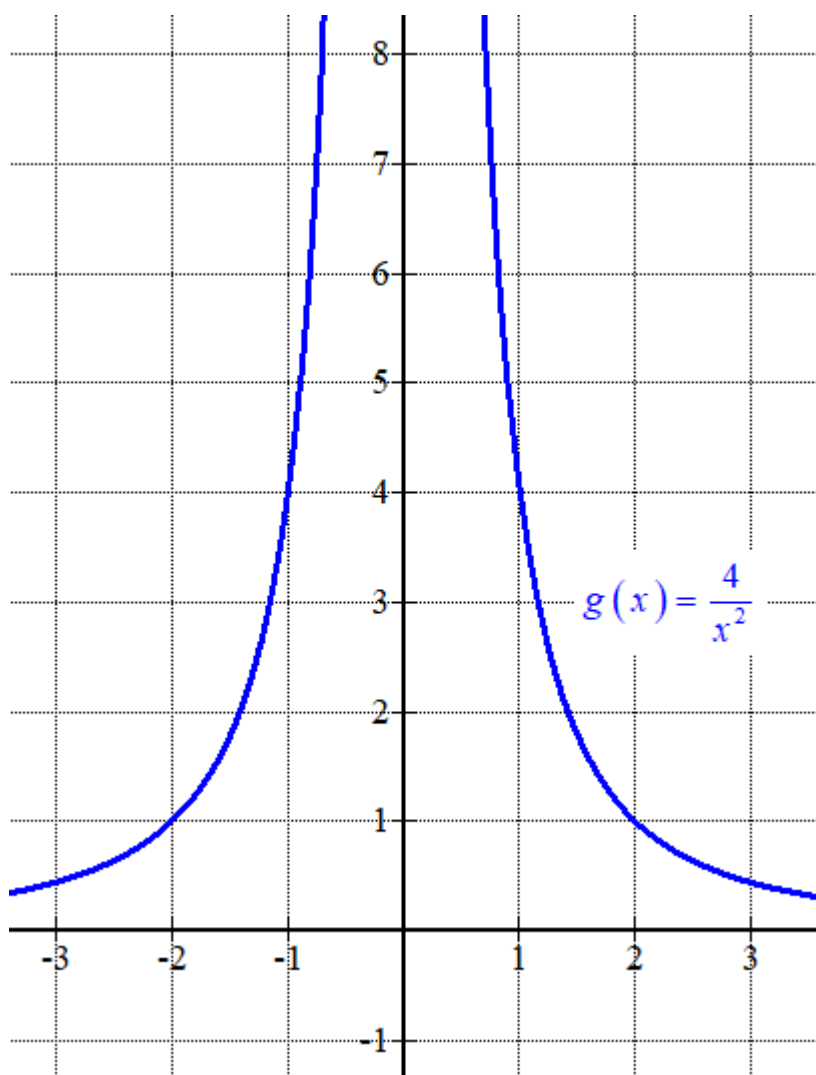
x	$y = 5 - x^2$
-2	1
-1	4
0	5
1	4
2	1



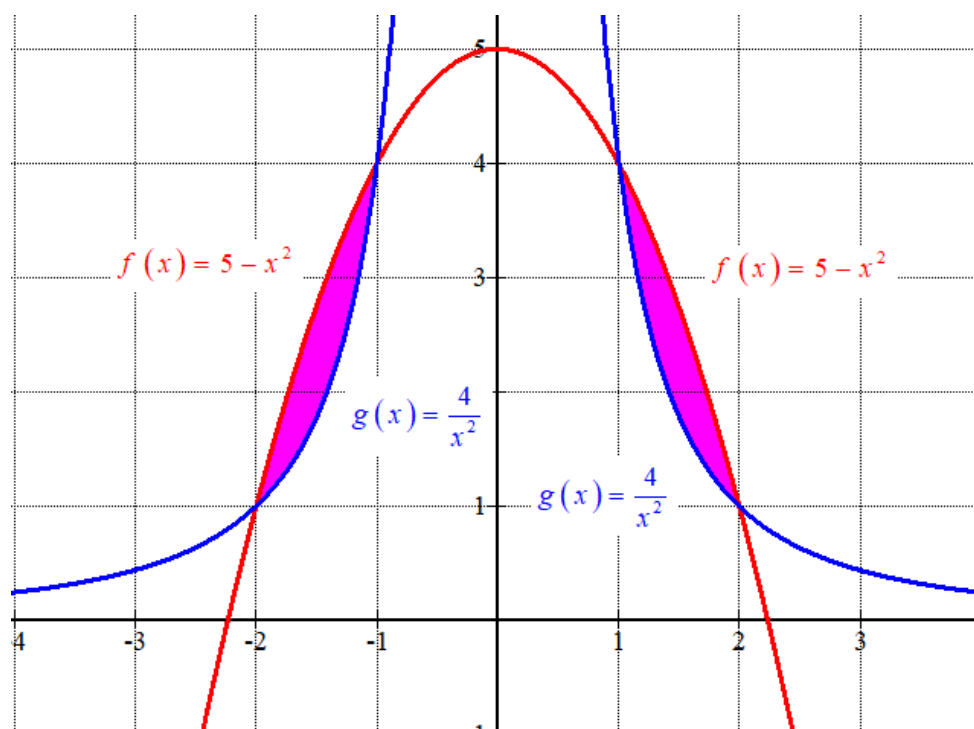
La función $g(x) = \frac{4}{x^2}$ tiene una asíntota vertical en $x = 0$.

Hacemos una tabla de valores de la función $g(x) = \frac{4}{x^2}$ y la representamos.

x	$y = \frac{4}{x^2}$
-2	1
-1	4
-0.5	16
0.5	16
1	4
2	1



- b) Hay dos recintos limitados por las gráficas. Dibujamos los recintos y vemos que tienen el mismo valor de área, dada la simetría de las funciones.



Calculamos una de las áreas.

$$\begin{aligned}
 \text{Área1} &= \int_{-2}^{-1} 5 - x^2 - \frac{4}{x^2} dx = \int_{-2}^{-1} 5 - x^2 - 4x^{-2} dx = \left[5x - \frac{x^3}{3} - 4 \frac{x^{-1}}{-1} \right]_{-2}^{-1} = \\
 &= \left[5x - \frac{x^3}{3} + \frac{4}{x} \right]_{-2}^{-1} = \left[5(-1) - \frac{(-1)^3}{3} + \frac{4}{-1} \right] - \left[5(-2) - \frac{(-2)^3}{3} + \frac{4}{-2} \right] = \\
 &= -5 + \frac{1}{3} - 4 - \left(-10 + \frac{8}{3} - 2 \right) = 3 - \frac{7}{3} = \frac{2}{3} u^2
 \end{aligned}$$

El área total es $2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{3} \approx 1.33 u^2$

BLOQUE B

EJERCICIO 5 (2.5 puntos)

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ e I la matriz identidad de orden 3.

a) [1 punto] Halla los valores de m para que la matriz $A - mI$ no tenga inversa.

b) [1,5 puntos] Halla x , distinto de cero, para que $A - xI$ sea la inversa de la matriz $\frac{1}{x}(A - I)$.

a) Para que no tenga inversa el determinante debe ser nulo.

$$A - mI = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} - m \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-m & 1 & 1 \\ 1 & 1-m & 1 \\ 1 & 1 & 1-m \end{pmatrix}$$

$$|A - mI| = \begin{vmatrix} 1-m & 1 & 1 \\ 1 & 1-m & 1 \\ 1 & 1 & 1-m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{Fila 3}^a - \text{Fila 2}^a & & \\ 1 & 1 & 1-m \\ -1 & -1+m & -1 \\ 0 & m & -m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-m & 1 & 1 \\ 1 & 1-m & 1 \\ 0 & m & -m \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \text{Fila 2}^a - \text{Fila 1}^a & & \\ 1 & 1-m & 1 \\ -1+m & -1 & -1 \\ m & -m & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-m & 1 & 1 \\ m & -m & 0 \\ 0 & m & -m \end{vmatrix} = m^2(1-m) + 0 + m^2 - 0 + m^2 - 0 =$$

$$= m^2(1-m) + 2m^2 = m^2(1-m+2) = m^2(3-m)$$

$$|A - mI| = 0 \Rightarrow m^2(3-m) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ 3-m = 0 \rightarrow m = 3 \end{cases}$$

La matriz $A - mI$ no tiene inversa cuando $m = 0$ o $m = 3$.

b) Para que $A - xI$ sea la inversa de la matriz $\frac{1}{x}(A - I)$ debe cumplirse que su producto es la matriz identidad.

$$\frac{1}{x}(A - I) = \frac{1}{x} \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{x} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A - xI = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} - x \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 \\ 1 & 1 & 1-x \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{x}(A-I)(A-xI) = I \Rightarrow \frac{1}{x} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 \\ 1 & 1 & 1-x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x} \begin{pmatrix} 1+1 & 1-x+1 & 1+1-x \\ 1-x+1 & 1+1 & 1+1-x \\ 1-x+1 & 1+1-x & 1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x} \begin{pmatrix} 2 & 2-x & 2-x \\ 2-x & 2 & 2-x \\ 2-x & 2-x & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2-x & 2-x \\ 2-x & 2 & 2-x \\ 2-x & 2-x & 2 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2-x & 2-x \\ 2-x & 2 & 2-x \\ 2-x & 2-x & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2 = x \\ 2-x = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{x=2}$$

El valor buscado es $x = 2$.

EJERCICIO 6 (2.5 puntos)

El dueño de un bar ha comprado refrescos, cerveza y vino por un importe de 500 euros sin incluir impuestos. El gasto en vino es 60 euros menos que los gastos en refrescos y cerveza conjuntamente, sin incluir impuestos. Teniendo en cuenta que los impuestos de los refrescos, la cerveza y el vino son el 6%, el 12% y el 30%, respectivamente, entonces el importe total de la factura incluyendo impuestos ha ascendido a 592,4 euros. Calcula el importe, incluyendo impuestos, invertido en cada una de las bebidas.

Llamamos “x” el gasto en refrescos sin impuestos, “y” al gasto en cerveza sin impuestos y “z” al gasto en vino sin impuestos.

El gasto total es de un importe de 500 euros sin incluir impuestos $\rightarrow x + y + z = 500$.

El gasto en vino es 60 euros menos que los gastos en refrescos y cerveza conjuntamente, sin incluir impuestos $\rightarrow z = x + y - 60$

Teniendo en cuenta que los impuestos de los refrescos, la cerveza y el vino son el 6%, el 12% y el 30%, respectivamente, entonces el importe total de la factura incluyendo impuestos ha ascendido a 592,4 euros $\rightarrow$ Los impuestos son $592.4 - 500 = 92.4 \text{ €} \rightarrow 0.06 \cdot x + 0.12 \cdot y + 0.30 \cdot z = 92.4$

Reunimos las ecuaciones obtenidas en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 500 \\ z = x + y - 60 \\ 0.06 \cdot x + 0.12 \cdot y + 0.30 \cdot z = 92.4 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 500 \\ z = x + y - 60 \\ 6 \cdot x + 12 \cdot y + 30 \cdot z = 9240 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 500 \\ \Rightarrow z - y + 60 = x \\ x + 2y + 5z = 1540 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} z - y + 60 + y + z = 500 \\ z - y + 60 + 2y + 5z = 1540 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2z = 440 \rightarrow \boxed{z = 220} \\ y + 6z = 1480 \end{array} \right\} \Rightarrow y + 6 \cdot 220 = 1480 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{y = 1480 - 1320 = 160} \Rightarrow \boxed{x = 220 - 160 + 60 = 120}$$

Sin incluir impuestos se ha gastado 120 euros en refrescos, 160 en cerveza y 220 en vino. Incluyendo impuestos el gasto es de $120 \cdot 1.06 = 127.2 \text{ €}$ en refrescos, $160 \cdot 1.12 = 179.2 \text{ €}$ en cerveza y $220 \cdot 1.30 = 286 \text{ €}$ en vino.

EJERCICIO 7 (2.5 puntos)

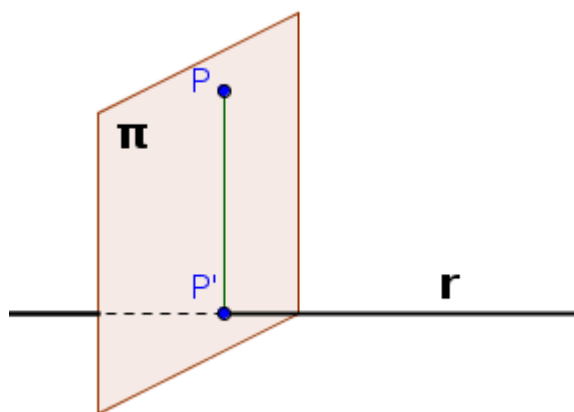
Considera los planos $\pi_1 \equiv x - y + z = 0$ y $\pi_2 \equiv x + y = 2$.

a) **[1,5 puntos]** Calcula la distancia entre la recta intersección de π_1 y π_2 y el punto $P(2, 6, -2)$.

b) **[1 punto]** Halla el ángulo que forman π_1 y π_2 .

a) Obtenemos las ecuaciones paramétricas de la recta intersección de π_1 y π_2 .

$$\left. \begin{array}{l} \pi_1 \equiv x - y + z = 0 \\ \pi_2 \equiv x + y = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x - y + z = 0 \\ x = 2 - y \end{array} \right\} \Rightarrow 2 - y - y + z = 0 \Rightarrow z = -2 + 2y \Rightarrow r : \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = -2 + 2\lambda \end{cases}$$



Hallamos el plano perpendicular a la recta que pasa por el punto P. Dicho plano tiene como vector normal el vector director de la recta.

$$r : \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = -2 + 2\lambda \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_r = (-1, 1, 2)$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{n} = \vec{v}_r = (-1, 1, 2) \\ P(2, 6, -2) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \pi : -x + y + 2z + D = 0 \\ P(2, 6, -2) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow -2 + 6 + 2(-2) + D = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D = 0 \Rightarrow \boxed{\pi : -x + y + 2z = 0}$$

Determinamos el punto P' de corte de la recta r y el plano π .

$$\left. \begin{array}{l} \pi : -x + y + 2z = 0 \\ r : \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = -2 + 2\lambda \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow -(2 - \lambda) + \lambda + 2(-2 + 2\lambda) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2 + \lambda + \lambda - 4 + 4\lambda = 0 \Rightarrow 6\lambda = 6 \Rightarrow \lambda = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 - 1 = 1 \\ y = 1 \\ z = -2 + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow P'(1, 1, 0)$$

La distancia de P a la recta r es la distancia de P a P'.

$$\overrightarrow{PP'} = (1, 1, 0) - (2, 6, -2) = (-1, -5, 2)$$

$$d(P, r) = d(P, P') = |\overrightarrow{PP'}| = \sqrt{(-1)^2 + (-5)^2 + 2^2} = \boxed{\sqrt{30} \approx 5.47u}$$

b) El ángulo que forman π_1 y π_2 es el ángulo que forman sus vectores normales.

$$\left. \begin{array}{l} \pi_1 \equiv x - y + z = 0 \\ \pi_2 \equiv x + y = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \vec{n}_1 = (1, -1, 1) \\ \vec{n}_2 = (1, 1, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow \cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}$$

$$\cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = \frac{(1, -1, 1)(1, 1, 0)}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2} \sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2}} = \frac{1-1}{\sqrt{3}\sqrt{2}} = \frac{0}{\sqrt{6}} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\vec{n}_1, \vec{n}_2) = \arccos(0) = 90^\circ$$

Los planos π_1 y π_2 son perpendiculares.

EJERCICIO 8 (2.5 puntos)

Calcula el volumen del tetraedro que limita el plano determinado por los puntos $A(0, 2, -2)$, $B(3, 2, 1)$ y $C(2, 3, 2)$ con los planos cartesianos.

Hallamos la ecuación del plano determinado por los puntos $A(0, 2, -2)$, $B(3, 2, 1)$ y $C(2, 3, 2)$.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} = \overrightarrow{AB} = (3, 2, 1) - (0, 2, -2) = (3, 0, 3) \\ \vec{v} = \overrightarrow{AC} = (2, 3, 2) - (0, 2, -2) = (2, 1, 4) \\ B(3, 2, 1) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \pi: \begin{vmatrix} x-3 & y-2 & z-1 \\ 3 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6(y-2) + 3(z-1) - 12(y-2) - 3(x-3) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6y - 12 + 3z - 3 - 12y + 24 - 3x + 9 = 0 \Rightarrow -3x - 6y + 3z + 18 = 0 \Rightarrow \boxed{\pi: x + 2y - z - 6 = 0}$$

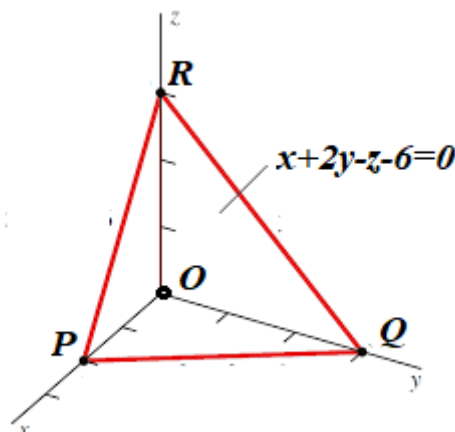
Hallamos los puntos de corte del plano con los planos coordenados.

$$\left. \begin{array}{l} \pi: x + 2y - z - 6 = 0 \\ OX \rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow x - 6 = 0 \Rightarrow x = 6 \Rightarrow P(6, 0, 0)$$

$$\left. \begin{array}{l} \pi: x + 2y - z - 6 = 0 \\ OY \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow 2y - 6 = 0 \Rightarrow y = 3 \Rightarrow Q(0, 3, 0)$$

$$\left. \begin{array}{l} \pi: x + 2y - z - 6 = 0 \\ OZ \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow -z - 6 = 0 \Rightarrow z = -6 \Rightarrow R(0, 0, -6)$$

El volumen del tetraedro definido por el origen $O(0, 0, 0)$ y los puntos P , Q y R es la sexta parte del valor absoluto del producto mixto de $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$ y $\overrightarrow{OR}$.



$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{OP} = (6, 0, 0) - (0, 0, 0) = (6, 0, 0) \\ \overrightarrow{OQ} = (0, 3, 0) - (0, 0, 0) = (0, 3, 0) \\ \overrightarrow{OR} = (0, 0, -6) - (0, 0, 0) = (0, 0, -6) \end{array} \right\} \Rightarrow [\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}, \overrightarrow{OR}] = \begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{vmatrix} = -108$$

$$\text{Volumen } OPQR = \frac{||[\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}, \overrightarrow{OR}]||}{6} = \frac{108}{6} = \boxed{18 \text{ u}^3}$$

El volumen del tetraedro es de 18 u^3 .