



**PRUEBA DE EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL
ACCESO A LA UNIVERSIDAD Y PRUEBAS DE ADMISIÓN MATEMÁTICAS II**
ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS
CURSO 2023-2024

- Instrucciones:**
- a) **Duración: 1 hora y 30 minutos**
 - b) **Todas las cuestiones deben responderse en el papel entregado para la realización del examen y nunca en los folios que contienen los enunciados.**
 - c) **Este examen consta de 8 ejercicios distribuidos en 4 bloques de 2 ejercicios cada uno.**
 - d) **Cada ejercicio tiene un valor máximo de 2.5 puntos.**
 - e) **Se realizarán únicamente un ejercicio de cada bloque. En caso de responder a dos ejercicios de un bloque, sólo se corregirá el que aparezca físicamente en primer lugar.**
 - f) **Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, ni gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.**
 - g) **En la puntuación máxima de cada ejercicio están contemplados 0,25 puntos para valorar la expresión correcta de los procesos y métodos utilizados.**

BLOQUE A. Resuelve sólo uno de los siguientes ejercicios:

EJERCICIO 1 (2.5 puntos)

Sea la función $f : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \ln\left(\frac{x^2 + 1}{x}\right)$, donde $\ln$ denota la función logaritmo neperiano.

- a) **[1 punto]** Calcula los intervalos de crecimiento y de decrecimiento.
- b) **[1,5 puntos]** Estudia y halla los extremos relativos y absolutos de f (abscisas donde se obtienen y valores que alcanzan).

EJERCICIO 2 (2.5 puntos)

Calcula a y b sabiendo que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a(\ln(1+x) - x) + b(e^x - 1) + 1 - \cos(x)}{\sin^2(x)} = 5$$

donde $\ln$ denota la función logaritmo neperiano.

BLOQUE B. Resuelve sólo uno de los siguientes ejercicios:

EJERCICIO 3 (2.5 puntos)

Considera la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \int_0^x \cos(t) \sin^2(t) dt.$$

Determina las ecuaciones de la recta tangente y de la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = \frac{\pi}{4}$.

EJERCICIO 4 (2.5 puntos)

Calcula $\int \frac{dx}{\sqrt{4 + 4e^x}}$. (Sugerencia: efectúa el cambio de variable $t = \sqrt{1 + e^x}$).



**PRUEBA DE EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL
ACCESO A LA UNIVERSIDAD Y PRUEBAS DE ADMISIÓN**
ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS
CURSO 2023-2024

MATEMÁTICAS II

BLOQUE C. Resuelve sólo uno de los siguientes ejercicios:

EJERCICIO 5 (2.5 puntos)

Considera el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} ax + y + z = 1 + a \\ x + 2y - z = 1 - a \\ x + (1+a)y - az = 0 \end{cases}$$

- a) [1,5 puntos] Calcula a para que el sistema sea compatible indeterminado.
b) [1 punto] Resuelve el sistema, si es posible, para $a = 0$.

EJERCICIO 6 (2.5 puntos)

Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$, $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ e I la matriz identidad de orden 2.

- a) [1,5 puntos] Sabiendo que A verifica la identidad $(A + aI)^2 = bI$, halla a y b .
b) [0,75 puntos] Resuelve la ecuación $MX + M^2 = I$.

BLOQUE D. Resuelve sólo uno de los siguientes ejercicios:

EJERCICIO 7 (2.5 puntos)

Considera el plano $\pi \equiv x - y = 0$ y la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = z - 2$.

- a) [1,25 puntos] Calcula, si es posible, el plano perpendicular a π que contiene a r .
b) [1,25 puntos] Calcula, si es posible, la recta perpendicular a r , contenida en π y que pasa por el origen.

EJERCICIO 8 (2.5 puntos)

Considera los puntos $O(0,0,0)$, $A(a,-1,2)$ y $B(a,1,0)$.

- a) [1,5 puntos] Determina a para que el triángulo OAB tenga área 3 unidades cuadradas.
b) [1 punto] Calcula a para que O , A y B sean coplanarios con el punto $C(1,1,0)$.

SOLUCIONES**EJERCICIO 1 (2.5 puntos)**

Sea la función $f : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \ln\left(\frac{x^2+1}{x}\right)$, donde $\ln$ denota la función logaritmo neperiano.

a) **[1 punto]** Calcula los intervalos de crecimiento y de decrecimiento.

b) **[1,5 puntos]** Estudia y halla los extremos relativos y absolutos de f (abscisas donde se obtienen y valores que alcanzan).

a) Hallamos los puntos críticos de la función averiguando donde se anula su derivada.

$$f(x) = \ln\left(\frac{x^2+1}{x}\right) = \ln(x^2+1) - \ln x \Rightarrow f'(x) = \frac{2x}{x^2+1} - \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{2x}{x^2+1} - \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow \frac{2x}{x^2+1} = \frac{1}{x} \Rightarrow 2x^2 = x^2+1 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow \boxed{x = \sqrt{1} = 1}$$

Solo nos sirve el valor positivo de la raíz. Estudiamos el signo de la derivada antes y después de este punto crítico: $x=1$.

- En el intervalo $(0,1)$ tomamos $x=0.5$ y la derivada vale

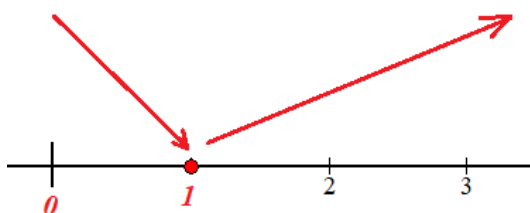
$$f'(0.5) = \frac{2 \cdot 0.5}{0.5^2+1} - \frac{1}{0.5} = -1.2 < 0. \text{ La función decrece en } (0,1).$$

- En el intervalo $(1, +\infty)$ tomamos $x=2$ y la derivada vale

$$f'(2) = \frac{2 \cdot 2}{2^2+1} - \frac{1}{2} = 0.3 > 0. \text{ La función crece en } (1, +\infty).$$

La función decrece en $(0,1)$ y crece en $(1, +\infty)$.

b) Por lo visto en el apartado anterior la función sigue el esquema siguiente.



La función tiene un mínimo relativo y absoluto en $x=1$. Como $f(1) = \ln\left(\frac{1^2+1}{1}\right) = \ln 2$ el mínimo relativo y absoluto de la función tiene coordenada $(1, \ln 2)$.

Calculamos los límites de la función cuando x tiende a 0 y a $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x^2+1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(x + \frac{1}{x}\right) = \ln(+\infty + 0) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln\left(\frac{x^2+1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln\left(x + \frac{1}{x}\right) = \ln\left(0 + \frac{1}{0^+}\right) = \ln(+\infty) = +\infty$$

La función no tiene máximos relativos ni absolutos.

EJERCICIO 2 (2.5 puntos)

Calcula a y b sabiendo que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a(\ln(1+x) - x) + b(e^x - 1) + 1 - \cos(x)}{\operatorname{sen}^2(x)} = 5$$

donde $\ln$ denota la función logaritmo neperiano.

Calculamos la expresión del límite.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a(\ln(1+x) - x) + b(e^x - 1) + 1 - \cos(x)}{\operatorname{sen}^2(x)} = \frac{a(\ln(1+0) - 0) + b(e^0 - 1) + 1 - \cos(0)}{\operatorname{sen}^2(0)} =$$

$$= \frac{a \cdot 0 + b \cdot 0 + 1 - 1}{0^2} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a\left(\frac{1}{1+x} - 1\right) + b(e^x) - (-\operatorname{sen}(x))}{2\operatorname{sen}(x)\cos(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a\left(\frac{1}{1+x} - 1\right) + b(e^x) + \operatorname{sen}(x)}{2\operatorname{sen}(x)\cos(x)} =$$

$$= \frac{a\left(\frac{1}{1+0} - 1\right) + b(e^0) + \operatorname{sen}(0)}{2\operatorname{sen}(0)\cos(0)} = \frac{a \cdot 0 + b + 0}{2 \cdot 0 \cdot 1} = \frac{b}{0} = \dots$$

Como el límite debe valer 5 el valor de b debe ser cero, pues, en caso contrario, el límite valdría ∞ .

Le damos a b el valor 0 y seguimos calculando el límite.

$$\dots = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a\left(\frac{-1 \cdot 1}{(1+x)^2}\right) + b(e^x) + \cos(x)}{2\cos(x)\cos(x) + 2\operatorname{sen}(x)(-\operatorname{sen}(x))} = \{b = 0\} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-a\left(\frac{1}{(1+x)^2}\right) + \cos(x)}{2\cos^2(x) - 2\operatorname{sen}^2(x)} = \frac{-a\left(\frac{1}{(1+0)^2}\right) + \cos(0)}{2\cos^2(0) - 2\operatorname{sen}^2(0)} = \frac{-a + 1}{2 - 0} = \boxed{\frac{1-a}{2}}$$

Como queremos que este límite valga 5 igualamos el resultado obtenido a este valor.

$$\frac{1-a}{2} = 5 \Rightarrow 1-a = 10 \Rightarrow 1-10 = a \Rightarrow \boxed{a = -9}$$

Los valores buscados son $a = -9$ y $b = 0$.

EJERCICIO 3 (2.5 puntos)

Considera la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \int_0^x \cos(t) \operatorname{sen}^2(t) dt.$$

Determina las ecuaciones de la recta tangente y de la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = \frac{\pi}{4}$.

Obtenemos el valor de $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \int_0^{\pi/4} \cos(t) \operatorname{sen}^2(t) dt = \left[\frac{1}{3} \operatorname{sen}^3(t) \right]_0^{\pi/4} = \\ &= \frac{1}{3} \operatorname{sen}^3\left(\frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{3} \operatorname{sen}^3(0) = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 - 0 = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{12}} \end{aligned}$$

Obtenemos el valor de $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^x \cos(t) \operatorname{sen}^2(t) dt \Rightarrow f'(x) = \cos(x) \operatorname{sen}^2(x) \Rightarrow \\ \Rightarrow f'\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{4}} \end{aligned}$$

Obtenemos la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = \frac{\pi}{4}$.

$$\left. \begin{aligned} f\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \frac{\sqrt{2}}{12} \\ f'\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \frac{\sqrt{2}}{4} \\ y - f\left(\frac{\pi}{4}\right) &= f'\left(\frac{\pi}{4}\right) \left(x - \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned} \right\} \Rightarrow y - \frac{\sqrt{2}}{12} = \frac{\sqrt{2}}{4} \left(x - \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow \boxed{y = \frac{\sqrt{2}}{4}x + \frac{\sqrt{2}}{12} - \frac{\pi\sqrt{2}}{16}}$$

Obtenemos la ecuación de la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = \frac{\pi}{4}$.

$$\left. \begin{aligned} f\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \frac{\sqrt{2}}{12} \\ f'\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \frac{\sqrt{2}}{4} \\ y - f\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \frac{-1}{f'\left(\frac{\pi}{4}\right)} \left(x - \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned} \right\} \Rightarrow y - \frac{\sqrt{2}}{12} = \frac{-1}{\frac{\sqrt{2}}{4}} \left(x - \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow \boxed{y = \frac{-4}{\sqrt{2}}x + \frac{\sqrt{2}}{12} + \frac{\pi}{\sqrt{2}}}$$

EJERCICIO 4 (2.5 puntos)

Calcula $\int \frac{dx}{\sqrt{4+4e^x}}$. (Sugerencia: efectúa el cambio de variable $t = \sqrt{1+e^x}$).

Calculamos la integral pedida.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4+4e^x}} = \int \frac{dx}{\sqrt{4(1+e^x)}} = \int \frac{dx}{2\sqrt{1+e^x}} = \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{1+e^x}} dx = \left. \begin{array}{l} \text{Cambio de variable} \\ t = \sqrt{1+e^x} \rightarrow t^2 = 1+e^x \\ t^2 - 1 = e^x \\ 2t dt = e^x dx = (t^2 - 1) dx \\ dx = \frac{2t}{t^2 - 1} dt \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{1}{t} \frac{2t}{t^2 - 1} dt = \frac{2}{2} \int \frac{1}{t^2 - 1} dt = \int \frac{1}{t^2 - 1} dt = \dots$$

Descomposición en fracciones simples

$$\frac{1}{t^2 - 1} = \frac{1}{(t+1)(t-1)} = \frac{A}{t+1} + \frac{B}{t-1} = \frac{A(t-1) + B(t+1)}{(t+1)(t-1)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 = A(t-1) + B(t+1) \Rightarrow \begin{cases} t = 1 \rightarrow 1 = 2B \rightarrow B = \frac{1}{2} \\ t = -1 \rightarrow 1 = -2A \rightarrow A = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{t^2 - 1} = \frac{-1/2}{t+1} + \frac{1/2}{t-1}$$

$$\dots = \int \frac{-1/2}{t+1} dt + \int \frac{1/2}{t-1} dt = \frac{-1}{2} \int \frac{1}{t+1} dt + \frac{1}{2} \int \frac{1}{t-1} dt = \frac{-1}{2} \ln(t+1) + \frac{1}{2} \ln(t-1) =$$

$$= \left\{ t = \sqrt{1+e^x} \right\} = \frac{-1}{2} \ln(\sqrt{1+e^x} + 1) + \frac{1}{2} \ln(\sqrt{1+e^x} - 1) =$$

$$= \boxed{\frac{1}{2} \ln(\sqrt{1+e^x} - 1) - \frac{1}{2} \ln(1 + \sqrt{1+e^x}) + K}$$

EJERCICIO 5 (2.5 puntos)

Considera el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} ax + y + z = 1 + a \\ x + 2y - z = 1 - a \\ x + (1+a)y - az = 0 \end{cases}$$

a) [1,5 puntos] Calcula a para que el sistema sea compatible indeterminado.

b) [1 punto] Resuelve el sistema, si es posible, para $a = 0$.

a) El sistema tiene asociada la matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1+a & -a \end{pmatrix}$ y la matriz

$$\text{ampliada } A/B = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1+a \\ 1 & 2 & -1 & 1-a \\ 1 & 1+a & -a & 0 \end{pmatrix}.$$

Para que el sistema sea compatible indeterminado las dos matrices deben tener el mismo rango y se menor de 3. Para ello lo primero que debe ocurrir es que el determinante de la matriz A sea nulo.

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1+a & -a \end{vmatrix} = -2a^2 - 1 + 1 + a - 2 + a + a(1+a) =$$

$$= -2a^2 - 1 + 1 + a - 2 + a + a + a^2 = -a^2 + 3a - 2$$

$$|A| = 0 \Rightarrow -a^2 + 3a - 2 = 0 \Rightarrow a = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4(-1)(-2)}}{2(-1)} = \frac{-3 \pm 1}{-2} = \begin{cases} \frac{-3+1}{-2} = 1 = a \\ \frac{-3-1}{-2} = 2 = a \end{cases}$$

Analizamos estos dos casos por separado.

Si $a = 1$ el determinante de la matriz de coeficientes es nulo y su rango es menor de 3.

La matriz queda $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. Observamos que la fila 2ª y 3ª son iguales.

Consideramos el menor de orden 2 que resulta de quitar la tercera fila y la tercera columna

$$\rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1 \neq 0. \text{ El rango de } A \text{ es } 2.$$

La matriz ampliada queda $A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Observamos que la fila 2ª y 3ª son

iguales, por lo que su rango no puede ser 3 y es 2 como el rango de la matriz A .

Rango de A = Rango de A/B = $2 < 3$ = Número de incógnitas. El sistema es compatible indeterminado.

Si $a = 2$ el determinante de la matriz de coeficientes es nulo y su rango es menor de 3.

La matriz queda $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$. Consideramos el menor de orden 2 que resulta de quitar

la tercera fila y la tercera columna $\rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3 \neq 0$. El rango de A es 2.

La matriz ampliada queda $A/B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. Consideramos el menor de orden 3

que resulta de quitar la primera columna (columna $1^a = \text{columna } 2^a + \text{columna } 3^a$) $\rightarrow$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 3 - 6 + 9 + 0 - 2 = -2 \neq 0. \text{ El rango de la matriz ampliada es 3.}$$

Rango de A = 2 $\neq$ 3 = Rango de A/B. El sistema es incompatible.

El sistema es compatible indeterminado para $a = 1$.

- b) Para $a = 0$ el sistema es compatible determinado, pues es un valor distinto de 1 y 2 por lo que el determinante de la matriz de coeficientes es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada y el número de incógnitas.

El sistema queda $\begin{cases} y + z = 1 \\ x + 2y - z = 1 \\ x + y = 0 \end{cases}$. Lo resolvemos.

$$\begin{cases} y + z = 1 \\ x + 2y - z = 1 \\ x + y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 1 - y \\ x + 2y - z = 1 \Rightarrow -y + 2y - 1 + y = 1 \Rightarrow \\ x = -y \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2y = 2 \Rightarrow \boxed{y = 1} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{z = 1 - 1 = 0} \\ \boxed{x = -1} \end{cases}$$

Para $a = 0$ la solución del sistema es $x = -1$, $y = 1$ y $z = 0$.

EJERCICIO 6 (2.5 puntos)

Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$, $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ e I la matriz identidad de orden 2.

a) [1,5 puntos] Sabiendo que A verifica la identidad $(A + aI)^2 = bI$, halla a y b .

b) [0,75 puntos] Resuelve la ecuación $MX + M^2 = I$.

a) Hallamos la expresión de la matriz $(A + aI)^2$.

$$\begin{aligned} A + aI &= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+a & 3 \\ -2 & 5+a \end{pmatrix} \\ (A + aI)^2 &= \begin{pmatrix} 1+a & 3 \\ -2 & 5+a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+a & 3 \\ -2 & 5+a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+a)^2 - 6 & 3+3a+15+3a \\ -2-2a-10-2a & -6+(5+a)^2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1+a^2+2a-6 & 6a+18 \\ -4a-12 & -6+25+a^2+10a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+2a-5 & 6a+18 \\ -4a-12 & a^2+10a+19 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Resolvemos la ecuación matricial.

$$\begin{aligned} (A + aI)^2 = bI &\Rightarrow \begin{pmatrix} a^2+2a-5 & 6a+18 \\ -4a-12 & a^2+10a+19 \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} a^2+2a-5=b \\ 6a+18=0 \\ -4a-12=0 \\ a^2+10a+19=b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2+2a-5=b \\ a+3=0 \\ a+3=0 \rightarrow \boxed{a=-3} \\ a^2+10a+19=b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (-3)^2+2(-3)-5=b \\ (-3)^2+10(-3)+19=b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{-2=b} \\ -2=b \end{cases} \end{aligned}$$

Para $a = -3$ y $b = -2$ se cumple lo pedido.

b) Despejamos X de la ecuación: $MX + M^2 = I \Rightarrow MX = I - M^2 \Rightarrow X = M^{-1}(I - M^2)$

Comprobamos que la matriz M tiene inversa y la calculamos.

$$\begin{aligned} |M| &= \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 - 1 = -1 \neq 0 \rightarrow \text{Existe } M^{-1} \\ M^{-1} &= \frac{\text{Adj}(M^T)}{|M|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}{-1} = - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Determinamos la expresión de la matriz X .

$$\begin{aligned} I - M^2 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \\ X &= M^{-1}(I - M^2) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1-1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

EJERCICIO 7 (2.5 puntos)

Considera el plano $\pi \equiv x - y = 0$ y la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = z - 2$.

- a) [1,25 puntos] Calcula, si es posible, el plano perpendicular a π que contiene a r .
 b) [1,25 puntos] Calcula, si es posible, la recta perpendicular a r , contenida en π y que pasa por el origen.

- a) El plano π' que contiene a la recta r tiene como uno de sus vectores directores el vector director de la recta. Como también debe ser perpendicular al plano π el otro vector director es el vector normal del plano π . Además, como contiene a la recta el plano contiene los puntos de la recta.

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-0}{3} = \frac{z-2}{1} \Rightarrow \begin{cases} P_r(1,0,2) \\ \vec{u}_r = (2,3,1) \end{cases} \quad \pi \equiv x - y = 0 \Rightarrow \vec{n} = (1, -1, 0)$$

$$\left. \begin{array}{l} P_r(1,0,2) \in \pi' \\ \vec{u} = \vec{u}_r = (2,3,1) \\ \vec{v} = \vec{n} = (1,-1,0) \end{array} \right\} \Rightarrow \pi': \begin{vmatrix} x-1 & y & z-2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 + y - 2(z-2) - 3(z-2) + 0 + x - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y - 2z + 4 - 3z + 6 + x - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{\pi': x + y - 5z + 9 = 0}$$

El plano perpendicular a π que contiene a r tiene ecuación $\pi': x + y - 5z + 9 = 0$.

- b) Como la recta s que nos piden hallar debe ser perpendicular a la recta r su vector director debe ser perpendicular a $\vec{u}_r = (2,3,1)$. También debe estar contenida en el plano π por lo que su vector director debe ser perpendicular al vector normal del plano. Un vector director de la recta s es el producto vectorial de $\vec{u}_r = (2,3,1)$ y $\vec{n} = (1,-1,0)$.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_r = (2,3,1) \\ \vec{n} = (1,-1,0) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{v}_s = \vec{u}_r \times \vec{n} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = j - 2k - 3k + i = i + j - 5k = (1,1,-5)$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_s = (1,1,-5) \\ O(0,0,0) \in s \end{array} \right\} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = -5\lambda \end{cases} ; \lambda \in \mathbb{R}$$

La recta perpendicular a r , contenida en π y que pasa por el origen tiene ecuación

$$s \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = -5\lambda \end{cases} ; \lambda \in \mathbb{R}.$$

EJERCICIO 8 (2.5 puntos)

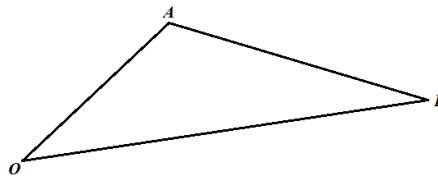
Considera los puntos $O(0,0,0)$, $A(a,-1,2)$ y $B(a,1,0)$.

a) [1,5 puntos] Determina a para que el triángulo OAB tenga área 3 unidades cuadradas.

b) [1 punto] Calcula a para que O, A y B sean coplanarios con el punto $C(1,1,0)$.

a) Hallamos la expresión del área del triángulo OAB.

$$\left. \begin{array}{l} O(0,0,0) \\ A(a,-1,2) \\ B(a,1,0) \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{OA} = (a,-1,2) - (0,0,0) = (a,-1,2) \\ \overrightarrow{OB} = B(a,1,0) - (0,0,0) = (a,1,0) \end{array} \right.$$



$$\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a & -1 & 2 \\ a & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2aj + ak + ak - 2i = -2i + 2aj + 2ak = (-2, 2a, 2a)$$

$$\begin{aligned} \text{Área OAB} &= \frac{|\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}|}{2} = \frac{\sqrt{(-2)^2 + (2a)^2 + (2a)^2}}{2} = \\ &= \frac{\sqrt{4 + 4a^2 + 4a^2}}{2} = \frac{\sqrt{4 + 8a^2}}{2} = \frac{\sqrt{4(1 + 2a^2)}}{2} = \sqrt{1 + 2a^2} \end{aligned}$$

Igualamos este resultado a 3.

$$\sqrt{1 + 2a^2} = 3 \Rightarrow \left(\sqrt{1 + 2a^2}\right)^2 = 3^2 \Rightarrow 1 + 2a^2 = 9 \Rightarrow 2a^2 = 8 \Rightarrow a^2 = \frac{8}{2} = 4 \Rightarrow \boxed{a = \sqrt{4} = \pm 2}$$

Los valores buscados son $a = \pm 2$.

b) Hallamos la ecuación del plano π definido por los puntos $O(0,0,0)$, $A(a,-1,2)$ y $B(a,1,0)$. Hemos hallado en el apartado anterior el vector normal de dicho plano como $\vec{n} = \overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB} = (-2, 2a, 2a)$.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{n} = (-2, 2a, 2a) \\ O(0,0,0) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \pi : -2x + 2ay + 2az + D = 0 \\ O(0,0,0) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow 0 + D = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D = 0 \Rightarrow \pi : -2x + 2ay + 2az = 0 \Rightarrow \boxed{\pi : x - ay - az = 0}$$

Para que los puntos O, A, B y C sean coplanarios el punto C debe pertenecer al plano π .

$$\left. \begin{array}{l} \pi : x - ay - az = 0 \\ C(1,1,0) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow 1 - a + 0 = 0 \Rightarrow 1 = a \Rightarrow \boxed{\pi : x - y - z = 0}$$

Para $a = 1$ los puntos O, A, B y C son coplanarios.