



**PRUEBA DE EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL
ACCESO A LA UNIVERSIDAD Y PRUEBAS DE ADMISIÓN
ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS
CURSO 2023-2024**

MATEMÁTICAS II

Instrucciones: a) **Duración: 1 hora y 30 minutos**

- b) Todas las cuestiones deben responderse en el papel entregado para la realización del examen y nunca en los folios que contienen los enunciados.
- c) Este examen consta de 8 ejercicios distribuidos en 4 bloques de 2 ejercicios cada uno.
- d) Cada ejercicio tiene un valor máximo de 2.5 puntos.
- e) Se realizarán únicamente un ejercicio de cada bloque. En caso de responder a dos ejercicios de un bloque, sólo se corregirá el que aparezca físicamente en primer lugar.
- f) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, ni gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.
- g) En la puntuación máxima de cada ejercicio están contemplados 0,25 puntos para valorar la expresión correcta de los procesos y métodos utilizados.

BLOQUE A. Resuelve sólo uno de los siguientes ejercicios:

EJERCICIO 1 (2.5 puntos)

Sea la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = (x^2 + 1)e^x$.

- a) [1 punto] Calcula los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f .
- b) [1,5 puntos] Determina los intervalos de concavidad y de convexidad de f y los puntos de inflexión de su gráfica (abscisas donde se obtienen y valores que alcanzan).

EJERCICIO 2 (2.5 puntos)

Sea la función derivable $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} ae^{-x} + b \ln(1-x) & \text{si } x < 0 \\ x + \ln(1+x) & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$,

donde $\ln$ denota la función logaritmo neperiano.

- a) [1,5 puntos] Determina a y b .
- b) [1 punto] Halla la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 0$.

BLOQUE B. Resuelve sólo uno de los siguientes ejercicios:

EJERCICIO 3 (2.5 puntos)

Considera la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x$.

- a) [1 punto] Calcula los puntos de corte de la gráfica de f con los ejes de coordenadas y esboza dicha gráfica.
- b) [1,5 puntos] Calcula la suma de las áreas de los recintos acotados y limitados por la gráfica de f y el eje de abscisas.

EJERCICIO 4 (2.5 puntos)

Calcula $\int \frac{e^{3x} - 1}{e^x - 3} dx$. (Sugerencia: efectúa el cambio de variable $t = e^x$).



**PRUEBA DE EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL
ACCESO A LA UNIVERSIDAD Y PRUEBAS DE ADMISIÓN**
ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS
CURSO 2023-2024

MATEMÁTICAS II

BLOQUE C. Resuelve sólo uno de los siguientes ejercicios:

EJERCICIO 5 (2.5 puntos)

Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 7 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/9 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

- a) [1,25 puntos] Calcula los determinantes de las matrices $((AB)^5)^{-1}$ y $27AB^6$.
- b) [1,25 puntos] Halla la matriz X , si es posible, que verifica que $AXB = 9I$, donde I es la matriz identidad de orden 3.

EJERCICIO 6 (2.5 puntos)

Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & a \\ 5 & 3a-1 & 0 \end{pmatrix}$.

- a) [1,25 puntos] Calcula el rango de A según los valores de a .
- b) [1,25 puntos] Si $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ y $a = 2$ resuelve, si es posible, el sistema $AX = B$.

BLOQUE D. Resuelve sólo uno de los siguientes ejercicios:

EJERCICIO 7 (2.5 puntos)

Considera la recta $r \equiv \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{2} = 3-z$ y el punto $P(0, 2, -4)$.

- a) [1,25 puntos] Calcula el punto de r a menor distancia de P .
- b) [1,25 puntos] Halla los puntos de r cuya distancia a P sea igual a $\sqrt{50}$.

EJERCICIO 8 (2.5 puntos)

Sea π_1 el plano determinado por los puntos $A(1, 0, 0)$, $B(1, 1, -3)$ y $C(0, 1, 1)$, y sea

$\pi_2 \equiv x - y + z - 1 = 0$. Determina la ecuación de la recta paralela a ambos planos que pasa por el origen.

SOLUCIONES**EJERCICIO 1 (2.5 puntos)**

Sea la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = (x^2 + 1)e^x$.

- a) [1 punto] Calcula los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f .
 b) [1,5 puntos] Determina los intervalos de concavidad y de convexidad de f y los puntos de inflexión de su gráfica (abscisas donde se obtienen y valores que alcanzan).

- a) El dominio de la función son todos los números reales. Dominio = $\mathbb{R}$.
 Utilizamos la derivada para hallar los puntos críticos de la función.

$$f(x) = (x^2 + 1)e^x \Rightarrow f'(x) = (2x)e^x + (x^2 + 1)e^x = (x^2 + 2x + 1)e^x$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow (x^2 + 2x + 1)e^x = 0 \Rightarrow \{e^x \neq 0\} \Rightarrow x^2 + 2x + 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(1)(1)}}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

Estudiamos el signo de la derivada antes y después del punto crítico $x = -1$.

- En el intervalo $(-\infty, -1)$ tomamos $x = -2$ y la derivada vale

$$f'(-2) = ((-2)^2 + 2(-2) + 1)e^{-2} = e^{-2} > 0. \text{ La función crece en } (-\infty, -1).$$

- En el intervalo $(-1, +\infty)$ tomamos $x = 0$ y la derivada vale

$$f'(0) = (0^2 + 2 \cdot 0 + 1)e^0 = 1 > 0. \text{ La función crece en } (-1, +\infty).$$

La función crece en todo $\mathbb{R}$.

- b) Buscamos los valores que anulan la segunda derivada.

$$f'(x) = (x^2 + 2x + 1)e^x \Rightarrow f''(x) = (2x + 2)e^x + (x^2 + 2x + 1)e^x = (x^2 + 4x + 3)e^x$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow (x^2 + 4x + 3)e^x = 0 \Rightarrow \{e^x \neq 0\} \Rightarrow x^2 + 4x + 3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4(1)(3)}}{2} = \frac{-4 \pm 2}{2} = \begin{cases} \frac{-4+2}{2} = -1 = x \\ \frac{-4-2}{2} = -3 = x \end{cases}$$

Estudiamos el signo de la segunda derivada antes, entre y después de los dos valores obtenidos.

- En el intervalo $(-\infty, -3)$ tomamos $x = -4$ y la segunda derivada vale

$$f''(-4) = ((-4)^2 + 4(-4) + 3)e^{-4} = 3e^{-4} > 0. \text{ La función es convexa (U) en } (-\infty, -3).$$

- En el intervalo $(-3, -1)$ tomamos $x = -2$ y la segunda derivada vale

$$f''(-2) = ((-2)^2 + 4(-2) + 3)e^{-2} = -e^{-2} < 0. \text{ La función es cóncava } (\cap) \text{ en } (-3, -1).$$

- En el intervalo $(-1, +\infty)$ tomamos $x = 0$ y la segunda derivada vale

$$f''(0) = (0^2 + 4 \cdot 0 + 3)e^0 = 3 > 0. \text{ La función es convexa } (\cup) \text{ en } (-1, +\infty).$$

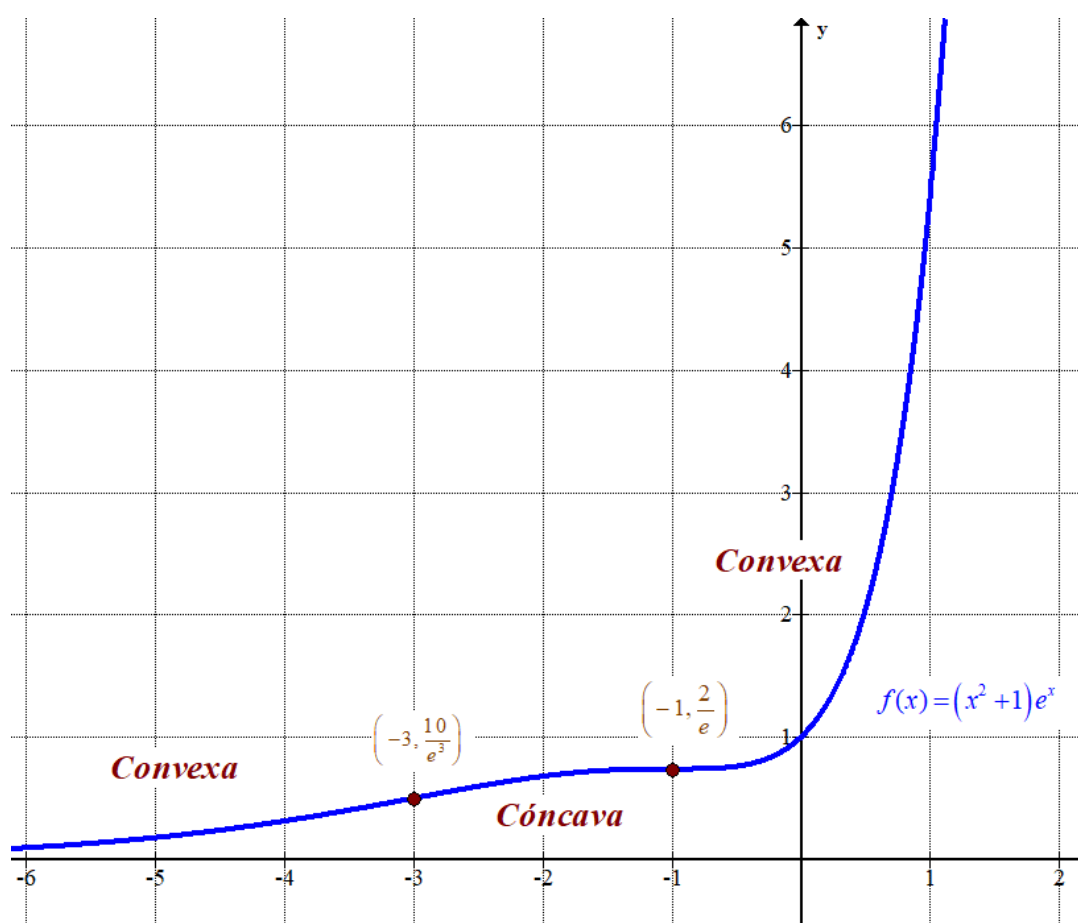
La función es convexa ($\cup$) en $(-\infty, -3) \cup (-1, +\infty)$ y cóncava ($\cap$) en $(-3, -1)$.

La función tiene dos puntos de inflexión: $x = -3$ y $x = -1$.

Como $f(-3) = ((-3)^2 + 1)e^{-3} = \frac{10}{e^3}$ y $f(-1) = ((-1)^2 + 1)e^{-1} = \frac{2}{e}$ los puntos de inflexión

tienen coordenadas $\left(-3, \frac{10}{e^3}\right)$ y $\left(-1, \frac{2}{e}\right)$.

No lo pide el ejercicio, pero dibujamos la gráfica de la función.



EJERCICIO 2 (2.5 puntos)

Sea la función derivable $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} ae^{-x} + b \ln(1-x) & \text{si } x < 0 \\ x + \ln(1+x) & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$,

donde $\ln$ denota la función logaritmo neperiano.

a) **[1,5 puntos]** Determina a y b .

b) **[1 punto]** Halla la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 0$.

a) Si la función es derivable debe ser continua en $x = 0$.

$$\left. \begin{aligned} f(0) &= 0 + \ln(1) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} x + \ln(1+x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} ae^{-x} + b \ln(1-x) = ae^{-0} + b \ln(1-0) = a \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{a=0}$$

La función queda $f(x) = \begin{cases} b \ln(1-x) & \text{si } x < 0 \\ x + \ln(1+x) & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$.

Al ser la función derivable en $x = 0$ deben coincidir las derivadas laterales en dicho valor.

$$f(x) = \begin{cases} b \ln(1-x) & \text{si } x < 0 \\ x + \ln(1+x) & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} b \frac{-1}{1-x} & \text{si } x < 0 \\ 1 + \frac{1}{1+x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} f'(0^-) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} b \frac{-1}{1-x} = \frac{-b}{1} = -b \\ f'(0^+) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 + \frac{1}{1+x} = 1 + 1 = 2 \\ f'(0^-) &= f'(0^+) \end{aligned} \right\} \Rightarrow -b = 2 \Rightarrow \boxed{b=-2}$$

Los valores buscados son $a = 0$ y $b = -2$.

b) La función tiene la expresión $f(x) = \begin{cases} -2 \ln(1-x) & \text{si } x < 0 \\ x + \ln(1+x) & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ y su derivada es

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2}{1-x} & \text{si } x < 0 \\ 1 + \frac{1}{1+x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \quad \text{Calculamos el valor de la función, el de su derivada en } x = 0$$

y determinamos la ecuación de la recta tangente y la recta normal en $x = 0$.

$$\left. \begin{aligned} f(0) &= 0 + \ln(1+0) = 0 \\ f'(0) &= 1 + \frac{1}{1+0} = 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \text{Recta tangente} \rightarrow y - f(0) = f'(0)(x-0) \rightarrow \boxed{y=2x} \\ \text{Recta normal} \rightarrow y - f(0) = \frac{-1}{f'(0)}(x-0) \rightarrow \boxed{y = \frac{-1}{2}x} \end{cases}$$

EJERCICIO 3 (2.5 puntos)

Considera la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x$.

- a) **[1 punto]** Calcula los puntos de corte de la gráfica de f con los ejes de coordenadas y esboza dicha gráfica.
- b) **[1,5 puntos]** Calcula la suma de las áreas de los recintos acotados y limitados por la gráfica de f y el eje de abscisas.

a) Hallamos los puntos de corte con cada uno de los ejes de coordenadas.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x \\ \text{Eje } OY \rightarrow x = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f(0) = 0^3 - 6 \cdot 0^2 + 8 \cdot 0 = 0 \Rightarrow \boxed{A(0,0)}$$

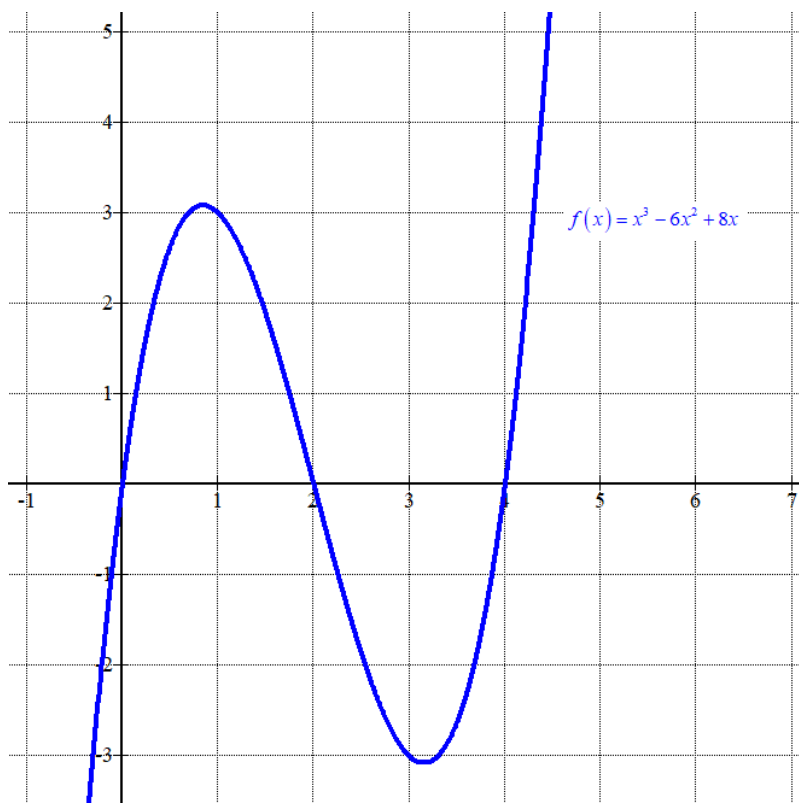
$$\left. \begin{array}{l} f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x \\ \text{Eje } OX \rightarrow y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x^3 - 6x^2 + 8x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 6x + 8) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \rightarrow A(0,0) \\ x^2 - 6x + 8 = 0 \rightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4(1)(8)}}{2} = \frac{6 \pm 2}{2} = \begin{cases} \frac{6+2}{2} = 4 \rightarrow \boxed{B(4,0)} \\ \frac{6-2}{2} = 2 \rightarrow \boxed{C(2,0)} \end{cases} \end{array} \right.$$

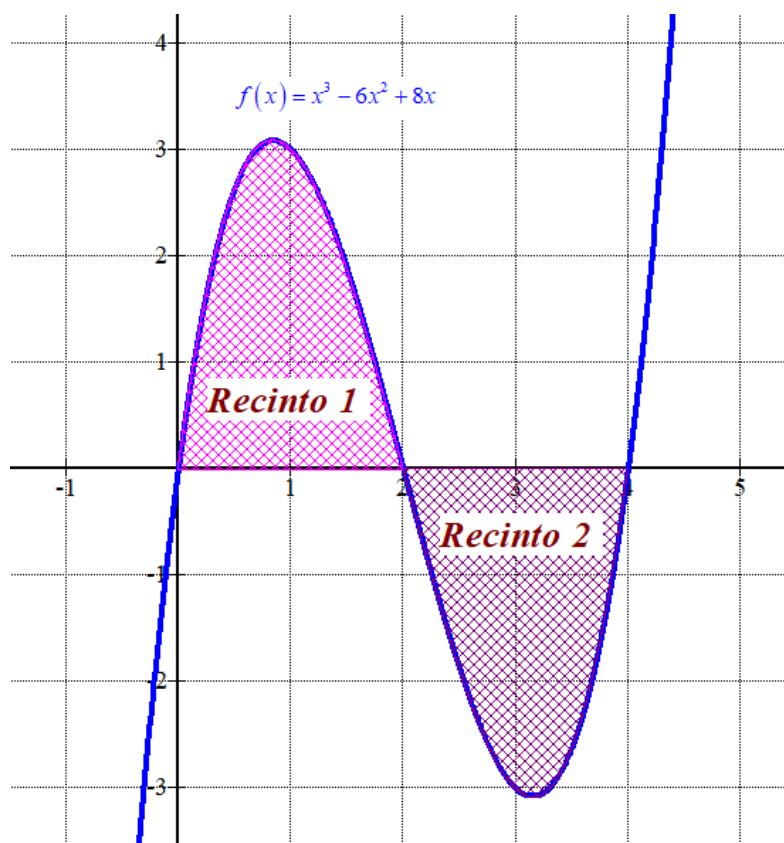
La gráfica de la función corta los ejes en tres puntos: $A(0,0)$, $B(4,0)$ y $C(2,0)$.

Hacemos una tabla de valores y representamos la gráfica de la función.

x	$f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x$
-1	-15
0	0
1	3
2	0
3	-3
4	0
5	15



- b) Los recintos acotados limitados por la gráfica y el eje de abscisas los coloreamos en el siguiente dibujo.



El área del recinto 1 es el valor de la integral definida de la función entre 0 y 2.

$$\begin{aligned} \text{Área 1} &= \int_0^2 f(x) dx = \int_0^2 x^3 - 6x^2 + 8x dx = \left[\frac{x^4}{4} - 2x^3 + 4x^2 \right]_0^2 = \\ &= \left[\frac{2^4}{4} - 2 \cdot 2^3 + 4 \cdot 2^2 \right] - \left[\frac{0^4}{4} - 2 \cdot 0^3 + 4 \cdot 0^2 \right] = 4 - 16 + 16 = \boxed{4u^2} \end{aligned}$$

Como el recinto 2 está situado por debajo del eje de abscisas su área es el valor absoluto de la integral definida de la función entre 2 y 4.

$$\begin{aligned} \int_2^4 f(x) dx &= \int_2^4 x^3 - 6x^2 + 8x dx = \left[\frac{x^4}{4} - 2x^3 + 4x^2 \right]_2^4 = \\ &= \left[\frac{4^4}{4} - 2 \cdot 4^3 + 4 \cdot 4^2 \right] - \left[\frac{2^4}{4} - 2 \cdot 2^3 + 4 \cdot 2^2 \right] = 64 - 64 - (4 - 16 + 16) = -4 \end{aligned}$$

El área del recinto 2 tiene un valor de 4 unidades cuadradas.

La suma de las dos áreas es $4 + 4 = 8$ unidades cuadradas.

EJERCICIO 4 (2.5 puntos)

Calcula $\int \frac{e^{3x}-1}{e^x-3} dx$. (Sugerencia: efectúa el cambio de variable $t = e^x$).

$$\int \frac{e^{3x}-1}{e^x-3} dx = \left\{ \begin{array}{l} e^x = t \rightarrow e^x dx = dt \\ dx = \frac{dt}{e^x} = \frac{dt}{t} \\ e^{3x} = (e^x)^3 = t^3 \end{array} \right\} = \int \frac{t^3-1}{t-3} \frac{dt}{t} = \int \frac{t^3-1}{t^2-3t} dt = \dots$$

t^3	-1	$\frac{t^2-3t}{t+3}$
$-t^3+3t^2$		
$3t^2$	-1	
$-3t^2+9t$		
$9t-1$		

$$\dots = \int t+3 + \frac{9t-1}{t^2-3t} dt = \frac{t^2}{2} + 3t + \int \frac{9t-1}{t^2-3t} dt = \dots$$

Descomposición en fracciones simples

$$\frac{9t-1}{t^2-3t} = \frac{9t-1}{t(t-3)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t-3} = \frac{A(t-3)+Bt}{t(t-3)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9t-1 = A(t-3)+Bt \Rightarrow \begin{cases} t=0 \rightarrow 0-1 = -3A \rightarrow A = \frac{1}{3} \\ t=3 \rightarrow 27-1 = 3B \rightarrow B = \frac{26}{3} \end{cases} \Rightarrow \frac{9t-1}{t^2-3t} = \frac{1/3}{t} + \frac{26/3}{t-3}$$

$$\dots = \frac{t^2}{2} + 3t + \int \frac{1/3}{t} dt + \int \frac{26/3}{t-3} dt = \frac{t^2}{2} + 3t + \frac{1}{3} \int \frac{1}{t} dt + \frac{26}{3} \int \frac{1}{t-3} dt =$$

$$= \frac{t^2}{2} + 3t + \frac{1}{3} \ln t + \frac{26}{3} \ln(t-3) = \{e^x = t\} = \frac{e^{2x}}{2} + 3e^x + \frac{1}{3} \ln e^x + \frac{26}{3} \ln(e^x-3) =$$

$$= \boxed{\frac{e^{2x}}{2} + 3e^x + \frac{x}{3} + \frac{26}{3} \ln(e^x-3) + K}$$

EJERCICIO 5 (2.5 puntos)

Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 7 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/9 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a) [1,25 puntos] Calcula los determinantes de las matrices $((AB)^5)^{-1}$ y $27AB^6$.

b) [1,25 puntos] Halla la matriz X, si es posible, que verifica que $AXB = 9I$, donde I es la matriz identidad de orden 3.

a) Calculamos el valor de los determinantes de las matrices A y B.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 7 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 0 + 0 - 0 + 7 - 0 = 9 \neq 0 \rightarrow A \text{ tiene inversa}$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/9 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 0 - \frac{1}{9} - 0 - 0 = -\frac{1}{9} \neq 0 \rightarrow B \text{ tiene inversa}$$

Aplicamos las propiedades de los determinantes.

$$\left| ((AB)^5)^{-1} \right| = \frac{1}{|(AB)^5|} = \frac{1}{|AB|^5} = \frac{1}{(|A| \cdot |B|)^5} = \left\{ \begin{matrix} |A| = 9 \\ |B| = -\frac{1}{9} \end{matrix} \right\} = \frac{1}{\left(9 \cdot \frac{-1}{9}\right)^5} = \frac{1}{(-1)^5} = \boxed{-1}$$

$$\begin{aligned} |27AB^6| &= \left\{ \begin{matrix} AB^6 \text{ es una matriz} \\ \text{cuadrada de orden 3} \end{matrix} \right\} = 27^3 |AB^6| = 27^3 \cdot |A| \cdot |B|^6 = \\ &= 27^3 \cdot |A| \cdot |B|^6 = 27^3 \cdot 9 \cdot \left(\frac{-1}{9}\right)^6 = \boxed{\frac{1}{3}} \end{aligned}$$

b) Resolvemos la ecuación matricial despejando primero la matriz X.

$$AXB = 9I \Rightarrow X = A^{-1}(9I)B^{-1} = 9A^{-1}B^{-1}$$

Determinamos las matrices inversas de A y B.

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^T)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}{9} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 7 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -7 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \frac{\text{Adj}(B^T)}{|B|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1/9 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}{-1/9} = -9 \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 0 & 1/9 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 2 & 1/9 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 0 & 1/9 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & 1/9 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = -9 \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1/9 & 0 \\ -1/9 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -18 \end{pmatrix}$$

Determinamos la expresión de la matriz X.

$$X = 9A^{-1}B^{-1} = 9 \cdot \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -7 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -18 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0+0+0 & 0+1+0 & 18+0+0 \\ 0+0+0 & 0+1+0 & -63+0+0 \\ 0+0+9 & 0+0+0 & 0+0-162 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 18 \\ 0 & 1 & -63 \\ 9 & 0 & -162 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 6 (2.5 puntos)

Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & a \\ 5 & 3a-1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) [1,25 puntos] Calcula el rango de A según los valores de a.

b) [1,25 puntos] Si $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ y $a = 2$ resuelve, si es posible, el sistema $AX = B$.

a) Calculamos el determinante de la matriz A y averiguamos cuando se anula.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & a \\ 5 & 3a-1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 6a - 2 - 0 - 0 - 3a^2 + a = -3a^2 + 7a - 2$$

$$|A| = 0 \Rightarrow -3a^2 + 7a - 2 = 0 \Rightarrow a = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4(-3)(-2)}}{2(-3)} = \frac{-7 \pm 5}{-6} = \begin{cases} \frac{-7+5}{-6} = \frac{1}{3} \\ \frac{-7-5}{-6} = 2 \end{cases}$$

Nos surgen tres situaciones distintas que analizamos por separado.

CASO 1. $a \neq \frac{1}{3}$ y $a \neq 2$.

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3.

CASO 2. $a = \frac{1}{3}$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

La matriz queda $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1/3 \\ 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Si tomamos el menor de orden 2 que resulta de quitar

la primera fila y segunda columna (nula) $\rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1/3 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{5}{3} \neq 0$. El rango de A es 2.

CASO 3. $a = 2$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

La matriz queda $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 5 & 5 & 0 \end{pmatrix}$. Si tomamos el menor de orden 2 que resulta de quitar

la primera fila y primera columna $\rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = -10 \neq 0$. El rango de A es 2.

Resumiendo: Si $a \neq \frac{1}{3}$ y $a \neq 2$ el rango de A es 3 y si $a = \frac{1}{3}$ o $a = 2$ el rango de A es 2.

b) Para $a = 2$ la matriz queda $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 5 & 5 & 0 \end{pmatrix}$. Intentamos resolver el sistema $AX = B$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 5 & 5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x+z=1 \\ 2x+2z=2 \\ 5x+5y=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+z=1 \\ x+z=1 \\ 5x+5y=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+z=1 \\ 5x+5y=4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=1-z \\ 5x+5y=4 \end{cases} \Rightarrow 5(1-z)+5y=4 \Rightarrow 5y=4-5+5z \Rightarrow 5y=5z-1 \Rightarrow y=z-\frac{1}{5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=1-\lambda \\ y=\frac{-1}{5}+\lambda; \lambda \in \mathbb{R} \\ z=\lambda \end{cases}$$

El sistema tiene infinitas soluciones: $x=1-\lambda$; $y=\frac{-1}{5}+\lambda$; $z=\lambda$, siendo $\lambda \in \mathbb{R}$.

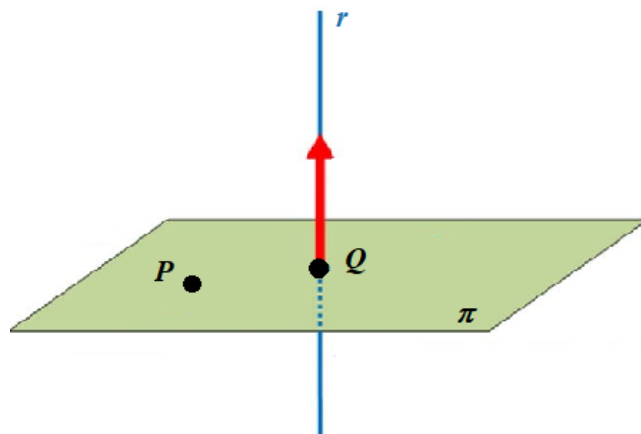
EJERCICIO 7 (2.5 puntos)

Considera la recta $r \equiv \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{2} = 3-z$ y el punto $P(0, 2, -4)$.

a) [1,25 puntos] Calcula el punto de r a menor distancia de P .

b) [1,25 puntos] Halla los puntos de r cuya distancia a P sea igual a $\sqrt{50}$.

a) El punto de la recta a menor distancia del punto P es el punto Q del dibujo. Siendo π el plano perpendicular a la recta que contiene al punto P .



El plano π al ser perpendicular a la recta tiene como vector normal el vector director de la recta. Hallamos su ecuación.

$$r \equiv \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{-1} \Rightarrow \vec{v}_r = (2, 2, -1)$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{n} = \vec{v}_r = (2, 2, -1) \\ P(0, 2, -4) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \pi: 2x + 2y - z + D = 0 \\ P(0, 2, -4) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow 2 \cdot 0 + 2 \cdot 2 - (-4) + D = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D + 8 = 0 \Rightarrow D = -8 \Rightarrow \boxed{\pi: 2x + 2y - z - 8 = 0}$$

Hallamos el punto Q intersección de recta y plano resolviendo el sistema formado por sus ecuaciones.

$$r \equiv \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{-1} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \vec{v}_r = (2, 2, -1) \\ A_r(-1, 2, 3) \in r \end{array} \right. \Rightarrow r: \begin{cases} x = -1 + 2\lambda \\ y = 2 + 2\lambda \\ z = 3 - \lambda \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} \pi: 2x + 2y - z - 8 = 0 \\ r: \begin{cases} x = -1 + 2\lambda \\ y = 2 + 2\lambda \\ z = 3 - \lambda \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow 2(-1 + 2\lambda) + 2(2 + 2\lambda) - (3 - \lambda) - 8 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2 + 4\lambda + 4 + 4\lambda - 3 + \lambda - 8 = 0 \Rightarrow 9\lambda - 9 = 0 \Rightarrow \lambda = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 + 2 = 1 \\ y = 2 + 2 = 4 \\ z = 3 - 1 = 2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{Q(1, 4, 2)}$$

El punto de r a menor distancia de P es $Q(1, 4, 2)$.

b) Un punto B de la recta r tiene coordenadas $B(-1+2\lambda, 2+2\lambda, 3-\lambda)$.

La distancia del punto B al punto P es el módulo del vector $\overrightarrow{PB}$.

$$\left. \begin{array}{l} B(-1+2\lambda, 2+2\lambda, 3-\lambda) \\ P(0, 2, -4) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{PB} = (-1+2\lambda, 2+2\lambda, 3-\lambda) - (0, 2, -4) = (-1+2\lambda, 2\lambda, 7-\lambda)$$

$$d(P, B) = |\overrightarrow{PB}| = \sqrt{(-1+2\lambda)^2 + (2\lambda)^2 + (7-\lambda)^2} =$$

$$= \sqrt{1-4\lambda+4\lambda^2+4\lambda^2+49-14\lambda+\lambda^2} = \sqrt{9\lambda^2-18\lambda+50}$$

Igualamos esta distancia a $\sqrt{50}$ y determinamos el valor de λ .

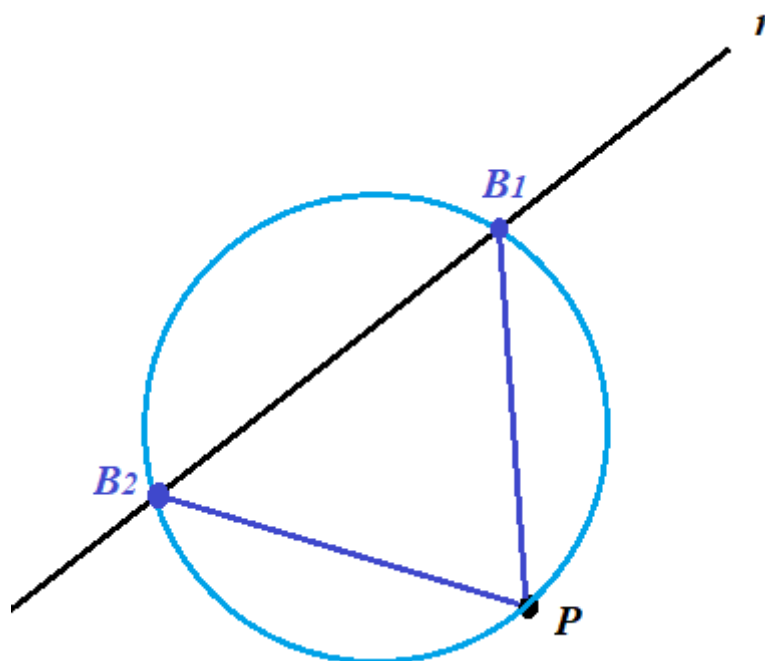
$$d(P, B) = \sqrt{50} \Rightarrow \sqrt{9\lambda^2-18\lambda+50} = \sqrt{50} \Rightarrow 9\lambda^2-18\lambda+50 = 50 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9\lambda^2-18\lambda = 0 \Rightarrow 9\lambda(\lambda-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda - 2 = 0 \rightarrow \lambda = 2 \end{cases}$$

Obtenemos dos puntos que cumplen lo pedido.

Para $\lambda = 0$ el punto de la recta es $B_1(-1, 2, 3)$.

Para $\lambda = 2$ el punto de la recta es $B_2(-1+4, 2+4, 3-2) \rightarrow B_2(3, 6, 1)$.



EJERCICIO 8 (2.5 puntos)

Sea π_1 el plano determinado por los puntos $A(1,0,0)$, $B(1,1,-3)$ y $C(0,1,1)$, y sea $\pi_2 \equiv x - y + z - 1 = 0$. Determina la ecuación de la recta paralela a ambos planos que pasa por el origen.

Hallamos la ecuación del plano π_1 .

$$\left. \begin{array}{l} A(1,0,0) \\ B(1,1,-3) \\ C(0,1,1) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \vec{u} = \overrightarrow{AB} = (1,1,-3) - (1,0,0) = (0,1,-3) \\ \vec{v} = \overrightarrow{AC} = (0,1,1) - (1,0,0) = (-1,1,1) \\ A(1,0,0) \in \pi_1 \end{array} \right\} \Rightarrow \pi_1: \begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ 0 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x - 1 + 3y + 0 + z - 0 + 3x - 3 = 0 \Rightarrow \boxed{\pi_1: 4x + 3y + z - 4 = 0}$$

Los dos planos coinciden en la recta r definida por las ecuaciones de los planos.

$$r: \begin{cases} \pi_1: 4x + 3y + z - 4 = 0 \\ \pi_2: x - y + z - 1 = 0 \end{cases}$$

Cualquier recta paralela a la recta r será paralela a ambos planos. Hallamos un vector director de la recta r .

$$r: \begin{cases} 4x + 3y + z - 4 = 0 \rightarrow \vec{n}_1 = (4, 3, 1) \\ x - y + z - 1 = 0 \rightarrow \vec{n}_2 = (1, -1, 1) \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_r = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 4 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 3i + j - 4k - 3k - 4j + i = 4i - 3j - 7k = (4, -3, -7)$$

La recta pedida es la recta s que pasa por el punto $O(0,0,0)$ y tiene como vector director $\vec{v}_r = (4, -3, -7)$.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_s = \vec{v}_r = (4, -3, -7) \\ O(0,0,0) \end{array} \right\} \Rightarrow s: \begin{cases} x = 4\lambda \\ y = -3\lambda; \lambda \in \mathbb{R} \\ z = -7\lambda \end{cases}$$

La recta paralela a ambos planos que pasa por el origen tiene ecuación $s: \begin{cases} x = 4\lambda \\ y = -3\lambda; \lambda \in \mathbb{R} \\ z = -7\lambda \end{cases}$.