



**PRUEBA DE EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL
ACCESO A LA UNIVERSIDAD Y PRUEBAS DE ADMISIÓN
ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS
CURSO 2023-2024**

MATEMÁTICAS II

Instrucciones: a) **Duración: 1 hora y 30 minutos**

- b) Todas las cuestiones deben responderse en el papel entregado para la realización del examen y nunca en los folios que contienen los enunciados.
- c) Este examen consta de 8 ejercicios distribuidos en 4 bloques de 2 ejercicios cada uno.
- d) Cada ejercicio tiene un valor máximo de 2.5 puntos.
- e) Se realizarán únicamente un ejercicio de cada bloque. En caso de responder a dos ejercicios de un bloque, sólo se corregirá el que aparezca físicamente en primer lugar.
- f) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, ni gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.
- g) En la puntuación máxima de cada ejercicio están contemplados 0,25 puntos para valorar la expresión correcta de los procesos y métodos utilizados.

BLOQUE A. Resuelve sólo uno de los siguientes ejercicios:

EJERCICIO 1 (2.5 puntos)

Sea f la función definida por $f(x) = \frac{ax^3 + bx^2 + x - 1}{x^2 - 1}$, para $x \neq \pm 1$. Sabiendo que su gráfica tiene una asíntota oblicua que pasa por el punto $(0, 1)$ y es paralela a la recta $y = 2x$, calcula la asíntota oblicua y los valores de a y b .

EJERCICIO 2 (2.5 puntos)

Considera la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \arctg(x + \pi)$, donde $\arctg$ denota la función arcotangente.

- a) **[1,5 puntos]** Calcula los intervalos de concavidad y convexidad de f . Estudia y halla, si existen, los puntos de inflexión de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).
- b) **[1 punto]** Calcula $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\arctg(x + \pi)}{\sin(x)}$.

BLOQUE B. Resuelve sólo uno de los siguientes ejercicios:

EJERCICIO 3 (2.5 puntos)

Halla la función $f: (2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ que pasa por el punto $(3, -4\ln 5)$ y verifica

$$f'(x) = \frac{3x^2 + 4x + 12}{x^2 - 4} \quad \text{donde } \ln \text{ denota la función logaritmo neperiano.}$$

EJERCICIO 4 (2.5 puntos)

Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = (x^2 - 3x + 5)e^x$. Halla una primitiva de f cuya gráfica pase por el punto $(0, 5)$.



**PRUEBA DE EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL
ACCESO A LA UNIVERSIDAD Y PRUEBAS DE ADMISIÓN
ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS
CURSO 2023-2024**

MATEMÁTICAS II

BLOQUE C. Resuelve sólo uno de los siguientes ejercicios:

EJERCICIO 5 (2.5 puntos)

Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ m & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -4 & 8 & 0 \\ 0 & 4 & 4 \\ 4 & 12 & 20 \end{pmatrix}$.

- a) **[0,75 puntos]** Determina los valores de m para los que la matriz A^2 tiene inversa.
b) **[1,75 puntos]** Para $m = 0$ calcula, si es posible, la matriz X que verifica $A^2 X = \frac{1}{2}(A + B)$.

EJERCICIO 6 (2.5 puntos)

Determina un número natural de tres cifras sabiendo que la suma de sus dígitos es 9, que la diferencia de dicho número con el que se obtiene al intercambiar la cifra de las centenas por la de las unidades es 198, y que si consideramos la suma entre ambos números, es decir, entre el número a determinar y el que se obtiene al intercambiar sus cifras, el resultado es 828.

BLOQUE D. Resuelve sólo uno de los siguientes ejercicios:

EJERCICIO 7 (2.5 puntos)

Considera los puntos $P(1,0,1)$ y $Q(3,-2,1)$.

- a) **[1 punto]** Calcula el plano perpendicular al segmento PQ que pasa por su punto medio.
b) **[1,5 puntos]** Calcula el plano paralelo a la recta $r \equiv 1 - x = \frac{y-2}{3} = z+1$ que pasa por P y Q .

EJERCICIO 8 (2.5 puntos)

Considera los puntos $A(1,1,2)$, $B(1,0,1)$ y $C(1,-1,2)$

- a) **[1,25 puntos]** Determina el área del triángulo de vértices A , B y C .
b) **[1,25 puntos]** Calcula D para que los puntos A , B , C y D sean los vértices consecutivos de un paralelogramo.

SOLUCIONES**EJERCICIO 1 (2.5 puntos)**

Sea f la función definida por $f(x) = \frac{ax^3 + bx^2 + x - 1}{x^2 - 1}$, para $x \neq \pm 1$. Sabiendo que su gráfica tiene una asíntota oblicua que pasa por el punto $(0, 1)$ y es paralela a la recta $y = 2x$, calcula la asíntota oblicua y los valores de a y b .

La asíntota oblicua es paralela a la recta $y = 2x$ por lo que tiene la misma pendiente y su ecuación será $y = 2x + c$.

Como la asíntota pasa por el punto $(0, 1)$ tenemos que $1 = 2 \cdot 0 + c \rightarrow c = 1$.

La asíntota oblicua tiene ecuación $y = 2x + 1$.

Por ser esta la asíntota oblicua debe cumplirse que $2 = m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$ y que

$$1 = n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - 2x).$$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{ax^3 + bx^2 + x - 1}{x^2 - 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \frac{ax^3 + bx^2 + x - 1}{x^3 - x} = \{a \neq 0\} =$$

$$= \{\text{Grado de numerador} = \text{Grado de denominador}\} = \frac{a}{1} = a \Rightarrow \boxed{a = 2}$$

Con $a = 2$ la función queda $f(x) = \frac{2x^3 + bx^2 + x - 1}{x^2 - 1}$. Aplicamos que $1 = n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - 2x)$.

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - 2x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^3 + bx^2 + x - 1}{x^2 - 1} - 2x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\cancel{2x^3} + bx^2 + x - 1 - \cancel{2x^3} + 2x}{x^2 - 1} \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{bx^2 + 3x - 1}{x^2 - 1} \right) = \{b \neq 0\} = \{\text{Grado de numerador} = \text{Grado de denominador}\} =$$

$$= \frac{b}{1} = b \Rightarrow \boxed{b = 1}$$

Los valores buscados son $a = 2$ y $b = 1$.

EJERCICIO 2 (2.5 puntos)

Considera la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \operatorname{arctg}(x + \pi)$, donde arctg denota la función arcotangente.

a) [1,5 puntos] Calcula los intervalos de concavidad y convexidad de f . Estudia y halla, si existen, los puntos de inflexión de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

b) [1 punto] Calcula $\lim_{x \rightarrow -\pi} \frac{\operatorname{arctg}(x + \pi)}{\operatorname{sen}(x)}$.

a) Calculamos la segunda derivada de la función y averiguamos cuando se anula (posibles puntos de inflexión).

$$f(x) = \operatorname{arctg}(x + \pi) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{1 + (x + \pi)^2} \Rightarrow f''(x) = \frac{0 \cdot (1 + (x + \pi)^2) - 2(x + \pi) \cdot 1}{1 + (x + \pi)^2} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{aligned} f''(x) &= \frac{-2(x + \pi)}{1 + (x + \pi)^2} \\ f''(x) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{-2(x + \pi)}{1 + (x + \pi)^2} = 0 \Rightarrow -2(x + \pi) = 0 \Rightarrow x + \pi = 0 \Rightarrow \boxed{x = -\pi}$$

La función tiene un posible punto de inflexión en $x = -\pi$. Estudiamos la concavidad y convexidad antes y después de este valor.

- En el intervalo $(-\infty, -\pi)$ tomamos $x = -2\pi$ y la derivada segunda vale

$$f''(-2\pi) = \frac{-2(-2\pi + \pi)}{1 + (-2\pi + \pi)^2} = \frac{2\pi}{1 + \pi^2} > 0. \text{ La función es convexa (U) en } (-\infty, -\pi).$$

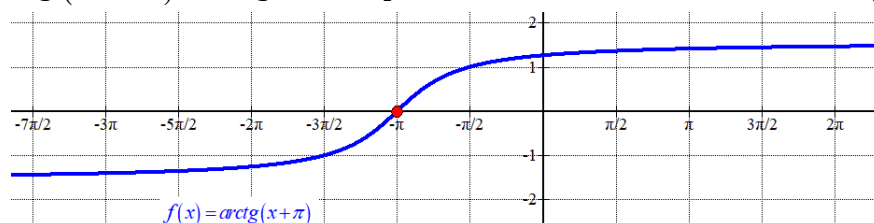
- En el intervalo $(-\pi, +\infty)$ tomamos $x = 0$ y la derivada segunda vale

$$f''(0) = \frac{-2(0 + \pi)}{1 + (0 + \pi)^2} = \frac{-2\pi}{1 + \pi^2} < 0. \text{ La función es cóncava (O) en } (-\pi, +\infty).$$

La función es convexa (U) en $(-\infty, -\pi)$ y cóncava (O) en $(-\pi, +\infty)$.

La función presenta un punto de inflexión en $x = -\pi$. Como

$$f(-\pi) = \operatorname{arctg}(-\pi + \pi) = \operatorname{arctg}0 = 0 \text{ el punto de inflexión tiene coordenadas } (-\pi, 0).$$



b) Calculamos el valor del límite.

$$\lim_{x \rightarrow -\pi} \frac{\operatorname{arctg}(x + \pi)}{\operatorname{sen}(x)} = \frac{\operatorname{arctg}(-\pi + \pi)}{\operatorname{sen}(-\pi)} = \frac{\operatorname{arctg}(0)}{0} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\pi} \frac{1}{\frac{1 + (x + \pi)^2}{\cos(x)}} = \lim_{x \rightarrow -\pi} \frac{1}{(1 + (x + \pi)^2) \cos(x)} = \frac{1}{(1 + (-\pi + \pi)^2) \cos(-\pi)} = \frac{1}{-1} = -1$$

EJERCICIO 3 (2.5 puntos)

Halla la función $f : (2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ que pasa por el punto $(3, -4\ln 5)$ y verifica

$$f'(x) = \frac{3x^2 + 4x + 12}{x^2 - 4} \text{ donde } \ln \text{ denota la función logaritmo neperiano.}$$

La función $f(x)$ es la integral de su derivada $f'(x)$.

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int \frac{3x^2 + 4x + 12}{x^2 - 4} dx = \dots$$

$\begin{array}{r} 3x^2 + 4x + 12 \quad \quad x^2 - 4 \\ -3x^2 \qquad +12 \qquad \quad 3 \\ \hline 4x + 24 \end{array}$
--

$$\dots = \int 3 + \frac{4x + 24}{x^2 - 4} dx = \int 3 dx + \int \frac{4x + 24}{x^2 - 4} dx = \dots$$

Descomposición en fracciones simples

$$\frac{4x + 24}{x^2 - 4} = \frac{4x + 24}{(x - 2)(x + 2)} = \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x + 2} = \frac{A(x + 2) + B(x - 2)}{(x - 2)(x + 2)} \Rightarrow$$

$$4x + 24 = A(x + 2) + B(x - 2) \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \rightarrow -8 + 24 = B(-4) \rightarrow 16 = -4B \rightarrow B = -4 \\ x = 2 \rightarrow 8 + 24 = 4A \rightarrow 32 = 4A \rightarrow A = 8 \end{cases}$$

$$\frac{4x + 24}{x^2 - 4} = \frac{8}{x - 2} - \frac{4}{x + 2}$$

$$\dots = 3x + \int \frac{8}{x - 2} - \frac{4}{x + 2} dx = 3x + 8 \int \frac{1}{x - 2} dx - 4 \int \frac{1}{x + 2} dx =$$

$$= 3x + 8 \ln(x - 2) - 4 \ln(x + 2) + C$$

Como sabemos que la función pasa por el punto $(3, -4\ln 5)$ entonces debe cumplirse que $f(3) = -4\ln 5$.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = 3x + 8 \ln(x - 2) - 4 \ln(x + 2) + C \\ f(3) = -4 \ln 5 \end{array} \right\} \Rightarrow -4 \ln 5 = 9 + 8 \ln 1 - 4 \ln 5 + C \Rightarrow \boxed{C = -9}$$

La función tiene la expresión $f(x) = 3x + 8 \ln(x - 2) - 4 \ln(x + 2) - 9$.

EJERCICIO 4 (2.5 puntos)

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = (x^2 - 3x + 5)e^x$. Halla una primitiva de f cuya gráfica pase por el punto $(0, 5)$.

Calculamos la primitiva pedida.

$$F(x) = \int f(x) dx = \int (x^2 - 3x + 5)e^x dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ u = x^2 - 3x + 5 \rightarrow du = (2x - 3) dx \\ dv = e^x dx \rightarrow v = \int e^x dx = e^x \end{array} \right\} =$$

$$= (x^2 - 3x + 5)e^x - \int (2x - 3)e^x dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ u = 2x - 3 \rightarrow du = 2 dx \\ dv = e^x dx \rightarrow v = \int e^x dx = e^x \end{array} \right\} =$$

$$= (x^2 - 3x + 5)e^x - \left[(2x - 3)e^x - \int 2e^x dx \right] = (x^2 - 3x + 5)e^x - (2x - 3)e^x + 2e^x =$$

$$= (x^2 - 3x + 5 - 2x + 3 + 2)e^x = (x^2 - 5x + 10)e^x + C$$

La primitiva de $f(x)$ es $F(x) = (x^2 - 5x + 10)e^x + C$. Si pasa por el punto $(0, 5)$ entonces debe cumplirse $F(0) = 5$.

$$\left. \begin{array}{l} F(x) = (x^2 - 5x + 10)e^x + C \\ F(0) = 5 \end{array} \right\} \Rightarrow 5 = (0^2 - 5 \cdot 0 + 10)e^0 + C \Rightarrow 5 = 10 + C \Rightarrow \boxed{C = -5}$$

La primitiva buscada es $F(x) = (x^2 - 5x + 10)e^x - 5$.

EJERCICIO 5 (2.5 puntos)

Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ m & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -4 & 8 & 0 \\ 0 & 4 & 4 \\ 4 & 12 & 20 \end{pmatrix}$.

a) **[0,75 puntos]** Determina los valores de m para los que la matriz A^2 tiene inversa.

b) **[1,75 puntos]** Para $m=0$ calcula, si es posible, la matriz X que verifica $A^2 X = \frac{1}{2}(A+B)$.

a) Calculamos la expresión de A^2 .

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ m & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ m & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0+1 & 0+0-1 & 1+0+2 \\ m+m+0 & 0+1+0 & m+0+0 \\ 1-m+2 & 0-1-2 & 1+0+4 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 2m & 1 & m \\ 3-m & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

Averiguamos cuando se anula el determinante de A^2 .

$$|A^2| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 2m & 1 & m \\ 3-m & -3 & 5 \end{vmatrix} = 10 - m(3-m) - 18m - 3(3-m) + 10m + 6m =$$

$$= 10 - \cancel{3m} + m^2 - 18m - 9 + \cancel{3m} + 10m + 6m = m^2 - 2m + 1$$

$$|A^2| = 0 \Rightarrow m^2 - 2m + 1 = 0 \Rightarrow m = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(1)}}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Para $m = 1$ se anula el determinante de A^2 y por tanto no existe la inversa. Para cualquier valor $m \neq 1$ el determinante es no nulo y existe la inversa de A^2 .

b) Para $m=0$ existe la inversa de A^2 . La calculamos.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow |A^2| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & 5 \end{vmatrix} = 10 + 0 + 0 - 9 - 0 - 0 = 1 \neq 0$$

$$(A^2)^{-1} = \frac{\text{Adj}\left((A^2)^T\right)}{|A^2|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & -3 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}}{1} =$$

$$(A^2)^{-1} = \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Hallamos la expresión de X.

$$A+B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & 8 & 0 \\ 0 & 4 & 4 \\ 4 & 12 & 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 8 & 1 \\ 0 & 5 & 4 \\ 5 & 11 & 22 \end{pmatrix}$$

$$A^2 X = \frac{1}{2}(A+B) \Rightarrow X = \frac{1}{2}(A^2)^{-1}(A+B) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 8 & 1 \\ 0 & 5 & 4 \\ 5 & 11 & 22 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -15+0-15 & 40-20-33 & 5-16-66 \\ 0 & 5 & 4 \\ 9+0+10 & -24+15+22 & -3+12+44 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -30 & -13 & -77 \\ 0 & 5 & 4 \\ 19 & 13 & 53 \end{pmatrix}$$

La matriz buscada es $X = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -30 & -13 & -77 \\ 0 & 5 & 4 \\ 19 & 13 & 53 \end{pmatrix}.$

EJERCICIO 6 (2.5 puntos)

Determina un número natural de tres cifras sabiendo que la suma de sus dígitos es 9, que la diferencia de dicho número con el que se obtiene al intercambiar la cifra de las centenas por la de las unidades es 198, y que si consideramos la suma entre ambos números, es decir, entre el número a determinar y el que se obtiene al intercambiar sus cifras, el resultado es 828.

Sea el número $xyz = 100x + 10y + z$.

“La suma de sus dígitos es 9” $\rightarrow x + y + z = 9$.

“La diferencia de dicho número con el que se obtiene al intercambiar la cifra de las centenas por la de las unidades es 198” $\rightarrow xyz - zyx = 198$.

“La suma entre ambos números, es decir, entre el número a determinar y el que se obtiene al intercambiar sus cifras, es 828” $\rightarrow xyz + zyx = 828$.

Reunimos las ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 9 \\ xyz - zyx = 198 \\ xyz + zyx = 828 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 9 \\ 100x + 10y + z - (100z + 10y + x) = 198 \\ 100x + 10y + z + 100z + 10y + x = 828 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 9 \\ \Rightarrow 100x + 10y + z - 100z - 10y - x = 198 \\ 100x + 10y + z + 100z + 10y + x = 828 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 9 \\ 99x - 99z = 198 \\ 101x + 20y + 101z = 828 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 9 \\ \Rightarrow x - z = 2 \rightarrow x = 2 + z \\ 101x + 20y + 101z = 828 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2 + z + y + z = 9 \\ 101(2 + z) + 20y + 101z = 828 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} y + 2z = 7 \\ 202 + 101z + 20y + 101z = 828 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y = 7 - 2z \\ 202z + 20y = 626 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 202z + 20(7 - 2z) = 626 \Rightarrow 202z + 140 - 40z = 626 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 162z = 486 \Rightarrow \boxed{z = \frac{486}{162} = 3} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \boxed{y = 7 - 6 = 1} \\ \boxed{x = 2 + 3 = 5} \end{array} \right.$$

El número que cumple lo pedido es 513.

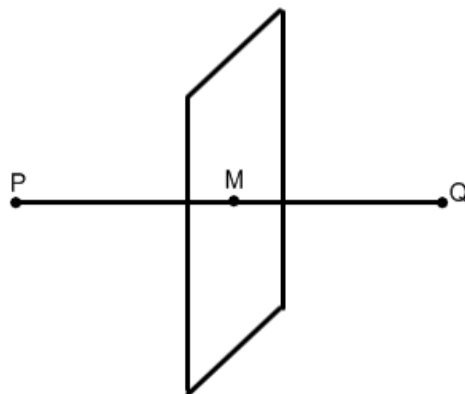
EJERCICIO 7 (2.5 puntos)

Considera los puntos $P(1,0,1)$ y $Q(3,-2,1)$.

- a) [1 punto] Calcula el plano perpendicular al segmento PQ que pasa por su punto medio.
 b) [1,5 puntos] Calcula el plano paralelo a la recta $r \equiv 1-x = \frac{y-2}{3} = z+1$ que pasa por P y Q.

- a) Calculamos las coordenadas del punto medio M del segmento PQ.

$$M = \frac{(1,0,1) + (3,-2,1)}{2} = (2,-1,1)$$



El plano perpendicular al segmento PQ que pasa por su punto medio M tiene como vector normal el vector $\overrightarrow{PQ}$.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{n} = \overrightarrow{PQ} = (3,-2,1) - (1,0,1) = (2,-2,0) \\ M(2,-1,1) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \pi: 2x - 2y + D = 0 \\ M(2,-1,1) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow 4 + 2 + D = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D = -6 \Rightarrow \pi: 2x - 2y - 6 = 0 \Rightarrow \boxed{\pi: x - y - 3 = 0}$$

El plano perpendicular al segmento PQ que pasa por su punto medio tiene ecuación $\pi: x - y - 3 = 0$.

- b) La recta $r \equiv \frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+1}{1}$ tiene como vector director $\vec{v}_r = (-1,3,1)$. El plano paralelo a la recta r tiene como uno de sus vectores directores el vector director de la recta. El otro vector director es el vector $\overrightarrow{PQ} = (2,-2,0)$.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} = \vec{v}_r = (-1,3,1) \\ \vec{v} = \overrightarrow{PQ} = (2,-2,0) \\ P(1,0,1) \in \pi' \end{array} \right\} \Rightarrow \pi': \begin{vmatrix} x-1 & y & z-1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 + 2y + 2(z-1) - 6(z-1) + 0 + 2(x-1) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2y + 2z - 2 - 6z + 6 + 2x - 2 = 0 \Rightarrow 2x + 2y - 4z + 2 = 0 \Rightarrow \boxed{\pi': x + y - 2z + 1 = 0}$$

El plano paralelo a la recta $r \equiv 1-x = \frac{y-2}{3} = z+1$ que pasa por P y Q tiene ecuación $\pi': x + y - 2z + 1 = 0$.

EJERCICIO 8 (2.5 puntos)

Considera los puntos $A(1,1,2)$, $B(1,0,1)$ y $C(1,-1,2)$

- a) [1,25 puntos] Determina el área del triángulo de vértices A, B y C.
 b) [1,25 puntos] Calcula D para que los puntos A, B, C y D sean los vértices consecutivos de un paralelogramo.

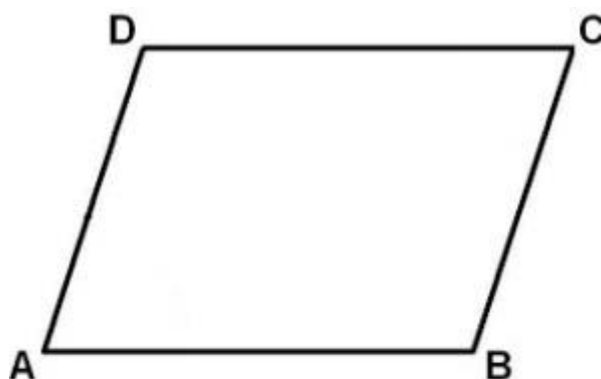
- a) El área del triángulo de vértices A, B y C es la mitad del módulo del producto vectorial $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$.

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (1,0,1) - (1,1,2) = (0,-1,-1) \\ \overrightarrow{AC} = (1,-1,2) - (1,1,2) = (0,-2,0) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 2i = (2,0,0)$$

$$\text{Área } ABC = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}{2} = \frac{\sqrt{2^2 + 0^2 + 0^2}}{2} = 1 \text{ u}^2$$

El área del triángulo es de 1 unidad cuadrada.

- b) La situación planteada es la del dibujo.



Al ser un paralelogramo los vectores $\overrightarrow{AD}$ y $\overrightarrow{BC}$ tienen las mismas coordenadas.
 El punto D se obtiene sumando al punto A el vector $\overrightarrow{BC}$.

$$\overrightarrow{BC} = (1,-1,2) - (1,0,1) = (0,-1,1)$$

$$D = A + \overrightarrow{BC} = (1,1,2) + (0,-1,1) = (1,0,3)$$

El cuarto vértice del paralelogramo ABCD es $D(1,0,3)$.