



Universidad
Zaragoza

PRUEBAS DE ACCESO PARA MAYORES DE 25 AÑOS
CONVOCATORIA DE FEBRERO DE 2024
EJERCICIO DE: MATEMÁTICAS
TIEMPO DISPONIBLE: 1 hora 30 minutos

PUNTUACIÓN QUE SE OTORGARÁ A ESTE EJERCICIO: (véanse las distintas partes del examen)

Elija una de las dos opciones propuestas, A o B. En cada pregunta se señala la puntuación máxima.

OPCIÓN A

A1.

- a) (1,25 puntos) Obtener a, b, c , números reales, para que la función $f(x) = a + bx + cx^2 + x^3$ tenga un máximo para $x = -4$, un mínimo para $x = 0$ y pase por el punto $(1,1)$.
- b) (1 punto) Calcular los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.
- c) (0,25 puntos) Hallar los puntos de inflexión si existen.

A2. Para $f(x) = \frac{\operatorname{sen}(x) + \sqrt{2\operatorname{sen}(x) + 1}}{\sqrt{2\operatorname{sen}(x) + 1}}$, calcular:

- a) (1 punto) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(f(x) \right)^{\frac{1}{\operatorname{sen}(x)}}$.
- b) (0,5 puntos) $\lim_{x \rightarrow \pi/2} [f(x) - 1]$.
- c) (1 punto) $\int \cot g(x) [f(x) - 1] dx$ Calcular

A3. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & m \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & m & 0 \\ 3 & 2 & m \end{pmatrix}$ con m un número real.

- a) (1,25 puntos) Encontrar los valores de $m \in \mathbb{R}$ para los que A y B tienen el mismo rango.
- b) (1,25 puntos) Para $m = 1$ obtener la inversa de una matriz C que cumple $2BC - B^2C = I$ con I la matriz identidad de dimensión 3.

A4. La jefa de recursos humanos de una empresa de transporte privado de viajeros (UPER) entrevista a 4 candidatos para una plaza de conductor. Les pregunta en la entrevista los años de antigüedad en su permiso de conducir y el número de multas que tiene cada uno en el último año. Los datos recogidos son:

X (Años)	3	4	5	6
Y (Multas)	4	3	2	1

- a) (1,25 puntos) Calcular el coeficiente de correlación lineal.
- b) (1 punto) Hallar la recta de regresión de Y sobre X.
- c) (0,25 puntos) ¿Cuántas multas se estima que tendrán a los 7 años?

OPCIÓN B

B1. Sea $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-2}-3}$

a) (1 punto) Obtener su dominio de definición.

b) (1,5 puntos) Hallar $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow 2} f'(x)$.

B2. Dada la función $f(x) = \begin{cases} a-x, & x \leq 0 \\ 2, & 0 < x < 1 \\ x^2 - 2x + b, & x \geq 1 \end{cases}$

a) (1,25 puntos) Obtener los valores de $a, b \in \mathbb{R}$ para los cuales $f(x)$ es una función continua.

b) (1,25 puntos) Calcular $\int_{-1}^0 f(x) e^x dx$

B3. (2,5 puntos) Discutir, según los valores del parámetro real m , cuándo existe una, ninguna o infinitas soluciones del sistema lineal:

$$-mx + my + z = 0$$

$$x - my + 3z = 4$$

$$2x - 2y - z = 0$$

Obtener la solución para $m = -1$.

B4. La probabilidad de que un estudiante llegue puntual al comienzo de sus clases es $3/4$. Entre los estudiantes que llegan tarde, la mitad va en transporte público. Calcular la probabilidad de que:

a) (0,75 puntos) Un estudiante elegido al azar llegue tarde a clase y vaya en transporte público.

b) (0,75 puntos) Si se eligen 3 estudiantes al azar, al menos uno de ellos llegue puntual. Suponer que no viajan juntos, es decir que la puntualidad de cada uno de ellos es independiente de la del resto.

c) (0,75 puntos) Un estudiante que usa transporte público, llegue tarde; sabiendo además que 3 de cada 4 estudiantes usan transporte público.

d) (0,25 puntos) Razona si son independientes los sucesos “llegar puntual” y “usar transporte público”.

SOLUCIONES

A1.

- a) (1,25 puntos) Obtener a, b, c , números reales, para que la función $f(x) = a + bx + cx^2 + x^3$ tenga un máximo para $x = -4$, un mínimo para $x = 0$ y pase por el punto $(1, 1)$.
- b) (1 punto) Calcular los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.
- c) (0,25 puntos) Hallar los puntos de inflexión si existen.

a) Si la función tiene un máximo en $x = -4$ y un mínimo en $x = 0$ entonces la derivada de la función se anula para ambos valores $\rightarrow f'(-4) = 0$ y $f'(0) = 0$.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = a + bx + cx^2 + x^3 \rightarrow f'(x) = b + 2cx + 3x^2 \\ f'(-4) = 0 \\ f'(0) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} b + 2c(-4) + 3(-4)^2 = 0 \\ b + 2c \cdot 0 + 3 \cdot 0^2 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} b - 8c + 48 = 0 \\ b = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 48 - 8c = 0 \Rightarrow 48 = 8c \Rightarrow \boxed{c = 6}$$

La función queda $f(x) = a + 6x^2 + x^3$. Como la función pasa por el punto $(1, 1)$ entonces $f(1) = 1$.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = a + 6x^2 + x^3 \\ f(1) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow 1 = a + 6 \cdot 1^2 + 1^3 \Rightarrow 1 = a + 6 + 1 \Rightarrow \boxed{a = -6}$$

Los valores buscados son $a = -6$, $b = 0$ y $c = 6$.

b) Averiguamos cuando se anula la derivada (puntos críticos).

$$f(x) = -6 + 6x^2 + x^3 \Rightarrow f'(x) = 12x + 3x^2$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 12x + 3x^2 = 0 \Rightarrow 3x(4 + x) = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \boxed{x = 0} \\ 4 + x = 0 \rightarrow \boxed{x = -4} \end{array} \right.$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos dos valores.

- En el intervalo $(-\infty, -4)$ consideramos $x = -5$ y la derivada vale $f'(-5) = 12(-5) + 3(-5)^2 = 15 > 0$. La función crece en $(-\infty, -4)$.
- En el intervalo $(-4, 0)$ consideramos $x = -1$ y la derivada vale $f'(-1) = 12(-1) + 3(-1)^2 = -9 < 0$. La función decrece en $(-4, 0)$.
- En el intervalo $(0, +\infty)$ consideramos $x = 1$ y la derivada vale $f'(1) = 12 \cdot 1 + 3 \cdot 1^2 = 15 > 0$. La función crece en $(0, +\infty)$.

La función crece en $(-\infty, -4) \cup (0, +\infty)$ y decrece en $(-4, 0)$.

c) Averiguamos cuando se anula la segunda derivada (candidatos a puntos de inflexión).

$$f'(x) = 12x + 3x^2 \Rightarrow f''(x) = 12 + 6x$$

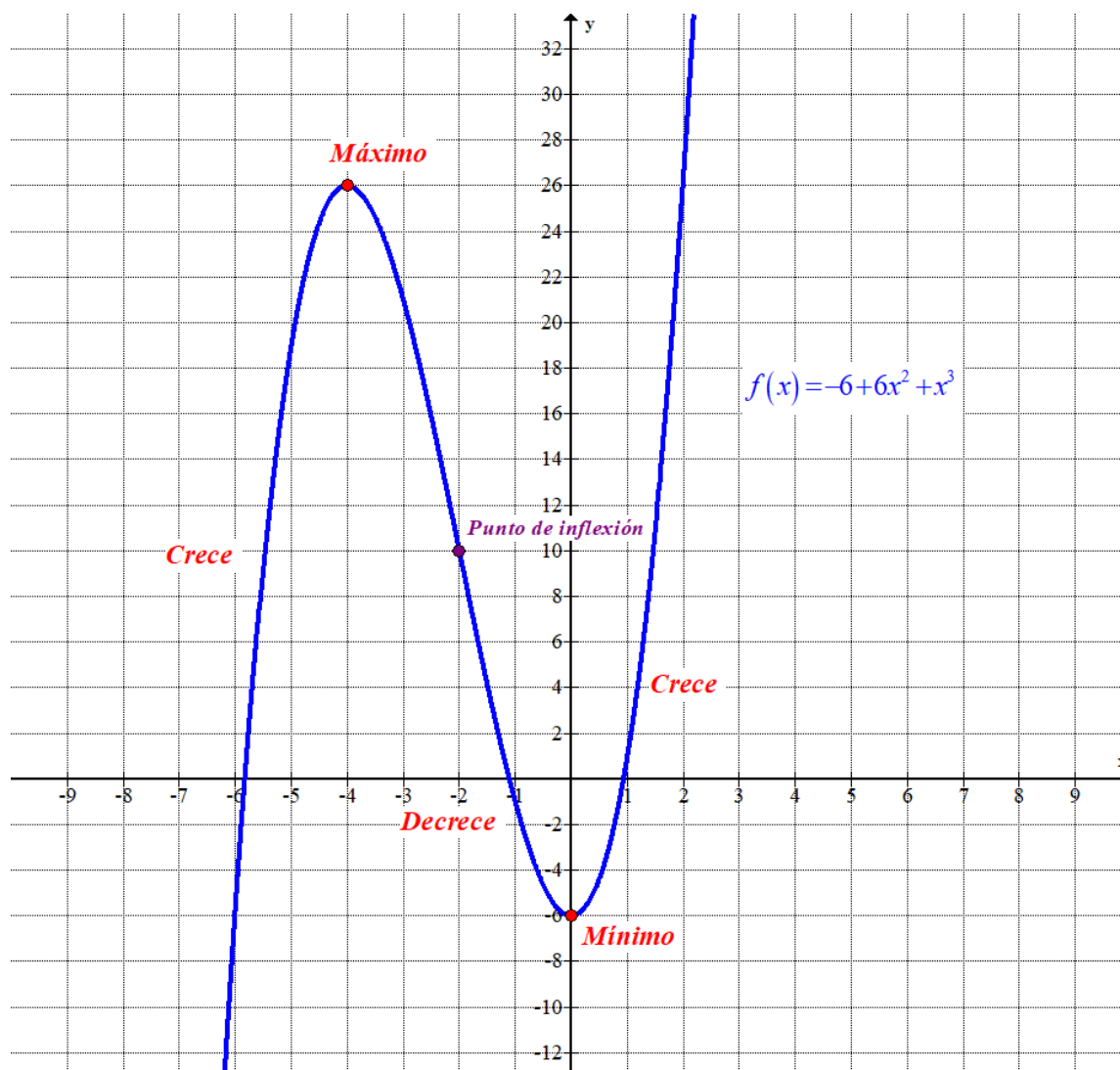
$$f''(x) = 0 \Rightarrow 12 + 6x = 0 \Rightarrow 6x = -12 \Rightarrow \boxed{x = -2}$$

Sustituimos este valor en la derivada tercera y vemos si su valor es nulo o no.

$$f''(x) = 12 + 6x \Rightarrow f'''(x) = 6 \Rightarrow f'''(-2) = 6 \neq 0$$

La función tiene un punto de inflexión en $x = -2$.

Como $f(-2) = -6 + 6(-2)^2 + (-2)^3 = 10$ las coordenadas del punto de inflexión son $(-2, 10)$.



A2. Para $f(x) = \frac{\sin(x) + \sqrt{2\sin(x) + 1}}{\sqrt{2\sin(x) + 1}}$, calcular:

a) (1 punto) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(f(x) \right)^{\frac{1}{\sin(x)}}$.

b) (0,5 puntos) $\lim_{x \rightarrow \pi/2} [f(x) - 1]$.

c) (1 punto) $\int \cot g(x) [f(x) - 1] dx$

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \left(f(x) \right)^{\frac{1}{\sin(x)}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(x) + \sqrt{2\sin(x) + 1}}{\sqrt{2\sin(x) + 1}} \right)^{\frac{1}{\sin(x)}} = \left(\frac{\sin(0) + \sqrt{2\sin(0) + 1}}{\sqrt{2\sin(0) + 1}} \right)^{\frac{1}{\sin(0)}} = \\ &= 1^\infty = \text{Indeterminación (nº e)} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{\sin(x)} \left(\frac{\sin(x) + \sqrt{2\sin(x) + 1}}{\sqrt{2\sin(x) + 1}} - 1 \right)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{\sin(x)} \left(\frac{\sin(x) + \sqrt{2\sin(x) + 1} - \sqrt{2\sin(x) + 1}}{\sqrt{2\sin(x) + 1}} \right)} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{\sin(x)} \left(\frac{\cancel{\sin(x)}}{\sqrt{2\sin(x) + 1}} \right)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{\sqrt{2\sin(x) + 1}}} = e^{\frac{1}{\sqrt{2\sin(0) + 1}}} = e^1 = \boxed{e} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \lim_{x \rightarrow \pi/2} [f(x) - 1] &= f(x) = \lim_{x \rightarrow \pi/2} \left[\frac{\sin(x) + \sqrt{2\sin(x) + 1}}{\sqrt{2\sin(x) + 1}} - 1 \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow \pi/2} \left[\frac{\sin(x) + \sqrt{2\sin(x) + 1} - \sqrt{2\sin(x) + 1}}{\sqrt{2\sin(x) + 1}} \right] = \lim_{x \rightarrow \pi/2} \left[\frac{\sin(x)}{\sqrt{2\sin(x) + 1}} \right] = \\ &= \frac{\sin(0)}{\sqrt{2\sin(0) + 1}} = \frac{0}{1} = \boxed{0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \int \cot g(x) [f(x) - 1] dx &= \int \frac{\cos(x)}{\cancel{\sin(x)}} \frac{\cancel{\sin(x)}}{\sqrt{2\sin(x) + 1}} dx = \int \frac{\cos(x)}{\sqrt{2\sin(x) + 1}} dx = \\ &= \left\{ \begin{array}{l} \text{Cambio de variable} \\ \sin(x) = t \rightarrow \cos(x) dx = dt \end{array} \right\} = \int \frac{1}{\sqrt{2t + 1}} dt = \int \frac{2}{2\sqrt{2t + 1}} dt = \sqrt{2t + 1} = \sqrt{2\sin(x) + 1} + K \end{aligned}$$

A3. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & m \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & m & 0 \\ 3 & 2 & m \end{pmatrix}$ con m un número real.

- a) (1,25 puntos) Encontrar los valores de $m \in \mathbb{R}$ para los que A y B tienen el mismo rango.
 b) (1,25 puntos) Para $m = 1$ obtener la inversa de una matriz C que cumple $2BC - B^2C = I$ con I la matriz identidad de dimensión 3.

a) La matriz B es una matriz cuadrada de orden 3, por lo que su rango puede ser 3. La matriz A es una matriz cuadrada de orden 2 por lo que su rango como máximo puede ser 2. Para que las matrices A y B tengan el mismo rango el determinante de B debe ser nulo (su rango menor de 3).

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & m & 0 \\ 3 & 2 & m \end{vmatrix} = m^2 + 0 + 0 - 0 + 4m - 0 = m^2 + 4m$$

$$|B| = 0 \Rightarrow m^2 + 4m = 0 \Rightarrow m(m+4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m + 4 = 0 \rightarrow m = -4 \end{cases}$$

Para $m = 0$ y $m = -4$ el determinante de B es nulo y su rango es menor de 3. Estudiamos estos dos casos que son los únicos candidatos a cumplir lo pedido.

- Para $m = 0$ las matrices quedan $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

La matriz A tiene rango 2 pues su determinante es no nulo: $|A| = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 4 = -4 \neq 0$.

La matriz B tiene la columna tercera nula y su rango es 2. Si consideramos el menor de orden 2 que resulta de quitar la fila tercera y la columna tercera $\rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 4 = 4 \neq 0$.

Para $m = 0$ las matrices A y B tienen el mismo rango (2).

- Para $m = -4$ las matrices quedan $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & -4 & 0 \\ 3 & 2 & -4 \end{pmatrix}$.

La matriz A tiene rango 1 pues su determinante es nulo: $|A| = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 4 - 4 = 0$.

La matriz B tiene rango 2. Si consideramos el menor de orden 2 que resulta de quitar la fila primera y la columna tercera $\rightarrow \begin{vmatrix} -2 & -4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -4 + 12 = 8 \neq 0$.

Para $m = -4$ las matrices A y B tienen distinto rango.

El único valor para el que las matrices A y B tienen el mismo rango es $m = 0$.

b) Despejamos C de la igualdad.

$$2BC - B^2C = I \Rightarrow (2B - B^2)C = I$$

La igualdad obtenida nos indica que la inversa de la matriz C es la matriz $2B - B^2$.

Calculamos su expresión. Para $m=1$ la matriz B queda $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

$$C^{-1} = 2B - B^2 = 2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ 6 & 4 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1-4 & 2+2 & 0 \\ -2-2 & -4+1 & 0 \\ 3-4+3 & 6+2+2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ 6 & 4 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & 4 & 0 \\ -4 & -3 & 0 \\ 2 & 10 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 4 & -6 & 1 \end{pmatrix}$$

La matriz inversa de C es la matriz $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 4 & -6 & 1 \end{pmatrix}$.

A4. La jefa de recursos humanos de una empresa de transporte privado de viajeros (UPER) entrevista a 4 candidatos para una plaza de conductor. Les pregunta en la entrevista los años de antigüedad en su permiso de conducir y el número de multas que tiene cada uno en el último año. Los datos recogidos son:

X (Años)	3	4	5	6
Y (Multas)	4	3	2	1

- a) (1,25 puntos) Calcular el coeficiente de correlación lineal.
 b) (1 punto) Hallar la recta de regresión de Y sobre X.
 c) (0,25 puntos) ¿Cuántas multas se estima que tendrán a los 7 años?

a) Realizamos una tabla para obtener las medias, las desviaciones típicas y la covarianza.

	x_i	y_i	$x_i \cdot y_i$	x_i^2	y_i^2
	3	4	12	9	16
	4	3	12	16	9
	5	2	10	25	4
	6	1	6	36	1
TOTALES	18	10	40	86	30

Hallamos la media de ambas distribuciones.

$$\bar{x} = \frac{18}{4} = 4.5 \quad \bar{y} = \frac{10}{4} = 2.5$$

Hallamos las desviaciones típicas de ambas distribuciones.

$$\sigma_x^2 = \frac{\sum x_i^2}{N} - (\bar{x})^2 = \frac{86}{4} - 4.5^2 = 1.25 \Rightarrow \sigma_x = \sqrt{1.25} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\sigma_y^2 = \frac{\sum y_i^2}{N} - (\bar{y})^2 = \frac{30}{4} - 2.5^2 = 1.25 \Rightarrow \sigma_y = \sqrt{1.25} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

Hallamos la covarianza.

$$\sigma_{xy} = \frac{\sum x_i \cdot y_i}{N} - \bar{x} \cdot \bar{y} = \frac{40}{4} - 4.5 \cdot 2.5 = -1.25$$

El coeficiente de correlación lineal es el cociente entre la covarianza y el producto de las desviaciones típicas.

$$r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \cdot \sigma_y} = \frac{-1.25}{\sqrt{1.25} \cdot \sqrt{1.25}} = -1$$

b) La recta de regresión de Y sobre X tiene ecuación $y - \bar{y} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2} (x - \bar{x})$.

$$y - 2.5 = \frac{-1.25}{1.25} (x - 4.5) \Rightarrow y - 2.5 = -(x - 4.5) \Rightarrow y - 2.5 = -x + 4.5 \Rightarrow \boxed{y = -x + 7}$$

c) A los 7 años es de esperar que tenga $y = -7 + 7 = 0$ multas.

B1. Sea $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-2}-3}$

a) (1 punto) Obtener su dominio de definición.

b) (1,5 puntos) Hallar $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow 2} f'(x)$.

a) El dominio de definición de la función son todos los valores que hacen positivos los radicandos y que no anulen el denominador.

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-2}-3} \Rightarrow \begin{cases} x+1 \geq 0 \rightarrow x \geq -1 \\ x-2 \geq 0 \rightarrow x \geq 2 \\ \sqrt{x-2}-3 \neq 0 \rightarrow \sqrt{x-2} \neq 3 \rightarrow x-2 \neq 9 \rightarrow x \neq 11 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x \neq 11 \end{cases} \Rightarrow x \in [2, 11) \cup (11, +\infty)$$

El dominio de definición de la función es $[2, 11) \cup (11, +\infty)$.

b) Calculamos el valor del primer límite.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-2}-3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}}}{\frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x}} - \frac{3}{\sqrt{x}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\frac{x+1}{x}}}{\sqrt{\frac{x-2}{x}} - \frac{3}{\sqrt{x}}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{\sqrt{1-\frac{2}{x}} - \frac{3}{\sqrt{x}}} = \frac{\sqrt{1+\frac{1}{\infty}}}{\sqrt{1-\frac{2}{\infty}} - \frac{3}{\infty}} = \frac{\sqrt{1+0}}{\sqrt{1-0}-0} = \boxed{1} \end{aligned}$$

La derivada de la función es:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\frac{1}{2\sqrt{x+1}}(\sqrt{x-2}-3) - \sqrt{x+1}\left(\frac{1}{2\sqrt{x-2}}\right)}{(\sqrt{x-2}-3)^2} = \frac{\frac{\sqrt{x-2}-3}{2\sqrt{x+1}} - \frac{\sqrt{x+1}}{2\sqrt{x-2}}}{(\sqrt{x-2}-3)^2} = \\ &= \frac{\frac{\sqrt{x-2}(\sqrt{x-2}-3) - \sqrt{x+1}\sqrt{x+1}}{2\sqrt{x+1}\sqrt{x-2}}}{(\sqrt{x-2}-3)^2} = \frac{(x-2)-3\sqrt{x-2}-(x+1)}{2\sqrt{x+1}\sqrt{x-2}(\sqrt{x-2}-3)^2} = \\ &= \frac{\cancel{x}-2-3\sqrt{x-2}-\cancel{x}-1}{2\sqrt{x+1}\sqrt{x-2}(\sqrt{x-2}-3)^2} = \frac{-3-3\sqrt{x-2}}{2\sqrt{x+1}\sqrt{x-2}(\sqrt{x-2}-3)^2} \end{aligned}$$

Calculamos el segundo límite. Dado que el dominio es $[2, 11) \cup (11, +\infty)$ el límite pedido es realmente el límite cuando x se acerca por la derecha de 2 (2^+).

$$\lim_{x \rightarrow 2} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-3 - 3\sqrt{x-2}}{2\sqrt{x+1}\sqrt{x-2}(\sqrt{x-2}-3)^2} =$$

$$= \frac{-3 - 3\sqrt{2-2}}{2\sqrt{2+1}\sqrt{2-2}(\sqrt{2-2}-3)^2} = \frac{-6}{0^+} = \boxed{-\infty}$$

Para comprobar el valor de este segundo límite calculamos la expresión de la derivada para un valor próximo a 2, pero superior a 2, por ejemplo 2.0001.

$$\frac{-6 - 6\sqrt{2.0001-2}}{4\sqrt{2.0001+1}\sqrt{2.0001-2}(\sqrt{2.0001-2}-3)^2} = -9.78$$

El límite se acerca a $-\infty$, pero muy despacito.

B2. Dada la función $f(x) = \begin{cases} a-x, & x \leq 0 \\ 2, & 0 < x < 1 \\ x^2 - 2x + b, & x \geq 1 \end{cases}$

a) (1,25 puntos) Obtener los valores de $a, b \in \mathbb{R}$ para los cuales $f(x)$ es una función continua.

b) (1,25 puntos) Calcular $\int_{-1}^0 f(x) e^x dx$

a) Para que la función sea continua debe serlo en $x=0$ y en $x=1$.

$$\left. \begin{aligned} f(0) &= a - 0 = a \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} a - x = a \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} 2 = 2 \\ f(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{a=2}$$

$$\left. \begin{aligned} f(1) &= 1^2 - 2 + b = b - 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} x^2 - 2x + b = b - 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} 2 = 2 \\ f(1) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \end{aligned} \right\} \Rightarrow b - 1 = 2 \Rightarrow \boxed{b=3}$$

Los valores buscados son $a=2$ y $b=3$.

b) La función tiene la expresión $f(x) = \begin{cases} 2-x, & x \leq 0 \\ 2, & 0 < x < 1 \\ x^2 - 2x + 3, & x \geq 1 \end{cases}$. En el intervalo $(-1, 0)$ tiene la expresión $f(x) = 2 - x$.

$$\int_{-1}^0 f(x) e^x dx = \int_{-1}^0 (2-x) e^x dx = \dots$$

$$\int (2-x) e^x dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ 2-x = u \rightarrow -dx = du \\ e^x dx = dv \rightarrow v = \int e^x dx = e^x \end{array} \right\} = (2-x) e^x - \int -e^x dx =$$

$$= (2-x) e^x + \int e^x dx = (2-x) e^x + e^x = (3-x) e^x + K$$

$$\dots = \left[(3-x) e^x \right]_{-1}^0 = (3-0) e^0 - (3-(-1)) e^{-1} = \boxed{3 - \frac{4}{e}}$$

B3. (2,5 puntos) Discutir, según los valores del parámetro real m , cuándo existe una, ninguna o infinitas soluciones del sistema lineal:

$$-mx + my + z = 0$$

$$x - my + 3z = 4$$

$$2x - 2y - z = 0$$

Obtener la solución para $m = -1$.

El sistema tiene asociada una matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} -m & m & 1 \\ 1 & -m & 3 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ y una matriz ampliada

$$A/B = \begin{pmatrix} -m & m & 1 & 0 \\ 1 & -m & 3 & 4 \\ 2 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Averiguamos cuando se anula el determinante de A.

$$|A| = \begin{vmatrix} -m & m & 1 \\ 1 & -m & 3 \\ 2 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -m^2 + \cancel{6m} - 2 + 2m + m - \cancel{6m} = -m^2 + 3m - 2$$

$$|A| = 0 \Rightarrow -m^2 + 3m - 2 = 0 \Rightarrow m = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4(-1)(-2)}}{-2} = \frac{-3 \pm 1}{-2} = \begin{cases} \frac{-3+1}{-2} = \boxed{1=m} \\ \frac{-3-1}{-2} = \boxed{2=m} \end{cases}$$

Analizamos por separado tres situaciones diferentes.

CASO 1. $m \neq 2$ y $m \neq 1$

En este caso el determinante de A es no nulo y el rango de A es 3, al igual que el rango de A/B y el número de incógnitas. El sistema tiene **una única solución**.

CASO 2, $m = 2$.

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3. Estudiamos su rango usando el método de Gauss.

$$A/B = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2 \cdot \text{Fila } 2^a + \text{Fila } 1^a \\ 2 & -4 & 6 & 8 \\ -2 & 2 & 1 & 0 \\ \hline 0 & -2 & 7 & 8 \rightarrow \text{Nueva fila } 2^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a + \text{Fila } 1^a \\ 2 & -2 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \rightarrow \text{Nueva fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \overbrace{-2 \quad 2 \quad 1 \quad 0}^{A/B} \\ 0 & -2 & 7 & 8 \\ \underbrace{0 \quad 0 \quad 0 \quad 0}_A \end{array} \right)$$

El rango de A es 2, igual que el de A/B, pero menor que el número de incógnitas (3), por lo que el sistema **tiene infinitas soluciones**.

CASO 3. $m = 1$.

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3. Estudiamos su rango usando el método de Gauss.

$$A/B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a + \text{Fila } 1^a \\ 1 \quad -1 \quad 3 \quad 4 \\ -1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 4 \quad 4 \rightarrow \text{Nueva fila } 2^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a + 2 \cdot \text{Fila } 1^a \\ 2 \quad -2 \quad -1 \quad 0 \\ -2 \quad 2 \quad 2 \quad 0 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 4 \cdot \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad 0 \quad 4 \quad 0 \\ 0 \quad 0 \quad -4 \quad -4 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad -4 \rightarrow \text{Nueva fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{c} \overbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}}^{A/B} \\ \underbrace{\hspace{1.5cm}}_A \end{array} \right)$$

El rango de A es 2 y el de A/B es 3. Los rangos son distintos y el sistema **no tiene solución**.

Lo resolvemos para $m = -1$.

Es un valor que entra dentro del CASO 1, por lo que tiene una única solución. Lo resolvemos utilizando el método de Gauss.

$$\left. \begin{array}{l} x - y + z = 0 \\ x + y + 3z = 4 \\ 2x - 2y - z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = y - z \\ x + y + 3z = 4 \\ 2x - 2y - z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y - z + y + 3z = 4 \\ 2y - 2z - 2y - z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2y + 2z = 4 \\ -3z = 0 \rightarrow \boxed{z = 0} \end{array} \right\} \Rightarrow 2y + 0 = 4 \Rightarrow \boxed{y = 2} \Rightarrow \boxed{x = 2 - 0 = 2}$$

La solución es $x = 2$; $y = 2$; $z = 0$.

B4. La probabilidad de que un estudiante llegue puntual al comienzo de sus clases es $\frac{3}{4}$. Entre los estudiantes que llegan tarde, la mitad va en transporte público. Calcular la probabilidad de que:

- (0,75 puntos) Un estudiante elegido al azar llegue tarde a clase y vaya en transporte público.
- (0,75 puntos) Si se eligen 3 estudiantes al azar, al menos uno de ellos llegue puntual. Suponer que no viajan juntos, es decir que la puntualidad de cada uno de ellos es independiente de la del resto.
- (0,75 puntos) Un estudiante que usa transporte público, llegue tarde; sabiendo además que 3 de cada 4 estudiantes usan transporte público.
- (0,25 puntos) Razona si son independientes los sucesos “llegar puntual” y “usar transporte público”.

Llamamos A al suceso “el alumno llega puntual” y B al suceso “el alumno va en transporte público”.

Con los datos del ejercicio podemos establecer que $P(A) = \frac{3}{4} = 0.75$, $P(B/\bar{A}) = \frac{1}{2} = 0.5$.

- a) Nos piden calcular $P(\bar{A} \cap B)$.

$$P(\bar{A} \cap B) = P(\bar{A})P(B/\bar{A}) = (1 - 0.75)0.5 = \boxed{0.125}$$

- b) El suceso “al menos uno llegue puntual” es el contrario del suceso “ninguno llega puntual”. Como la probabilidad del suceso contrario es más fácil de calcular hallamos la probabilidad pedida usando este suceso complementario.

$$P(\text{Ninguno llega puntual}) = P(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3) = \{\text{Sucesos independientes}\} =$$

$$= P(\bar{A}_1) \cdot P(\bar{A}_2) \cdot P(\bar{A}_3) = (1 - 0.75)(1 - 0.75)(1 - 0.75) = \boxed{\frac{1}{64} = 0.015625}$$

Si se eligen 3 estudiantes al azar, la probabilidad de que al menos uno de ellos llegue puntual es de $1 - \frac{1}{64} = \frac{63}{64} = 0.984375$.

- c) Si 3 de cada 4 estudiantes usan transporte público entonces $P(B) = \frac{3}{4} = 0.75$. Nos piden calcular $P(\bar{A}/B)$. Usamos el teorema de Bayes.

$$P(\bar{A}/B) = \frac{P(\bar{A} \cap B)}{P(B)} = \frac{0.125}{0.75} = \boxed{\frac{1}{6} \approx 0.1667}$$

- d) Para que sean independientes los sucesos A = “llegar puntual” y B = “usar transporte público” debe cumplirse la igualdad $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) \Rightarrow P(A \cap B) = P(B) - P(\bar{A} \cap B) = 0.75 - 0.125 = 0.625$$

$$P(A) \cdot P(B) = 0.75 \cdot 0.75 = \frac{9}{16} = 0.5625$$

Como $P(A \cap B) = 0.625 \neq 0.5625 = P(A) \cdot P(B)$ los sucesos no son independientes.