



**EVALUACIÓN DE BACHILLERATO
PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU/PAU)
CURSO 2023–2024**

MATERIA: MATEMÁTICAS II

Convocatoria: JUNIO

Instrucciones:

- Debe responder sólo una pregunta de cada bloque de contenido. En caso de presentar dos preguntas de un mismo bloque, se considerará sólo la primera pregunta respondida.
- En el desarrollo de cada pregunta, detalle y explique los procedimientos empleados para solucionarla. Se califica todo el proceso.
- Se puede utilizar cualquier calculadora científica no programable ni con conexión a Internet.

Bloque 1.- Análisis (seleccione solo una pregunta)

1A. La empresa 'Plátanos Islas Canarias' se dedica a la producción de plátanos, un cultivo muy importante en las islas. Los costes de producción están dados por la función:

$$C(x) = \frac{3x}{5\sqrt{x^2+1}}, \quad x \geq 0$$

donde $C(x)$ son miles de €, x miles de kilos de plátanos producidos. Responder a las siguientes preguntas.

- a) Averiguar el coste de la producción de un kilo de plátanos. 0.5 pts
- b) Si la empresa pudiera producir cantidades muy grandes de plátanos, ¿a qué valor tenderían los costes de producción de los plátanos? 0.5 pts
- c) Un economista afirma que superada cierta cantidad de kilos producidos, el coste de producción disminuirá. Justificar la veracidad de la afirmación del economista. 0.75 pts
- d) Calcular: $\int_0^4 C(x) dx$. Interpretar el resultado en el contexto del problema. 0.75 pts

1B. Dada la función definida por: $f(x) = \frac{\ln(x+2)+a}{3x+4}$

- a) Determinar el valor de a sabiendo que la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = -1$ es 10. Dar la expresión de la función. 1.25 pts
- b) Para el valor $a = 0$, estudiar el dominio y las asíntotas de la función $f(x)$. 1.25 pts

Bloque 2.- Álgebra (seleccione solo una pregunta)

2A. Resolver el siguiente sistema matricial:

2.5 pts

$$\begin{cases} 5X - 4Y = \begin{pmatrix} 5 & 6 & -1 \\ 4 & -5 & 1 \end{pmatrix} \\ 4X - 6Y = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 6 & -4 & -2 \end{pmatrix} \end{cases}$$

2B. Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales con un parámetro $k \in \mathbb{R}$:

$$\left. \begin{aligned} kx + y - 3z &= 5 \\ -x + y + z &= -4 \\ kx + y - kz &= 1 \end{aligned} \right\}$$

a) Discutir la resolución del sistema según los valores del parámetro k . 1.25 pts

b) Resolver el sistema cuando $k = 4$ 1.25 pts

Bloque 3.- Geometría (seleccione solo una pregunta)

3A. En el espacio tridimensional tenemos el punto, la recta y el plano siguientes:

$$P(-7, 3, 4), \quad r: \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ x + z + 1 = 0 \end{cases}, \quad \pi: x + 2y - 5z + 5 = 0$$

a) Encontrar el punto A intersección del plano π con una recta s . Esta recta s es una recta paralela a la recta r y que pasa por el punto P . 1.5 pts

b) Hallar el ángulo que forma la recta r y el plano π . 1 pto

3B. En el espacio tridimensional se conocen las ecuaciones de las rectas siguientes:

$$r: \begin{cases} 3x + 2y - z = 1 \\ 2x - y + z + 4 = 0 \end{cases} \quad ; \quad s: \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$$

a) Estudiar la posición relativa de las rectas r y s . 1.5 pts

b) Encontrar el plano π , paralelo a la recta r y que contiene a la recta s . 1 pto

Bloque 4.- Probabilidad (seleccione solo una pregunta)

4A. En un avión de pasajeros se han instalado tres paracaídas A, B y C. Si falla A, se pone B en funcionamiento, y si también falla B, se activa el paracaídas C. Las probabilidades de que funcione correctamente cada paracaídas son, respectivamente, 0.96, 0.98 y 0.99

a) Dibujar un diagrama de árbol que refleje todos los posibles casos. 0.5 pts

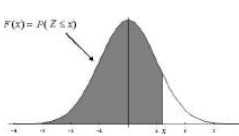
b) Calcular la probabilidad de que se active el paracaídas B y funcione correctamente. 0.75 pts

c) Calcular la probabilidad de que funcione algún paracaídas. 1.25 pts

4B. Un juego de ruleta tiene 25 casillas numeradas del 1 al 25. Un jugador gana si sale un número par.

a) Si juega 100 veces, calcular la probabilidad de que gane en más de la mitad de las ocasiones. 1.25 pts

b) Si juega 200 veces, un jugador afirma que la probabilidad de ganar entre 90 y 110 veces es menor que $3/4$. Justificar si esta afirmación es cierta o no. 1.25 pts



	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767

SOLUCIONES

1A. La empresa 'Plátanos Islas Canarias' se dedica a la producción de plátanos, un cultivo muy importante en las islas. Los costes de producción están dados por la función:

$$C(x) = \frac{3x}{5\sqrt{x^2+1}}, \quad x \geq 0$$

donde $C(x)$ son miles de €, x miles de kilos de plátanos producidos. Responder a las siguientes preguntas.

- a) Averiguar el coste de la producción de un kilo de plátanos. 0.5 pts
- b) Si la empresa pudiera producir cantidades muy grandes de plátanos, ¿a qué valor tenderían los costes de producción de los plátanos? 0.5 pts
- c) Un economista afirma que superada cierta cantidad de kilos producidos, el coste de producción disminuirá. Justificar la veracidad de la afirmación del economista. 0.75 pts
- d) Calcular: $\int_0^4 C(x) dx$. Interpretar el resultado en el contexto del problema. 0.75 pts

a) Nos piden calcular el coste para 0.001 miles de kilos de plátanos $\rightarrow C(0.001)$.

$$C(0.001) = \frac{3(0.001)}{5\sqrt{(0.001)^2+1}} = 0.0006$$

Como el coste viene expresado en miles de euros podemos decir que el coste de producir 1 kg de plátanos es 0.0006 miles de euros = 0.6 euros.

b) Calculamos el límite de la función coste cuando x tiende a $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} C(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{5\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{3x}{x}}{5\sqrt{\frac{x^2}{x^2} + \frac{1}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{5\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = \frac{3}{5\sqrt{1 + \frac{1}{\infty}}} = \frac{3}{5} = \boxed{0.6}$$

El coste de producción de los plátanos tiende a ser 0.6 miles de euros = 600 euros.

c) Buscamos los puntos críticos de la función coste.

$$\begin{aligned} C(x) &= \frac{3x}{5\sqrt{x^2+1}} = \frac{3}{5} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \Rightarrow C'(x) = \frac{3}{5} \cdot \frac{1 \cdot \sqrt{x^2+1} - \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot x}{(\sqrt{x^2+1})^2} = \\ &= \frac{3}{5} \cdot \frac{\sqrt{x^2+1} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \frac{3}{5} \cdot \frac{(\sqrt{x^2+1})^2 - x^2}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} = \frac{3}{5} \cdot \frac{x^2+1-x^2}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} \\ C'(x) &= \frac{3}{5(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} \end{aligned}$$

Esta expresión de la derivada $C'(x) = \frac{3}{5(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$ nunca se anula y siempre es positiva.

La función crece en su dominio $[0, +\infty)$.

Es falsa la afirmación. El coste siempre aumenta.

d) Calculamos primero la integral indefinida.

$$\int C(x) dx = \int \frac{3x}{5\sqrt{x^2+1}} dx = \frac{3}{5} \int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx = \frac{3}{5} \int \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} dx = \frac{3}{5} \sqrt{x^2+1} + C$$

Calculamos la integral definida pedida.

$$\int_0^4 C(x) dx = \left[\frac{3}{5} \sqrt{x^2+1} \right]_0^4 = \frac{3}{5} \sqrt{4^2+1} - \frac{3}{5} \sqrt{0^2+1} = \frac{3\sqrt{17}-3}{5} \approx 1.8738.$$

Si dividimos este resultado entre $4 - 0 = 4$ obtendremos un coste promedio de la producción de plátanos cuando esta producción está entre 0 y 4000.

$$\frac{\int_0^4 C(x) dx}{4-0} \approx \frac{1.8738}{4} = 0.4684$$

Cuando se producen entre 0 y 4000 kg de plátanos el coste medio es de 468.4 €.

1B. Dada la función definida por: $f(x) = \frac{\ln(x+2)+a}{3x+4}$

- a) Determinar el valor de a sabiendo que la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = -1$ es 10. Dar la expresión de la función. 1.25 pts
- b) Para el valor $a = 0$, estudiar el dominio y las asíntotas de la función $f(x)$. 1.25 pts

- a) Si la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = -1$ es 10 significa que $f'(-1) = 10$.

$$f(x) = \frac{\ln(x+2)+a}{3x+4} \Rightarrow f'(x) = \frac{\frac{1}{x+2}(3x+4) - 3(\ln(x+2)+a)}{(3x+4)^2} = \frac{\frac{3x+4}{x+2} - 3\ln(x+2) - 3a}{(3x+4)^2}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{3x+4}{x+2} - 3\ln(x+2) - 3a}{(3x+4)^2} \left\{ \begin{array}{l} \Rightarrow 10 = \frac{-3+4}{-1+2} - 3\ln(-1+2) - 3a \\ f'(-1) = 10 \end{array} \right. \Rightarrow 10 = \frac{-3+4}{(-3+4)^2} - 3a$$

$$\Rightarrow 10 = \frac{1-3a}{1} \Rightarrow 3a = 1-10 = -9 \Rightarrow a = \frac{-9}{3} = -3$$

La función queda $f(x) = \frac{\ln(x+2)-3}{3x+4}$.

- b) Para el valor $a = 0$ la función queda $f(x) = \frac{\ln(x+2)}{3x+4}$. Para que exista la función debe ser $3x+4 \neq 0$ y $x+2 > 0$.

$$3x+4 \neq 0 \Rightarrow 3x \neq -4 \Rightarrow x \neq \frac{-4}{3}$$

$$x+2 > 0 \Rightarrow x > -2$$

El dominio de la función es $\left(-2, \frac{-4}{3}\right) \cup \left(\frac{-4}{3}, +\infty\right)$.

Asíntota vertical. $x = a$

¿ $x = \frac{-4}{3}$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x \rightarrow -4/3} f(x) = \lim_{x \rightarrow -4/3} \frac{\ln(x+2)}{3x+4} = \frac{\ln\left(\frac{-4}{3}+2\right)}{3\frac{-4}{3}+4} = \frac{\ln\left(\frac{2}{3}\right)}{0} = \infty$$

$x = \frac{-4}{3}$ es asíntota vertical.

¿ $x = -2$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{\ln(x+2)}{3x+4} = \frac{\ln(0)}{-6+4} = \frac{-\infty}{-2} = \infty$$

$x = -2$ es asíntota vertical.

Asíntota horizontal. $y = b$

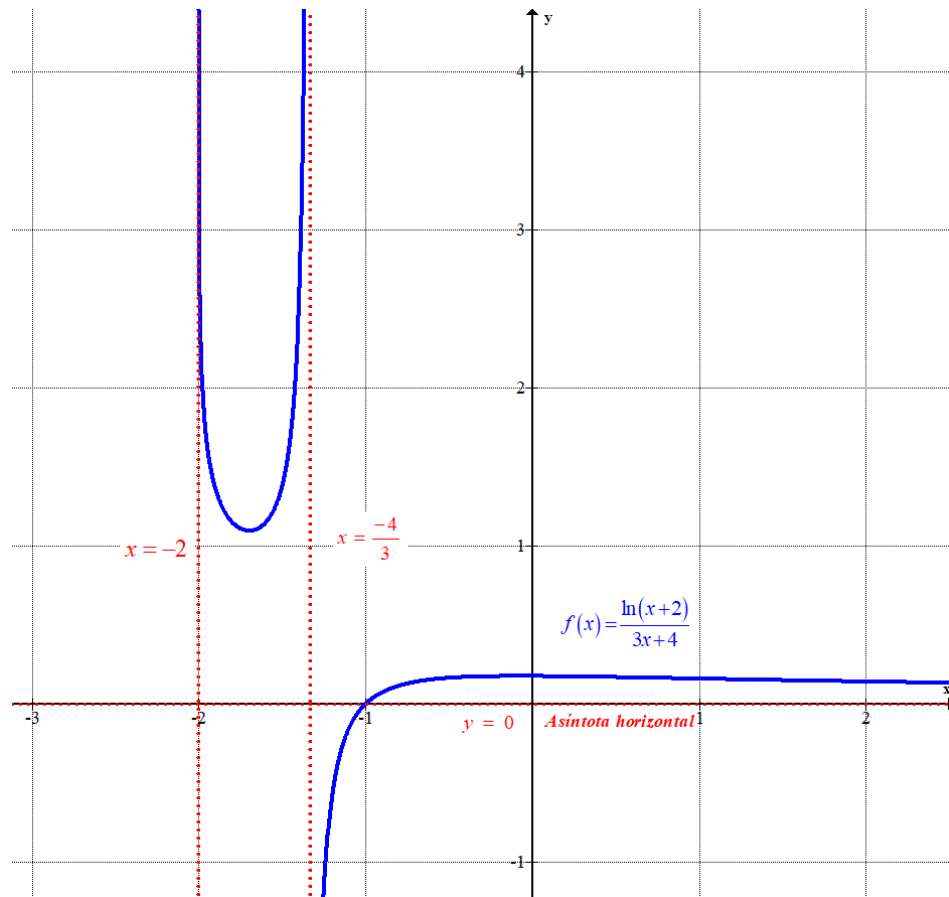
$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+2)}{3x+4} = \frac{\infty}{\infty} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x+2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{3x+6} = \frac{1}{\infty} = 0$$

La recta $y = 0$ es asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y = mx + n$

No existe pues la función tiene asíntota horizontal.



2A. Resolver el siguiente sistema matricial:

2.5 pts

$$\begin{cases} 5X - 4Y = \begin{pmatrix} 5 & 6 & -1 \\ 4 & -5 & 1 \end{pmatrix} \\ 4X - 6Y = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 6 & -4 & -2 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \begin{cases} 5X - 4Y = \begin{pmatrix} 5 & 6 & -1 \\ 4 & -5 & 1 \end{pmatrix} \\ 4X - 6Y = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 6 & -4 & -2 \end{pmatrix} \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} (\times 4) \rightarrow 20X - 16Y = \begin{pmatrix} 20 & 24 & -4 \\ 16 & -20 & 4 \end{pmatrix} \\ (\times (-5)) \rightarrow -20X + 30Y = \begin{pmatrix} -20 & -10 & -10 \\ -30 & 20 & 10 \end{pmatrix} \end{cases} \\ &\quad \underline{\hspace{10em}} \\ &\quad 14Y = \begin{pmatrix} 0 & 14 & -14 \\ -14 & 0 & 14 \end{pmatrix} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow Y = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 0 & 14 & -14 \\ -14 & 0 & 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow 4X - 6 \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 6 & -4 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4X = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 6 & -4 & -2 \end{pmatrix} + 6 \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 8 & -4 \\ 0 & -4 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4 & 8 & -4 \\ 0 & -4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Las matrices solución del sistema matricial son $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ e $Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2B. Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales con un parámetro $k \in \mathbb{R}$:

$$\left. \begin{aligned} kx + y - 3z &= 5 \\ -x + y + z &= -4 \\ kx + y - kz &= 1 \end{aligned} \right\}$$

- a) Discutir la resolución del sistema según los valores del parámetro k . 1.25 pts
 b) Resolver el sistema cuando $k = 4$ 1.25 pts

a) La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A = \begin{pmatrix} k & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ k & 1 & -k \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es

$$A/B = \begin{pmatrix} k & 1 & -3 & 5 \\ -1 & 1 & 1 & -4 \\ k & 1 & -k & 1 \end{pmatrix}$$

Vemos cuando se anula el determinante de A.

$$|A| = \begin{vmatrix} k & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ k & 1 & -k \end{vmatrix} = -k^2 + k + 3 + 3k - k - k = -k^2 + 2k + 3$$

$$|A| = 0 \Rightarrow -k^2 + 2k + 3 = 0 \Rightarrow k = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(-1)(3)}}{2(-1)} = \frac{-2 \pm 4}{-2} = \begin{cases} \frac{-2+4}{-2} = \boxed{-1=k} \\ \frac{-2-4}{-2} = \boxed{3=k} \end{cases}$$

Distinguimos tres casos diferentes que analizamos por separado.

CASO 1. Si $k \neq -1$ y $k \neq 3$.

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de A/B y el número de incógnitas. El sistema es **compatible determinado** (una única solución).

CASO 2. Si $k = -1$.

En este caso el determinante de A es nulo y su rango es menor de 3.

La matriz ampliada queda $A/B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 & 5 \\ -1 & 1 & 1 & -4 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Estudiamos el rango de A y el de

A/B usando el método de Gauss.

$$A/B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 & 5 \\ -1 & 1 & 1 & -4 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - \text{Fila } 1^a \\ -1 \quad 1 \quad 1 \quad -4 \\ 1 \quad -1 \quad 3 \quad -5 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 4 \quad -9 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 1^a \\ -1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \\ 1 \quad -1 \quad 3 \quad -5 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 4 \quad -4 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & -9 \\ 0 & 0 & 4 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad 0 \quad 4 \quad -4 \\ 0 \quad 0 \quad -4 \quad 9 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 5 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{c|ccc} & \overbrace{-1 \quad 1 \quad -3 \quad 5}^{A/B} \\ \hline 0 & 0 & 4 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ \hline & \underbrace{}_A & & \end{array} \right)$$

El rango de A es 2 y el de A/B es 3. Los rangos son distintos. El sistema es **incompatible** (sin solución).

CASO 3. Si $k=3$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango es menor de 3.

La matriz ampliada queda $A/B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 & 5 \\ -1 & 1 & 1 & -4 \\ 3 & 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$. Estudiamos el rango de A y el de

A/B usando el método de Gauss.

$$A/B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 & 5 \\ -1 & 1 & 1 & -4 \\ 3 & 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3 \cdot \text{Fila } 2^a + \text{Fila } 1^a \\ -3 \quad 3 \quad 3 \quad -12 \\ 3 \quad 1 \quad -3 \quad 5 \\ \hline 0 \quad 4 \quad 0 \quad -7 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 1^a \\ 3 \quad 1 \quad -3 \quad 1 \\ -3 \quad -1 \quad 3 \quad -5 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad -4 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{c|ccc} & \overbrace{-1 \quad 1 \quad -3 \quad 5}^{A/B} \\ \hline 0 & 4 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \\ \hline & \underbrace{}_A & & \end{array} \right)$$

El rango de A es 2 y el de A/B es 3. Los rangos son distintos. El sistema es **incompatible** (sin solución).

Resumiendo: Si $k \neq -1$ y $k \neq 3$ el sistema es **compatible determinado** (una única solución) y si $k = -1$ o $k = 3$ el sistema es **incompatible** (sin solución).

b) Para $k = 4$ el sistema es compatible determinado (caso 1). Lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} 4x + y - 3z = 5 \\ -x + y + z = -4 \\ 4x + y - 4z = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 4x + y - 3z = 5 \\ y = -4 + x - z \\ 4x + y - 4z = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 4x - 4 + x - z - 3z = 5 \\ 4x - 4 + x - z - 4z = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 5x - 4z = 9 \\ 5x - 5z = 5 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 5x - 4z = 9 \\ x - z = 1 \rightarrow x = 1 + z \end{array} \right\} \Rightarrow 5(1 + z) - 4z = 9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5 + 5z - 4z = 9 \Rightarrow \boxed{z = 4} \Rightarrow \boxed{x = 1 + 4 = 5} \Rightarrow \boxed{y = -4 + 5 - 4 = -3}$$

La solución del sistema para $k = 4$ es $x = 5$, $y = -3$ y $z = 4$.

3A. En el espacio tridimensional tenemos el punto, la recta y el plano siguientes:

$$P(-7, 3, 4), \quad r: \begin{cases} x+y-1=0 \\ x+z+1=0 \end{cases}, \quad \pi: x+2y-5z+5=0$$

a) Encontrar el punto A intersección del plano π con una recta s . Esta recta s es una recta paralela a la recta r y que pasa por el punto P . 1.5 pts

b) Hallar el ángulo que forma la recta r y el plano π . 1 pto

a) Hallamos un vector director de la recta r .

$$r: \begin{cases} x+y-1=0 \\ x+z+1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=1-x \\ z=-1-x \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} x=\lambda \\ y=1-\lambda \\ z=-1-\lambda \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} \vec{v}_r = (1, -1, -1) \\ Q_r(0, 1, -1) \end{cases}$$

Hallamos la ecuación de la recta s que es paralela a la recta r (mismo vector director) y pasa por P .

$$\left. \begin{array}{l} P(-7, 3, 4) \in s \\ \vec{u}_s = \vec{v}_r = (1, -1, -1) \end{array} \right\} \Rightarrow s: \begin{cases} x = -7 + \lambda \\ y = 3 - \lambda \\ z = 4 - \lambda \end{cases} ; \lambda \in \mathbb{R}$$

Hallamos el punto A de intersección del plano π con la recta s .

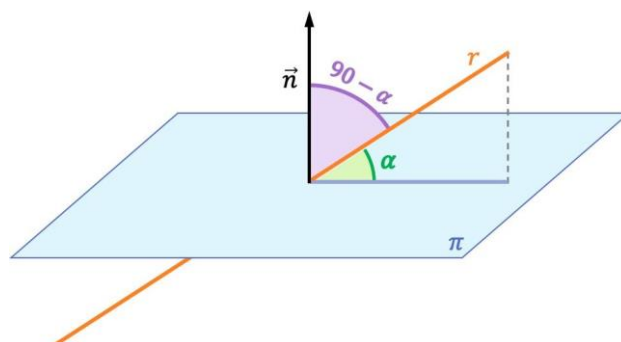
$$s: \begin{cases} x = -7 + \lambda \\ y = 3 - \lambda \\ z = 4 - \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -7 + \lambda + 2(3 - \lambda) - 5(4 - \lambda) + 5 = 0 \\ \pi: x + 2y - 5z + 5 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow -7 + \lambda + 6 - 2\lambda - 20 + 5\lambda + 5 = 0 \Rightarrow 4\lambda - 16 = 0 \Rightarrow 4\lambda = 16 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{16}{4} = 4 \Rightarrow \begin{cases} x = -7 + 4 = -3 \\ y = 3 - 4 = -1 \\ z = 4 - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{A(-3, -1, 0)}$$

El punto A de intersección del plano π con la recta s tiene coordenadas $A(-3, -1, 0)$.

b) Hallamos el ángulo que forman el vector director de la recta y el vector normal del plano.



$$\left. \begin{array}{l} \pi : x + 2y - 5z + 5 = 0 \Rightarrow \vec{n} = (1, 2, -5) \\ \vec{v}_r = (1, -1, -1) \\ \cos(\vec{n}, \vec{v}_r) = \frac{\vec{n} \cdot \vec{v}_r}{|\vec{n}| |\vec{v}_r|} \end{array} \right\} \Rightarrow \cos(\vec{n}, \vec{v}_r) = \frac{(1, 2, -5)(1, -1, -1)}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-5)^2} \sqrt{1^2 + (-1)^2 + (-1)^2}} =$$

$$= \frac{1 - 2 + 5}{\sqrt{30} \sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{10}}{15} \Rightarrow (\vec{n}, \vec{v}_r) = \cos^{-1}\left(\frac{2\sqrt{10}}{15}\right) = 65.06^\circ$$

El ángulo que forman los vectores es de 65.06° y el ángulo formado entre recta y plano tiene un valor de $90^\circ - 65.06^\circ = 24.94^\circ$.

3B. En el espacio tridimensional se conocen las ecuaciones de las rectas siguientes:

$$r: \begin{cases} 3x + 2y - z = 1 \\ 2x - y + z + 4 = 0 \end{cases} \quad ; \quad s: \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$$

a) Estudiar la posición relativa de las rectas r y s .

1.5 pto

b) Encontrar el plano π , paralelo a la recta r y que contiene a la recta s .

1 pto

a) Hallamos un punto y un vector director de cada recta.

$$s: \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases} \Rightarrow s: \begin{cases} P_s(3, 0, 1) \\ \vec{v}_s = (1, 1, 1) \end{cases}$$

$$r: \begin{cases} 3x + 2y - z = 1 \\ 2x - y + z + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + 2y - 1 = z \\ 2x - y + z + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow 2x - y + 3x + 2y - 1 + 4 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5x + y + 3 = 0 \Rightarrow y = -3 - 5x \Rightarrow z = 3x + 2(-3 - 5x) - 1 = 3x - 6 - 10x - 1 = -7 - 7x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = -3 - 5\lambda \\ z = -7 - 7\lambda \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} Q_r(0, -3, -7) \\ \vec{u}_r = (1, -5, -7) \end{cases}$$

El vector director de la recta s : $\vec{v}_s = (1, 1, 1)$ y el vector director de la recta r : $\vec{u}_r = (1, -5, -7)$ no tienen coordenadas proporcionales. Las rectas no son ni paralelas ni coincidentes.

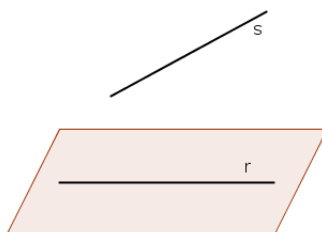
$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_s = (1, 1, 1) \\ \vec{u}_r = (1, -5, -7) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{1} \neq \frac{1}{-5} \neq \frac{1}{-7}$$

Las rectas se cortan o cruzan. Estudiamos el valor del producto mixto $[\vec{u}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{P_s Q_r}]$.

$$\overrightarrow{P_s Q_r} = (0, -3, -7) - (3, 0, 1) = (-3, -3, -8)$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_s = (1, 1, 1) \\ \vec{u}_r = (1, -5, -7) \\ \overrightarrow{P_s Q_r} = (-3, -3, -8) \end{array} \right\} \Rightarrow [\vec{u}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{P_s Q_r}] = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -5 & -7 \\ -3 & -3 & -8 \end{vmatrix} = 40 + 21 - 3 - 15 + 8 - 21 = 30 \neq 0$$

Como el producto mixto es no nulo las rectas se cruzan (distinta dirección en planos paralelos).



- b) El plano π , paralelo a la recta r y que contiene a la recta s tiene como vectores directores los vectores directores de las rectas y contiene el punto $P_s(3,0,1)$ de la recta s .

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v} = \vec{v}_s = (1, 1, 1) \\ \vec{u} = \vec{u}_r = (1, -5, -7) \\ P_s(3, 0, 1) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \pi : \begin{vmatrix} x-3 & y & z-1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -5 & -7 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -7(x-3) + y - 5(z-1) - (z-1) + 7y + 5(x-3) = 0 \Rightarrow$$

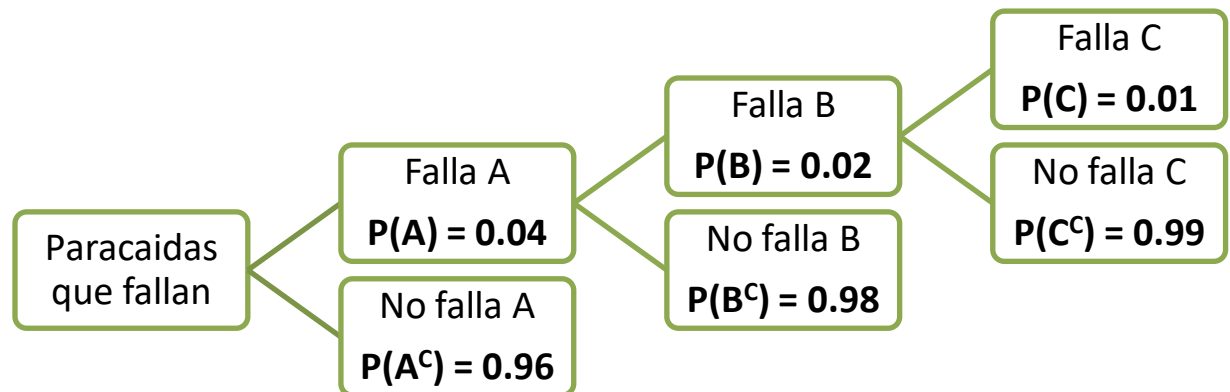
$$\Rightarrow -7x + 21 + y - 5z + 5 - z + 1 + 7y + 5x - 15 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2x + 8y - 6z + 12 = 0 \Rightarrow \boxed{\pi : x - 4y + 3z - 6 = 0}$$

El plano π , paralelo a la recta r y que contiene a la recta s tiene ecuación: $\pi : x - 4y + 3z - 6 = 0$

- 4A.** En un avión de pasajeros se han instalado tres paracaídas A, B y C. Si falla A, se pone B en funcionamiento, y si también falla B, se activa el paracaídas C. Las probabilidades de que funcione correctamente cada paracaídas son, respectivamente, 0.96, 0.98 y 0.99
- a) Dibujar un diagrama de árbol que refleje todos los posibles casos. 0.5 pts
- b) Calcular la probabilidad de que se active el paracaídas B y funcione correctamente. 0.75 pts
- c) Calcular la probabilidad de que funcione algún paracaídas. 1.25 pts

- a) Llamamos A, B y C a los sucesos “falla el paracaídas A, B o C, respectivamente. Realizamos un diagrama de árbol descriptivo del experimento aleatorio.



- b) Nos piden calcular $P(A \cap B^c)$.

$$P(A \cap B^c) = P(A)P(B^c) = 0.04 \cdot 0.98 = 0.0392$$

La probabilidad de que se active el paracaídas B y funcione correctamente es de 0.0392.

- c) Es la probabilidad de que no falle A o falle A y no falle B o falle A, falle B y no falle C. Nos piden calcular $P(A^c \cup (A \cap B^c) \cup (A \cap B \cap C^c))$.

$$P(A^c \cup (A \cap B^c) \cup (A \cap B \cap C^c)) = 0.96 + 0.04 \cdot 0.98 + 0.04 \cdot 0.02 \cdot 0.99 = 0.999992$$

La probabilidad de que funcione algún paracaídas es de 0.999992.

4B. Un juego de ruleta tiene 25 casillas numeradas del 1 al 25. Un jugador gana si sale un número par.

- a) Si juega 100 veces, calcular la probabilidad de que gane en más de la mitad de las ocasiones. 1.25 pts
- b) Si juega 200 veces, un jugador afirma que la probabilidad de ganar entre 90 y 110 veces es menor que $3/4$. Justificar si esta afirmación es cierta o no. 1.25 pts

- a) Llamamos X a la variable aleatoria que cuenta el número de veces que se gana en un juego de ruleta en 100 jugadas.

Esta variable es dicotómica (gano o pierdo) y cada repetición es independiente de la anterior.

Como hay 25 números y de ellos 12 son pares la probabilidad de ganar es $p = \frac{12}{25} = 0.48$

$X = B(100, 0.48)$. Nos piden calcular $P(X > 50)$.

Como el número de repeticiones es muy grande aproximamos esta variable binomial X a una variable normal Y con media $\mu = np = 100 \cdot 0.48 = 48$ y desviación típica

$$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{100 \cdot 0.48 \cdot 0.52} \approx 4.996.$$

$$Y = N(48, 4.996)$$

Esta aproximación es buena pues $np = 48 > 5$ y $nq = 52 > 5$

Calculamos la probabilidad pedida haciendo uso de la aproximación a la normal.

$$P(X > 50) = \{\text{Corrección de Yates}\} = P(Y \geq 50.5) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(Z \geq \frac{50.5 - 48}{4.996}\right) =$$

$$= P(Z \geq 0.5) = 1 - P(Z \leq 0.5) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = 1 - 0.6915 = 0.3085$$

	0	
0	0.5000	0.5
0.1	0.5398	0.6
0.2	0.5793	0.7
0.3	0.6179	0.8
0.4	0.6554	0.9
0.5	0.6915	
0.6	0.7257	
0.7	0.7580	

La probabilidad de que gane en más de la mitad de las ocasiones vale 0.3085.

- b) Llamamos X a la variable aleatoria que cuenta el número de veces que se gana en un juego de ruleta en 200 jugadas.

Esta variable es dicotómica (gano o pierdo) y cada repetición es independiente de la anterior.

La probabilidad de ganar es $p = \frac{12}{25} = 0.48$

$X = B(200, 0.48)$. Calculamos $P(90 < X < 110)$.

Como el número de repeticiones es muy grande aproximamos esta variable binomial X a una variable normal Y con media $\mu = np = 200 \cdot 0.48 = 96$ y desviación típica

$$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{200 \cdot 0.48 \cdot 0.52} \approx 7.07.$$

$$Y = N(96, 7.07)$$

Esta aproximación es buena pues $np = 96 > 5$ y $nq = 104 > 5$

Consideramos que no se incluye 90 ni 110 y calculamos $P(90 < X < 110)$.

$$\begin{aligned}
 P(90 < X < 110) &= \{\text{Corrección de Yates}\} = P(90.5 \leq Y \leq 109.5) = \{\text{Tipificamos}\} = \\
 &= P\left(\frac{90.5 - 96}{7.07} \leq Z \leq \frac{109.5 - 96}{7.07}\right) = P(-0.78 \leq Z \leq 1.91) = \\
 &= P(Z \leq 1.91) - P(Z \leq -0.78) = P(Z \leq 1.91) - P(Z \geq 0.78) = \\
 &= P(Z \leq 1.91) - [1 - P(Z \leq 0.78)] = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = \\
 &= 0.9719 - [1 - 0.7823] = 0.7542
 \end{aligned}$$

	0	0.01		0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0
0	0.5000	0.5040	0.5	0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319
0.1	0.5398	0.5438	0.6	0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714
0.2	0.5793	0.5832	0.7	0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103
0.3	0.6179	0.6217	0.8	0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480
0.4	0.6554	0.6591	0.9	0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844
0.5	0.6915	0.6950		0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190
0.6	0.7257	0.7291		0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517
0.7	0.7580	0.7611		0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823
0.8	0.7881	0.7910		0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106
0.9	0.8159	0.8188											
1	0.8413	0.8438											
1.1	0.8643	0.8665											
1.2	0.8849	0.8869											
1.3	0.9032	0.9049											
1.4	0.9192	0.9207											
1.5	0.9332	0.9345											
1.6	0.9452	0.9463											
1.7	0.9554	0.9564											
1.8	0.9641	0.9649											
1.9	0.9719	0.9719											

La probabilidad de ganar entre 90 y 110 veces es de 0.7542. No es cierta la afirmación de que esta probabilidad es menor de $3/4 = 0.75$.