

PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD
PARA MAYORES DE 25 AÑOS

MAYO 2024

MATEMÁTICAS**INDICACIONES**

- El examen consta de seis ejercicios. El alumno **ha de elegir y resolver tres** de ellos completos.
- Cada ejercicio tiene un valor máximo de 10 puntos. La nota del examen será igual a la media aritmética de las notas de los tres ejercicios elegidos.
- Las respuestas deben ser razonadas.
- No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables. Tampoco está permitido el uso de dispositivos con acceso a internet.
- Si responde a más de tres ejercicios, solo se corregirán los tres primeros que haya resuelto según el orden en que se presenten en el cuadernillo de examen.

Ejercicio 1 [10 PUNTOS]

Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & a & 1 \\ 3 & a & a \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ que depende de un parámetro $a \in \mathbb{R}$.

- 1) [2.5 PUNTOS] Calcule el determinante de A en función del parámetro a .
- 2) [2.5 PUNTOS] Determine los a para los cuales A tiene inversa.
- 3) [5 PUNTOS] Calcule la inversa de A para el caso $a = 0$.

Ejercicio 2 [10 PUNTOS]

Considere la función $f(x) = 3x^2 - 6x + 6$

- 1) [2 PUNTOS] Indique si $f(x)$ corta con los ejes y, en ese caso, el punto o puntos de corte.
- 2) [4 PUNTOS] Calcule la parte del dominio de definición de $f(x)$ en que es convexa.
- 3) [4 PUNTOS] Represente gráficamente a $f(x)$.

Ejercicio 3 [10 PUNTOS]

Dé un valor a los parámetros $a, b \in \mathbb{R}$ para que

$$3x - a = 8y - b$$

sea la ecuación de una recta que pase por el origen de coordenadas, es decir, que pase por el punto $(0, 0)$.

Ejercicio 4 [10 PUNTOS]

Considere el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} ax + y - z = 1 \\ 3x + 2y + az = 1 \\ 5x + 3y + 4z = 2a \end{cases}$$

que depende de un parámetro $a \in \mathbb{R}$.

- 1) [5 PUNTOS] Determine para que valores de a el sistema es compatible determinado.
- 2) [5 PUNTOS] Calcule la solución del sistema cuando a toma los valores para los cuales el sistema es compatible determinado.

Ejercicio 5 [10 PUNTOS]

Considere la función

$$f(x) = \frac{4 - x^2}{2 - x}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

- 1) [2,5 PUNTOS] Determine el dominio de $f(x)$.
- 2) [2,5 PUNTOS] Determine el rango de $f(x)$.
- 3) [5 PUNTOS] Determine el/los intervalo(s) de decrecimiento de $f(x)$.

Ejercicio 6 [10 PUNTOS]

Considere los puntos $A = (1, 0)$ y $B = (3, 2)$

- 1) [5 PUNTOS] Calcule la distancia entre A y B.
- 2) [5 PUNTOS] Determine la ecuación de la recta que pasa por A y B.

SOLUCIONES

Ejercicio 1 [10 PUNTOS]

Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & a & 1 \\ 3 & a & a \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ que depende de un parámetro $a \in \mathbb{R}$.

- 1) [2.5 PUNTOS] Calcule el determinante de A en función del parámetro a .
 2) [2.5 PUNTOS] Determine los a para los cuales A tiene inversa.
 3) [5 PUNTOS] Calcule la inversa de A para el caso $a = 0$.

1) Hallamos la expresión del determinante de A.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & a & 1 \\ 3 & a & a \\ 5 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \cancel{2a} + 5a^2 + 3 - 5a - 3a - \cancel{2a} = 5a^2 - 8a + 3$$

2) Para que la matriz tenga inversa su determinante debe ser no nulo.

$$\left. \begin{array}{l} |A| = 5a^2 - 8a + 3 \\ |A| = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 5a^2 - 8a + 3 = 0 \Rightarrow a = \frac{8 \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 3}}{2 \cdot 5} = \frac{8 \pm 2}{10} = \begin{cases} \frac{8+2}{10} = \boxed{1=a} \\ \frac{8-2}{10} = \boxed{\frac{3}{5}=a} \end{cases}$$

La matriz A tiene inversa para cualquier valor de a distinto de $\frac{3}{5}$ y de 1.

3) Para $a = 0$ la matriz A tiene inversa. La calculamos.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$$

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^T)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}{3} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -3 & -3 & 3 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & -2/3 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2 [10 PUNTOS]

Considere la función $f(x) = 3x^2 - 6x + 6$

- 1) [2 PUNTOS] Indique si $f(x)$ corta con los ejes y, en ese caso, el punto o puntos de corte.
- 2) [4 PUNTOS] Calcule la parte del dominio de definición de $f(x)$ en que es convexa.
- 3) [4 PUNTOS] Represente gráficamente a $f(x)$.

1) Hallamos los puntos de corte con los ejes de coordenadas.

$$\text{Con el eje de ordenadas OY} \rightarrow \left. \begin{array}{l} f(x) = 3x^2 - 6x + 6 \\ x = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f(0) = 3 \cdot 0^2 - 6 \cdot 0 + 6 = 6 \Rightarrow \boxed{P(0, 6)}$$

Con el eje de abscisas OX $\rightarrow$

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = 3x^2 - 6x + 6 \\ y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 0 = 3x^2 - 6x + 6 \Rightarrow x^2 - 2x + 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(2)}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \text{No existe}$$

Solo existe punto de corte con el eje de ordenadas: $P(0, 6)$.

- 2) La función es una parábola, por lo que o es cóncava ($\cap$) o convexa ($\cup$) en todo su dominio. Como el coeficiente del x^2 es positivo es convexa ($\cup$) en todo su dominio $\mathbb{R}$.

OTRA FORMA DE RAZONARLO

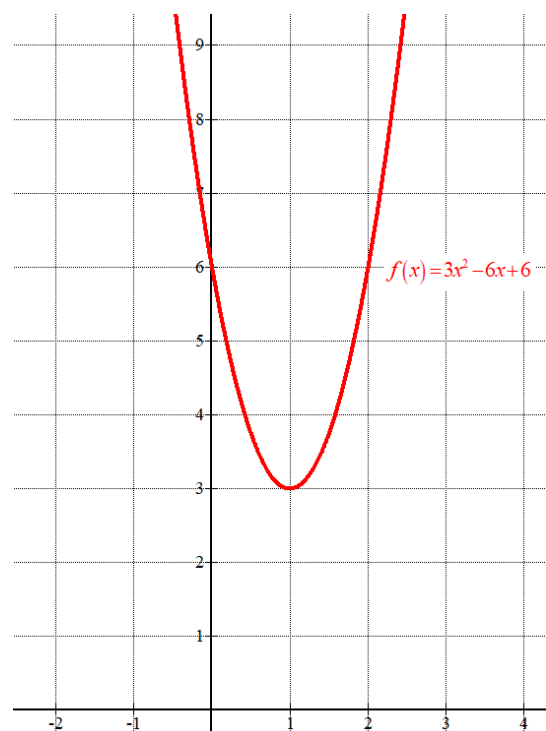
$f'(x) = 6x - 6 \Rightarrow f''(x) = 6 > 0$. La derivada segunda siempre es positiva, por lo que la función es convexa en todo su dominio.

- 3) Esta función es parabólica. Determinamos su vértice y una tabla de valores para representar su gráfica.

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = 6x - 6 \\ f'(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 6x - 6 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 1}$$

$x = 1$ es el vértice de la parábola, Y será un mínimo de la función.

x	$f(x) = 3x^2 - 6x + 6$
-1	15
0	6
1	3 <i>Mínimo</i>
2	6
3	15



Ejercicio 3 [10 PUNTOS]

Dé un valor a los parámetros $a, b \in \mathbb{R}$ para que

$$3x - a = 8y - b$$

sea la ecuación de una recta que pase por el origen de coordenadas, es decir, que pase por el punto $(0, 0)$.

La recta pasa por el origen de coordenadas $(0, 0)$.

$$\left. \begin{array}{l} 3x - a = 8y - b \\ x = 0; y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 0 - a = 0 - b \Rightarrow a = b$$

Hay muchos valores que nos valdrían. Damos un valor cualquiera a b y obtenemos el valor de a correspondiente. Por ejemplo, $b = 1 \rightarrow a = 1$.

Una pareja de valores que cumplen lo pedido es $a = 1$ y $b = 1$.

Ejercicio 4 [10 PUNTOS]

Considere el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} ax + y - z = 1 \\ 3x + 2y + az = 1 \\ 5x + 3y + 4z = 2a \end{cases}$$

que depende de un parámetro $a \in \mathbb{R}$.

1) [5 PUNTOS] Determine para que valores de a el sistema es compatible determinado.

2) [5 PUNTOS] Calcule la solución del sistema cuando a toma los valores para los cuales el sistema es compatible determinado.

1) Estudiamos la compatibilidad del sistema.

Su matriz de coeficientes es $A = \begin{pmatrix} a & 1 & -1 \\ 3 & 2 & a \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. Averiguamos cuando se anula el determinante

de la matriz de coeficientes asociada al sistema.

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 1 & -1 \\ 3 & 2 & a \\ 5 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 8a + 5a - 9 + 10 - 12 - 3a^2 = -3a^2 + 13a - 11$$

$$|A| = 0 \Rightarrow -3a^2 + 13a - 11 \Rightarrow a = \frac{-13 \pm \sqrt{13^2 - 4(-3)(-11)}}{2(-3)} = \frac{-13 \pm \sqrt{37}}{-6}$$

Para que el sistema sea compatible determinado el determinante de A debe ser distinto de cero

y para ello a debe ser distinto de $\frac{-13 + \sqrt{37}}{-6}$ y de $\frac{-13 - \sqrt{37}}{-6}$.

2) Resolvemos el sistema utilizando el método de Cramer. Consideramos que a tiene un valor

distinto de $\frac{-13 + \sqrt{37}}{-6}$ y de $\frac{-13 - \sqrt{37}}{-6}$.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & a \\ 2a & 3 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & 1 & -1 \\ 3 & 2 & a \\ 5 & 3 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{8 + 2a^2 - 3 + 4a - 4 - 3a}{-3a^2 + 13a - 11} = \frac{2a^2 + a + 1}{-3a^2 + 13a - 11}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & -1 \\ 3 & 1 & a \\ 5 & a & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & 1 & -1 \\ 3 & 2 & a \\ 5 & 3 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{4a + 5a - 3a + 5 - 12 - a^3}{-3a^2 + 13a - 11} = \frac{-a^3 + 6a - 7}{-3a^2 + 13a - 11}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & a \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & 1 & -1 \\ 3 & 2 & a \\ 5 & 3 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{2a^2 + 5 + 9 - 10 - 3a - 3a}{-3a^2 + 13a - 11} = \frac{2a^2 - 6a + 4}{-3a^2 + 13a - 11}$$

Ejercicio 5 [10 PUNTOS]

Considere la función

$$f(x) = \frac{4-x^2}{2-x}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

1) [2,5 PUNTOS] Determine el dominio de $f(x)$.

2) [2,5 PUNTOS] Determine el rango de $f(x)$.

3) [5 PUNTOS] Determine el/los intervalo(s) de decrecimiento de $f(x)$.

1) El dominio son todos los números reales menos los que anulan el denominador.

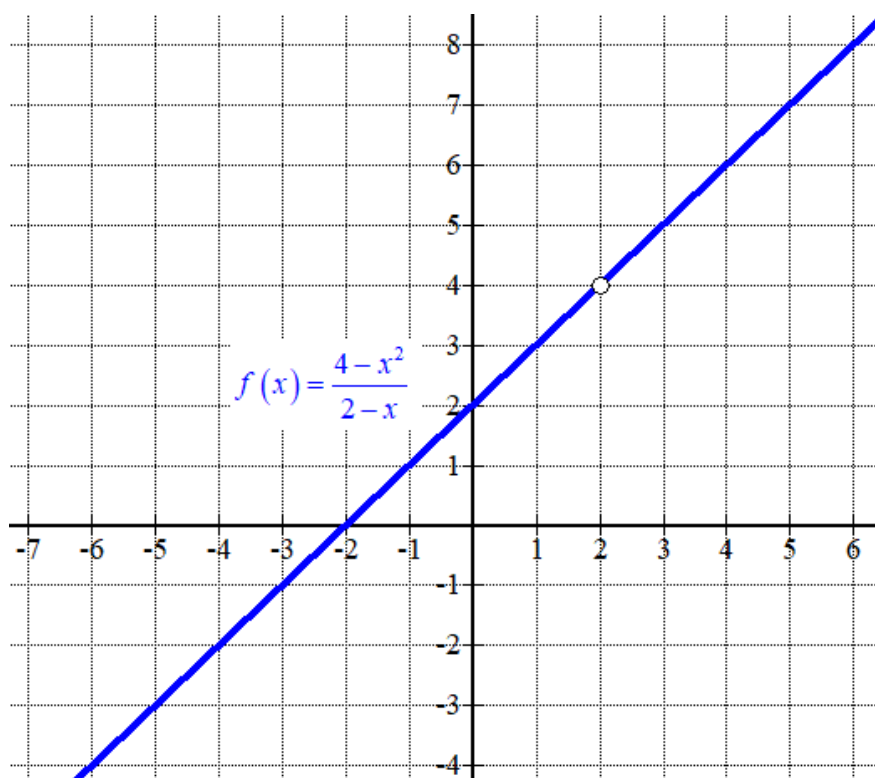
$$2-x=0 \Rightarrow x=2$$

$$\text{Dominio } f(x) = \mathbb{R} - \{2\}$$

2) Simplificamos la función.

$$f(x) = \frac{4-x^2}{2-x} = \frac{(2-x)(2+x)}{2-x} = 2+x$$

La función tal como está definida en el ejercicio tiene dominio $\mathbb{R} - \{2\}$, pero simplificando su expresión es una función lineal cuya gráfica es una recta. Dibujamos la gráfica de la función.



El rango de $f(x)$ es $\mathbb{R} - \{4\}$.

3) Como se observa en la gráfica la función es siempre creciente. No decrece nunca.

Ejercicio 6 [10 PUNTOS]

Considere los puntos $A = (1, 0)$ y $B = (3, 2)$

1) [5 PUNTOS] Calcule la distancia entre A y B.

2) [5 PUNTOS] Determine la ecuación de la recta que pasa por A y B.

1) Calculo las coordenadas del vector $\overrightarrow{AB}$ que une estos dos puntos.

$$\overrightarrow{AB} = (3, 2) - (1, 0) = (2, 2)$$

La distancia entre los puntos es el módulo o longitud del vector $\overrightarrow{AB}$.

$$D(A, B) = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} \approx 2.83 \text{ unidades}$$

2) El vector director de la recta es el vector $\overrightarrow{AB}$.

$$\left. \begin{array}{l} A(1, 0) \in r \\ B(3, 2) \in r \end{array} \right\} \Rightarrow r: \left\{ \begin{array}{l} A(1, 0) \in r \\ \vec{v}_r = \overrightarrow{AB} = (2, 2) \end{array} \right. \Rightarrow r: \left\{ \begin{array}{l} A(1, 0) \in r \\ m = \frac{2}{2} = 1 \end{array} \right. \Rightarrow y - 0 = 1(x - 1) \Rightarrow \boxed{y = x - 1}$$