

SÈRIE 1

Responen a CINC de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no s'autoritzarà l'ús de calculadores o altres aparells que portin informació emmagatzemada o que puguin transmetre o rebre informació.

Criteris generals per a la correcció:

1. En tots els casos la resolució que fa l'estudiant s'ha de poder seguir i comprendre els passos que fa. **Aquelles respostes, parcials o totals, que no estiguin desenvolupades o no es puguin seguir el com s'ha arribat a donar la resolució seran puntuades amb 0 punts.**
2. La resolució proposada és, en alguns casos, una de les possibles i no és, en principi, única. Per tant, **sempre que l'enunciat ho permeti, en el cas que l'estudiant respongui amb una resolució alternativa totalment correcta se li assignarà el total de puntuació de l'apartat.** Si la resposta és parcial la puntuació obtinguda serà proporcional a la part corresponent de la puntuació total.
3. En alguns casos, la solució final pot admetre **expressions equivalents**. En aquests casos la puntuació serà la totalitat de la puntuació de l'apartat.
4. Tots els exercicis, apartats i passos dins d'un apartat es valoraran amb múltiples de 0,25 punts.
5. **Penalització per errades de càlcul o transcripció:**
 - Si l'errada que es comet no té més transcendència, aleshores NO es descomptarà res de la puntuació parcial de l'apartat.
 - En el cas que l'errada condueixi a derivacions paral·leles de l'enunciat, es valorarà i puntuarà el desenvolupament i coherència de la resolució resultant, i només s'aplicarà una penalització final de 0,25 punts.
 - En cas que l'errada condueixi a no tenir sentit alguna de les qüestions que es demanen, aleshores la puntuació màxima de l'apartat serà de 0,75 punts.
 - Si la resolució d'un apartat conté dues errades la puntuació de l'apartat serà l'acumulada fins al moment previ al cometre la segona errada.

1.

a)

Estudieu per a quins valors de λ el sistema és incompatible.

$$M|\overline{M} = \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 10 \\ 2\lambda & -1 & 5\lambda & 30 \end{array} \right)$$

$$\begin{vmatrix} \lambda & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2\lambda & -1 & 5\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 5\lambda + 2 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 5\lambda + 2 \end{vmatrix} = \lambda(5\lambda + 5) = 5\lambda(\lambda + 1)$$

CAS I: Si $\lambda \neq 0$ i $\lambda \neq -1$

$$\text{Rang } M = \text{Rang } \overline{M} = \text{núm. incòg} = 3$$

En virtut del teorema de Rouché-Frobénius, en aquest cas el sistema és *compatible determinat*.

CAS II: Si $\lambda = 0$

$$M|\overline{M} = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & -1 & 0 & 30 \end{array} \right)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0, \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Rang } M = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 10 \\ -1 & 0 & 30 \end{vmatrix} = 70 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Rang } \overline{M} = 3$$

$$\text{Rang } M \neq \text{Rang } \overline{M}$$

En virtut del teorema de Rouché-Frobénius, el sistema és *incompatible*.

CAS III: $\lambda = -1$

$$M|\overline{M} = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 10 \\ -2 & -1 & -5 & 30 \end{array} \right)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0, \quad \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -5 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Rang } M = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 10 \\ -1 & -5 & 30 \end{vmatrix} = 120 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Rang } \overline{M} = 3$$

$$\text{Rang } M = 2 \quad \text{Rang } \overline{M} = 3$$

$$\text{Rang } M \neq \text{Rang } \overline{M}$$

En virtut del teorema de Rouché-Frobénius, el sistema és *incompatible*.

El sistema és incompatible per a dos valors del paràmetre λ : $\lambda = 0$ i $\lambda = -1$.

b) Resoleu el sistema per a $\lambda = 1$.

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ y + z = 10 \\ 2x - y + 5z = 30 \end{cases}$$

En aquest cas el sistema és compatible determinat, té una única solució i el sistema es pot resoldre per qualsevol mètode conegut, per exemple, pel mètode de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 10 \\ 2 & -1 & 5 & 30 \end{array} \right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & -3 & 7 & 30 \end{array} \right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 10 & 60 \end{array} \right)$$

De la tercera equació, tenim $10z = 60$, per tant, $z = 6$.

De la segona equació, tenim $y + z = 10$, per tant, $y = 4$.

De la primera equació, tenim $x + y - z = 0$, per tant, $x = 2$.

Solució: $(x = 2, y = 4, z = 6)$.

Pautes de correcció:**a)**

0,25 punts per al determinant de la matriu de coeficients i per als valors crítics.

0,25 punts per a la discussió del cas $\lambda = -1$.

0,25 punts per a la discussió del cas $\lambda = 0$.

0,25 punts per a la resposta a la pregunta.

b)

0,25 punts per al sistema particular (i la indicació de SCD, si és el cas, que no cal).

0,25 punts per al valor de la x .

0,25 punts per al valor de la y .

0,25 punts per al valor de la z .

2.

a)

Si el pla ha de ser perpendicular als dos plans π_1 i π_2 , aleshores el seu vector normal, $n = (A, B, C)$ haurà de ser perpendicular als respectius vectors normals $n_1 = (5, -1, -7)$ i $n_2 = (2, 3, 1)$.

$$\text{Així doncs } n = n_1 \times n_2 = \begin{vmatrix} i & 5 & 2 \\ j & -1 & 3 \\ k & -7 & 1 \end{vmatrix} = (20, -19, 17).$$

El pla tindrà la forma $20x - 19y + 17z = D$, però si ha de passar per l'origen de coordenades (0,0,0), aleshores $D = 0$ i el pla buscat serà $\boxed{20x - 19y + 17z = 0}$.

b) L'angle entre els dos plans serà l'angle que formen els respectius vectors normals. Així doncs:

$$\begin{aligned} \boxed{\alpha} &= \alpha(\pi_1, \pi_2) = \alpha(n_1, n_2) = \alpha((5, -1, -7), (2, 3, 1)) = \arccos \frac{n_1 \cdot n_2}{\|n_1\| \cdot \|n_2\|} = \\ &= \arccos \frac{10 - 3 - 7}{\|n_1\| \cdot \|n_2\|} = \arccos 0 = \boxed{90^\circ = \frac{\pi}{2} \text{ rad}}. \end{aligned}$$

Els dos plans són perpendiculars.

Pautes de correcció:

a)

- 0,25 punts pel plantejament de perpendicularitat entre vectors normals.
- 0,25 punts pel producte vectorial.
- 0,25 punts per la forma inicial del pla.
- 0,25 punts per l'equació final del pla.

b)

- 0,25 punts per l'angle a partir de l'angle entre els vectors normals.
- 0,25 punts per la formulació de l'angle.
- 0,25 punts pel producte escalar.
- 0,25 punts per la perpendicularitat (o l'angle de 90° , sense indicar perpendicularitat).

3.

a)

La resposta depèn del signe de k .

- Si $k < 0$, aleshores $x^2 - k > 0$ per a qualsevol valor de x i, per tant, $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$ i la funció $f(x) = \frac{1}{x^2 - k}$ és contínua perquè no s'anul·la el denominador i no té cap asymptota vertical.

Com que $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x^2 - k} = 0$, la funció té una asymptota horitzontal en l'eix de les x , $y=0$.

- Si $k > 0$ aleshores $x^2 - k$ s'anul·la per als valors $\pm\sqrt{k}$ i, per tant, $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{\pm\sqrt{k}\}$ i la funció $f(x) = \frac{1}{x^2 - k}$ tindrà dues asymptotes verticals, en $x = +\sqrt{k}$ i en $x = -\sqrt{k}$.

Com que $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x^2 - k} = 0$, la funció té una asymptota horitzontal en l'eix de les x , $y=0$.

- b) $f'(x) = \frac{-2x}{(x^2 - k)^2} = 0$ si $x = 0$, amb independència del valor de k .

$$f''(x) = \frac{(-2)(x^2 - k)^2 - (-2x)2(x^2 - k)2x}{(x^2 - k)^4} = \frac{(-2)(x^2 - k) + 8x^2}{(x^2 - k)^3} = \frac{6x^2 + 2k}{(x^2 - k)^3}$$

Com que $f''(0) = \frac{-2}{k^2} < 0$,

f , per tant, té un màxim relatiu en el punt $\left(0, \frac{-1}{k}\right)$ i no té mínims relatius.

Observació: En lloc de fer servir el signe de la derivada segona també es pot veure el creixement o decreixement de la funció f a l'entorn de $x = 0$.

Pautes de correcció:

a)

0,25 punts pel domini i no AV quan $k < 0$

0,25 punts pel domini i AV quan $k > 0$

0,25 punts per la AH quan $k < 0$

0,25 punts per la AH quan $k > 0$

b)

0,25 punts per la derivada primera.

0,25 punts pel punt singular.

0,25 punts per la derivada segona o el raonament equivalent sobre el creixement o decreixement.

0,25 punts per la classificació del punt i la resposta final.

4.

a)

Perquè tingui solució única caldrà que el sistema sigui compatible i determinat; és a dir, que $\text{rang} M = \text{rang} M' = 3$

$$\text{amb } (M|M') = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 0 & 1 \\ 1 & 0 & a & 1 \\ 0 & 1 & 1 & a \end{array} \right)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2a$$

Per tal que $\text{rang} M = 3$ cal que $\text{Det } M \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 0$

Això vol dir que el sistema és compatible i determinat sempre que $a \neq 0$

b) Per Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 1 & 0 & a \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-2a} = \frac{a^3 - 2a}{-2a} = \frac{2 - a^2}{2}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & a \\ 0 & a & 1 \end{vmatrix}}{-2a} = \frac{1 - a^2 - 1}{-2a} = \frac{a}{2} \quad \text{i}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix}}{-2a} = \frac{1 - 1 - a^2}{-2a} = \frac{a}{2}$$

Per tant, la solució del sistema (en funció del paràmetre a) és: $\left(\frac{2-a^2}{2}, \frac{a}{2}, \frac{a}{2} \right)$

Pautes de correcció:***a)***

0,25 punts per la condició de Rouché-Frobénius.

0,25 punts pel determinant de l'associada.

0,25 punts pel valor singular.

0,25 punts pel raonament final.

b)

0,25 punts per l'aplicació de la regla de Cramer o mètode equivalent.

0,25 punts pel càlcul de la x .0,25 punts pel càlcul de la y .0,25 punts pel càlcul de la z .

5.

a)

Per a comprovar que una matriu $M = \begin{pmatrix} x & -1 \\ y^2 + 1 & x \end{pmatrix}$ és invertible és suficient comprovar que el seu determinant és sempre diferent de 0.

Efectivament, $|M| = x^2 - (-1)(y^2 + 1) = x^2 + y^2 + 1$, que és sempre diferent de 0, ja que $x^2 + y^2 \geq 0$ en ser suma de dos quadrats, independentment del valor que tinguin les variables x i y .

a) Per a $x = 1$ i $y = -1$, tenim $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\text{Tindrem } M^{-1} = \frac{1}{|M|} (\text{Adj}M)^t = \boxed{\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}}.$$

Pautes de correcció:

a)

0,5 punts pel plantejament a partir del determinant no nul (o del rang 2).

0,5 punts per provar que el determinant és sempre diferent de 0.

b)

0,25 punts per l'expressió de M .

0,25 punts per la formulació del càlcul de la matriu inversa.

0,5 punts pel càlcul final.

6.

a)

Pel teorema de Pitàgores sabem que $a^2 = x^2 + h^2$. Com que el volum del con val 120 cm^3 , per la fórmula del volum tenim

$$120 = \frac{\pi \cdot x^2 \cdot h}{3}$$

i aïllant, obtenim $x^2 = \frac{360}{\pi} \cdot \frac{1}{h}$. Substituint x^2 a l'expressió inicial, s'obté la fórmula buscada.

b) La longitud de l'aresta és una funció positiva i tenim la longitud al quadrat expressada com a funció de h , per tant és suficient amb trobar els mínims de la funció

$$f(h) = \frac{360}{\pi} \cdot \frac{1}{h} + h^2$$

quan $h \in (0, \infty)$. Tenim

$$f'(h) = 2h - \frac{360}{\pi} \cdot \frac{1}{h^2}$$

per tant, en igualar $F'(h) = 0$, s'obté $2h = \frac{360}{\pi} \cdot \frac{1}{h^2}$, $h^3 = \frac{180}{\pi}$ i $h = \sqrt[3]{\frac{180}{\pi}} \simeq 3,86 \text{ cm}$.

Es comprova que és un mínim, ja que $f'(x) < 0$ quan $x \in \left(0, \sqrt[3]{\frac{180}{\pi}}\right)$ i $f'(x) > 0$ quan $x \in \left(\sqrt[3]{\frac{180}{\pi}}, \infty\right)$.

Alternativament, es pot treballar amb la funció

$$a(h) = \sqrt{\frac{360}{\pi} \cdot \frac{1}{h} + h^2}$$

i s'obté com a derivada

$$a'(h) = \frac{h - \frac{180}{\pi} \cdot \frac{1}{h^2}}{\sqrt{\frac{360}{\pi} \cdot \frac{1}{h} + h^2}}$$

El desenvolupament del problema és el mateix a partir d'aquí.

Pautes de correcció:**a)**

0,25 punts per l'aplicació del teorema de Pitàgores.

0,25 punts per la igualtat derivada del volum.

0,25 punts per aïllar la x .

0,25 punts per la substitució final.

b)

0,25 punts per l'argumentació de la funció a minimitzar.

0,25 punts per la derivada de la funció.

0,25 punts pel punt singular (en forma radical o amb l'expressió decimal).

0,25 punts per la classificació del punt singular (com a la proposta de resolució o a partir del signe de la derivada segona).