



Proves d'accés a la universitat

Matemàtiques

Serie 1

Responda a CINCO de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué.

Cada cuestión vale 2 puntos.

Puede utilizar calculadora, pero no se autorizará el uso de calculadoras u otros aparatos que permitan almacenar datos o que puedan transmitir o recibir información.

1. Considere el siguiente sistema de ecuaciones lineales, que depende del parámetro λ :

$$\begin{cases} \lambda x + y - z = 0 \\ y + z = 10 \\ 2\lambda x - y + 5\lambda z = 30 \end{cases}$$

a) Estudie para qué valores del parámetro λ el sistema es incompatible.

[1 punto]

b) Resuelva el sistema para el caso $\lambda = 1$.

[1 punto]

2. Considere los planos $\pi_1: 5x - y - 7z = 1$ y $\pi_2: 2x + 3y + z = 5$.

a) Determine la ecuación general (es decir, la que tiene la forma $Ax + By + Cz = D$) del plano que pasa por el origen de coordenadas y es perpendicular a los planos π_1 y π_2 .

[1 punto]

b) Calcule el ángulo que forman los planos π_1 y π_2 .

[1 punto]

3. Sea la función $f(x) = \frac{1}{x^2 - k}$, donde k es un parámetro real distinto de 0. Para los distintos valores del parámetro k :

a) Calcule el dominio y las asíntotas de la función.

[1 punto]

b) Calcule los puntos con un máximo o un mínimo relativo.

[1 punto]

4. Se sabe que el siguiente sistema de ecuaciones lineales tiene una única solución:

$$\begin{cases} x + ay = 1 \\ x + az = 1 \\ y + z = a \end{cases}$$

a) Compruebe que $a \neq 0$.

[1 punto]

b) Encuentre la solución del sistema en función del parámetro a .

[1 punto]

5. Considere las matrices cuadradas de orden 2 de la forma $M = \begin{pmatrix} x & -1 \\ y^2 + 1 & x \end{pmatrix}$, con x e y números reales.

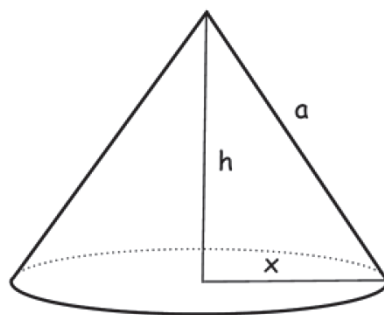
a) Compruebe que la matriz M es siempre invertible, independientemente de los valores de x y y .

[1 punto]

b) Para $x = 1$ e $y = -1$, calcule M^{-1} .

[1 punto]

6. Considere un cono de 120 cm^3 de volumen que tiene una altura h , un radio de la base x y una arista a , como el de la siguiente figura:



a) Compruebe que $a^2 = \frac{360}{\pi} \cdot \frac{1}{h} + h^2$.

[1 punto]

b) Calcule la altura del cono que tiene la arista de longitud mínima.

[1 punto]

NOTA: Recuerde que el volumen del cono es un tercio del volumen del cilindro recto que tiene la misma base y la misma altura que el cono.

SOLUCIONES

1. Considere el siguiente sistema de ecuaciones lineales, que depende del parámetro λ :

$$\begin{cases} \lambda x + y - z = 0 \\ y + z = 10 \\ 2\lambda x - y + 5\lambda z = 30 \end{cases}$$

a) Estudie para qué valores del parámetro λ el sistema es incompatible. [1 punto]

b) Resuelva el sistema para el caso $\lambda = 1$. [1 punto]

a) El sistema tiene asociado la matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2\lambda & -1 & 5\lambda \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada

$$A/B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 10 \\ 2\lambda & -1 & 5\lambda & 30 \end{pmatrix}.$$

Averiguamos cuando se anula el determinante de la matriz A.

$$|A| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2\lambda & -1 & 5\lambda \end{vmatrix} = 5\lambda^2 + 2\lambda + 0 + 2\lambda - 0 + \lambda = 5\lambda^2 + 5\lambda$$

$$|A| = 0 \Rightarrow 5\lambda^2 + 5\lambda = 0 \Rightarrow 5\lambda(\lambda + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda + 1 = 0 \rightarrow \lambda = -1 \end{cases}$$

Estudiamos los tres casos diferentes que se nos plantean.

CASO 1. $\lambda \neq 0$ y $\lambda \neq -1$.

En este caso el determinante de A es distinto de cero y su rango es 3. El rango de A y el rango de la matriz A/B es 3, igual que el número de incógnitas. El sistema es compatible determinado.

CASO 2. $\lambda = 0$.

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

La matriz de coeficientes queda $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Consideramos el menor de orden 2 que

resulta de quitar la fila y columna primeras $\rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$. El rango de A es 2.

La matriz ampliada queda $A/B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & -1 & 0 & 30 \end{pmatrix}$. Consideramos el menor de orden 3

que resulta de quitar la primera columna (nula) $\rightarrow$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 10 \\ -1 & 0 & 30 \end{vmatrix} = 30 + 10 + 0 - 0 + 30 - 0 = 70 \neq 0. \text{ El rango de } A/B \text{ es } 3.$$

El rango de A es 2 distinto del rango de A/B (3). El sistema es incompatible.

CASO 3. $\lambda = -1$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

La matriz queda $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -5 \end{pmatrix}$. Consideramos el menor de orden 2 que resulta de

quitar la fila y columna primeras $\rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -5 \end{vmatrix} = -5 + 1 = -4 \neq 0$. Su rango es 2.

La matriz ampliada queda $A/B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 10 \\ -2 & -1 & -5 & 30 \end{pmatrix}$. Consideramos el menor de orden 3

que resulta de quitar la primera columna $\rightarrow$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 10 \\ -1 & -5 & 30 \end{vmatrix} = 30 + 10 + 0 - 0 + 30 + 50 = 120 \neq 0. \text{ El rango de } A/B \text{ es } 3.$$

El rango de A es 2 distinto del rango de A/B (3). El sistema es incompatible.

El sistema es incompatible para $\lambda = 0$ o $\lambda = -1$.

b) Resolvemos el sistema para $\lambda = 1$. Sabemos que es compatible determinado.

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ y + z = 10 \\ 2x - y + 5z = 30 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y - z = 0 \\ y = 10 - z \\ 2x - y + 5z = 30 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 10 - z - z = 0 \\ 2x - 10 + z + 5z = 30 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2z - 10 \\ 2x + 6z = 40 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2(2z - 10) + 6z = 40 \Rightarrow 4z - 20 + 6z = 40 \Rightarrow 10z = 60 \Rightarrow \boxed{z = \frac{60}{10} = 6} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x = 2 \cdot 6 - 10 = 2} \\ \boxed{y = 10 - 6 = 4} \end{cases}$$

La solución del sistema es $x = 2$, $y = 4$, $z = 6$.

2. Considere los planos $\pi_1: 5x - y - 7z = 1$ y $\pi_2: 2x + 3y + z = 5$.

a) Determine la ecuación general (es decir, la que tiene la forma $Ax + By + Cz = D$) del plano que pasa por el origen de coordenadas y es perpendicular a los planos π_1 y π_2 . [1 punto]

b) Calcule el ángulo que forman los planos π_1 y π_2 . [1 punto]

a) Si el plano π_3 es perpendicular a los planos π_1 y π_2 su vector normal es el producto vectorial de los vectores normales de los dos planos.

$$\left. \begin{array}{l} \pi_1: 5x - y - 7z = 1 \rightarrow \vec{n}_1 = (5, -1, -7) \\ \pi_2: 2x + 3y + z = 5 \rightarrow \vec{n}_2 = (2, 3, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{n}_3 = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 5 & -1 & -7 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -i - 14j + 15k + 2k - 5j + 21i = 20i - 19j + 17k = (20, -19, 17)$$

El plano que buscamos pasa por el origen de coordenadas y tiene como vector normal el vector $\vec{n}_3 = (20, -19, 17)$.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{n}_3 = (20, -19, 17) \\ (0, 0, 0) \in \pi_3 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \pi_3: 20x - 19y + 17z + D = 0 \\ (0, 0, 0) \in \pi_3 \end{array} \right\} \Rightarrow 20 \cdot 0 - 19 \cdot 0 + 17 \cdot 0 + D = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D = 0 \Rightarrow \boxed{\pi_3: 20x - 19y + 17z = 0}$$

El plano buscado tiene ecuación $\pi_3: 20x - 19y + 17z = 0$.

b) El ángulo formado por los planos es el ángulo formado por sus vectores normales.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{n}_1 = (5, -1, -7) \\ \vec{n}_2 = (2, 3, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} = \frac{(5, -1, -7)(2, 3, 1)}{\sqrt{5^2 + (-1)^2 + (-7)^2} \sqrt{2^2 + 3^2 + 1^2}} =$$

$$= \frac{10 - 3 - 7}{\sqrt{75} \sqrt{14}} = \frac{0}{\sqrt{75} \sqrt{14}} = 0 \Rightarrow \text{ángulo}(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = \cos^{-1}(0) = 90^\circ$$

Los planos π_1 y π_2 forman un ángulo de 90° . Son planos perpendiculares.

3. Sea la función $f(x) = \frac{1}{x^2 - k}$, donde k es un parámetro real distinto de 0. Para los distintos valores del parámetro k :
- a) Calcule el dominio y las asíntotas de la función. [1 punto]
- b) Calcule los puntos con un máximo o un mínimo relativo. [1 punto]

- a) El dominio de una función racional son todos los números reales menos los que anulan el denominador.

$$x^2 - k = 0 \Rightarrow x^2 = k \Rightarrow \begin{cases} k < 0 \rightarrow x = \sqrt{k} = \text{Im possible} \rightarrow \text{Dominio} = \mathbb{R} \\ k > 0 \rightarrow x = \pm\sqrt{k} \rightarrow \text{Dominio} = \mathbb{R} - \{-\sqrt{k}, +\sqrt{k}\} \end{cases}$$

Si $k < 0$ el dominio de la función es $\text{Dominio} = \mathbb{R}$.

Si $k > 0$ el dominio de la función es $\text{Dominio} = \mathbb{R} - \{-\sqrt{k}, +\sqrt{k}\}$

Determinamos las asíntotas de la función.

Asíntotas verticales.

Si $k < 0$ la función no tiene asíntotas verticales. Si $k > 0$ la función tiene dos asíntotas verticales: $x = -\sqrt{k}$ y $x = +\sqrt{k}$.

Asíntota horizontal.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2 - k} = \frac{1}{\infty} = 0$$

Para cualquier valor de k la función tiene una asíntota horizontal: $y = 0$.

Asíntota oblicua.

Al tener asíntota horizontal la función no tiene asíntota oblicua.

- b) Obtenemos los puntos críticos de la función usando la derivada.

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - k} \Rightarrow f'(x) = \frac{0 \cdot (x^2 - k) - 1 \cdot 2x}{(x^2 - k)^2} = \frac{-2x}{(x^2 - k)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-2x}{(x^2 - k)^2} = 0 \Rightarrow -2x = 0 \Rightarrow \boxed{x = 0}$$

La función tiene un punto crítico en $x = 0$. Sustituimos este valor en la segunda derivada para averiguar si es máximo, mínimo o punto de inflexión.

$$f'(x) = \frac{-2x}{(x^2 - k)^2} \Rightarrow f''(x) = \frac{-2(x^2 - k)^2 - (-2x) \cdot 2(x^2 - k)2x}{(x^2 - k)^4} = \frac{-2(x^2 - k) + 8x^2}{(x^2 - k)^3}$$

$$f''(x) = \frac{-2x^2 + 2k + 8x^2}{(x^2 - k)^3} = \frac{6x^2 + 2k}{(x^2 - k)^3} \Rightarrow f''(0) = \frac{6 \cdot 0^2 + 2k}{(0^2 - k)^3} = \frac{2k}{-k^3} = \frac{-2}{k^2} < 0$$

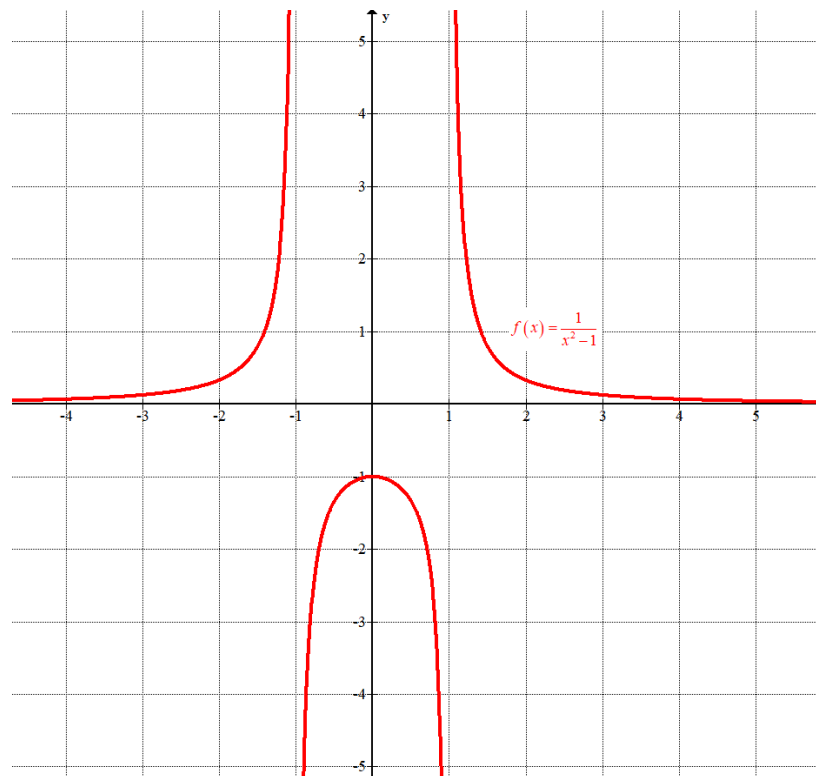
Al ser la segunda derivada negativa la función presenta un máximo relativo en $x = 0$, independientemente del valor de k .

Como $f(0) = \frac{1}{0^2 - k} = \frac{-1}{k}$ el máximo relativo tiene coordenadas $\left(0, \frac{-1}{k}\right)$.

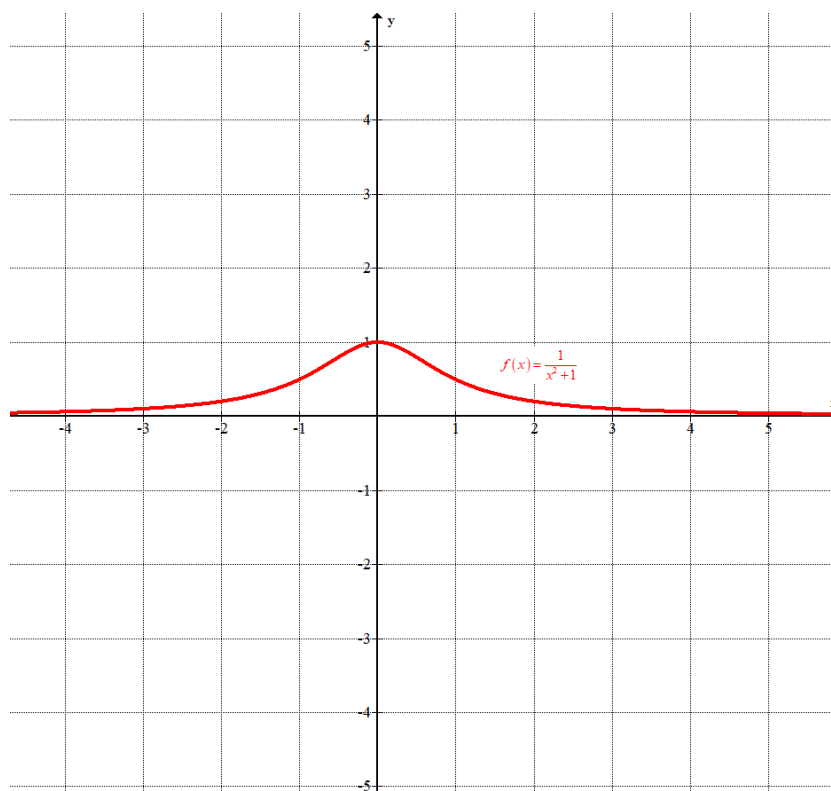
La función no tiene mínimos relativos.

No lo pide, pero representamos la gráfica para $k = 1$ y para $k = -1$.

Para $k = 1$.



Para $k = -1$.



4. Se sabe que el siguiente sistema de ecuaciones lineales tiene una única solución:

$$\begin{cases} x + ay = 1 \\ x + az = 1 \\ y + z = a \end{cases}$$

a) Compruebe que $a \neq 0$. [1 punto]

b) Encuentre la solución del sistema en función del parámetro a . [1 punto]

a) Si el sistema tiene una única solución el determinante de la matriz de coeficientes debe ser no nulo para que su rango sea 3.

La matriz de coeficientes es $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Determinamos la expresión de su determinante.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 0 - 0 - a - a = -2a$$

Para que su determinante sea no nulo debe ser $a \neq 0$.

Con $a \neq 0$ el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada y el número de incógnitas. El sistema tiene una única solución.

b) Si $a \neq 0$ el sistema tiene una única solución. Determinamos la solución usando el método de Cramer.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 1 & 0 & a \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{0 + a^3 + 0 - 0 - a - a}{-2a} = \frac{a^3 - 2a}{-2a} = \frac{a(a^2 - 2)}{-2a} = \frac{2 - a^2}{2}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & a \\ 0 & a & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{1 + 0 + 0 - 0 - 1 - a^2}{-2a} = \frac{-a^2}{-2a} = \frac{a}{2}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{0 + 0 + 1 - 0 - a^2 - 1}{-2a} = \frac{-a^2}{-2a} = \frac{a}{2}$$

La solución del sistema si $a \neq 0$ es $x = \frac{2-a^2}{2}$, $y = \frac{a}{2}$, $z = \frac{a}{2}$.

Si $a = 0$ el sistema queda $\begin{cases} x = 1 \\ x = 1 \\ y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow y = -z \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -\alpha; \alpha \in \mathbb{R} \\ z = \alpha \end{cases}$.

Para $a = 0$ el sistema tiene infinitas soluciones: $x = 1$, $y = -\alpha$, $z = \alpha$, siendo $\alpha \in \mathbb{R}$.

5. Considere las matrices cuadradas de orden 2 de la forma $M = \begin{pmatrix} x & -1 \\ y^2 + 1 & x \end{pmatrix}$, con x e y números reales.

a) Compruebe que la matriz M es siempre invertible, independientemente de los valores de x y de y . [1 punto]

b) Para $x = 1$ e $y = -1$, calcule M^{-1} . [1 punto]

a) Calculamos el determinante de la matriz M .

$$|M| = \begin{vmatrix} x & -1 \\ y^2 + 1 & x \end{vmatrix} = x^2 + y^2 + 1$$

$$\left. \begin{array}{l} x^2 \geq 0 \\ y^2 \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x^2 + y^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + 1 \geq 1$$

Esta expresión del determinante nunca se anula pues cada cuadrado es positivo o cero pero al sumarle 1 siempre dará un resultado mayor o igual que 1. Por tanto, existe la inversa de M para cualquier valor de x e y .

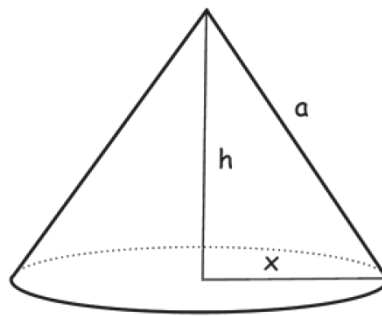
b) Para $x = 1$ e $y = -1$ la matriz queda $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ (-1)^2 + 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Calculamos la inversa de la matriz M .

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 2 = 3 \neq 0$$

$$M^{-1} = \frac{\text{Adj}(M^T)}{|M|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}{3} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ -2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

6. Considere un cono de 120 cm^3 de volumen que tiene una altura h , un radio de la base x y una arista a , como el de la siguiente figura:



a) Compruebe que $a^2 = \frac{360}{\pi} \cdot \frac{1}{h} + h^2$. [1 punto]

- b) Calcule la altura del cono que tiene la arista de longitud mínima. [1 punto]

NOTA: Recuerde que el volumen del cono es un tercio del volumen del cilindro recto que tiene la misma base y la misma altura que el cono.

- a) Considerando el triángulo de hipotenusa “a” y catetos “x” y “h” aplicamos el teorema de Pitágoras.

$$a^2 = x^2 + h^2$$

El volumen de un cilindro es el área de la base (círculo de radio “x”) por la altura (h) $\rightarrow$

$$\text{Volumen cilindro} = \pi x^2 \cdot h$$

Como el volumen del cono tiene un valor de 120 cm^3 aplicamos la fórmula del volumen.

$$\left. \begin{aligned} \text{Volumen cono} &= \frac{\text{Volumen cilindro}}{3} = \frac{\pi x^2 h}{3} \\ \text{Volumen cono} &= 120 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\pi x^2 h}{3} = 120 \Rightarrow x^2 = \frac{120 \cdot 3}{\pi \cdot h} = \frac{360}{\pi \cdot h}$$

Sustituimos en la primera expresión.

$$\left. \begin{aligned} a^2 &= x^2 + h^2 \\ x^2 &= \frac{360}{\pi \cdot h} \end{aligned} \right\} \Rightarrow a^2 = \frac{360}{\pi \cdot h} + h^2$$

- b) Debemos hacer máxima la arista (a). Despejamos en la expresión obtenida.

$$a^2 = \frac{360}{\pi} \cdot \frac{1}{h} + h^2 \Rightarrow a(h) = \sqrt{\frac{360}{\pi} \cdot \frac{1}{h} + h^2}$$

Buscamos los puntos críticos de la función.

$$a(h) = \sqrt{\frac{360}{\pi} \cdot \frac{1}{h} + h^2} \Rightarrow a'(h) = \frac{\frac{360}{\pi} \cdot \frac{-1}{h^2} + 2h}{2\sqrt{\frac{360}{\pi} \cdot \frac{1}{h} + h^2}}$$

$$a'(h) = 0 \Rightarrow \frac{\frac{360}{\pi} \cdot \frac{-1}{h^2} + 2h}{2\sqrt{\frac{360}{\pi} \cdot \frac{1}{h} + h^2}} = 0 \Rightarrow \frac{-360}{\pi h^2} + 2h = 0 \Rightarrow \frac{-360 + 2\pi h^3}{\pi h^2} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -360 + 2\pi h^3 = 0 \Rightarrow 2\pi h^3 = 360 \Rightarrow h^3 = \frac{360}{2\pi} \Rightarrow h = \sqrt[3]{\frac{180}{\pi}} \approx 3.855$$

Estudiamos el signo de la derivada antes y después de este valor $h = \sqrt[3]{\frac{180}{\pi}} \approx 3.855$.

- En el intervalo $(0, 3.855)$ tomamos $h=1$ y la derivada vale

$$a'(1) = \frac{\frac{360}{\pi} \cdot \frac{-1}{1^2} + 2}{2\sqrt{\frac{360}{\pi} \cdot \frac{1}{1} + 1^2}} = \frac{\frac{-360}{\pi} + 2}{2\sqrt{\frac{360}{\pi} + 1}} \approx -5 < 0. \text{ La función decrece en } (0, 3.855).$$

- A partir de $h = \sqrt[3]{\frac{180}{\pi}} \approx 3.855$ consideramos $h=4$ y la derivada vale

$$a'(4) = \frac{\frac{360}{\pi} \cdot \frac{-1}{4^2} + 8}{2\sqrt{\frac{360}{\pi} \cdot \frac{1}{4} + 4^2}} = \frac{\frac{-360}{16\pi} + 8}{2\sqrt{\frac{90}{\pi} + 16}} \approx 0.06 > 0. \text{ La función crece a partir de}$$

$$h = \sqrt[3]{\frac{180}{\pi}} \approx 3.855.$$

Como la función decrece antes y crece después podemos afirmar que para una altura del cono de $h = \sqrt[3]{\frac{180}{\pi}} \approx 3.855$ hay un mínimo de la longitud de la arista.