

## Proves d'accés a la universitat

---

### Matemàtiques

#### Serie 1

---

Responda a CINCO de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué.

Cada cuestión vale 2 puntos.

Puede utilizar calculadora, pero no se autorizará el uso de calculadoras u otros aparatos que permitan almacenar datos o que puedan transmitir o recibir información.

---

1. Sean las matrices  $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ t & 2 \end{pmatrix}$  y  $N = \begin{pmatrix} -1 & t & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ .

a) Calcule  $M \cdot N$  y compruebe que la matriz resultante no es invertible.

[1 punto]

b) Encuentre los valores de  $t$  para los cuales la matriz  $N \cdot M$  es invertible.

[1 punto]

2. Sea  $r$  la recta que pasa por los puntos  $A = (0, 1, 1)$  y  $B = (1, 1, -1)$ .

a) Encuentre la ecuación paramétrica de la recta  $r$ .

[1 punto]

b) Calcule todos los puntos de la recta  $r$  que están a la misma distancia de los planos  $\pi_1: x + y = -2$  y  $\pi_2: x - z = 1$ .

[1 punto]

NOTA: Puede calcular la distancia de un punto de coordenadas  $(x_0, y_0, z_0)$  al plano de

ecuación  $Ax + By + Cz + D = 0$  con la expresión  $\frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$ .

3. Sea la función  $f(x) = x^3 - x^2$ .

a) Encuentre la ecuación de la recta tangente a la gráfica y que es paralela a la recta de ecuación  $x + 3y = 0$ .

[1 punto]

b) Calcule, si existen, los puntos de la gráfica en los que la función presenta un máximo o mínimo relativo o un punto de inflexión.

[1 punto]

4. Considere los puntos  $P = (3, -2, 1)$ ,  $Q = (5, 0, 3)$ ,  $R = (1, 2, 3)$  y la recta  $r: \begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ 2y + 3z - 5 = 0 \end{cases}$ .
- a) Determine la ecuación general (es decir, que tiene la forma  $Ax + By + Cz = D$ ) del plano que pasa por  $P$  y  $Q$  y es paralelo a la recta  $r$ .  
[1 punto]
- b) Dados el plano  $x + 2y + m \cdot z = 7$  y el plano que pasa por  $P$ ,  $Q$  y  $R$ , encuentre  $m$  para que sean paralelos y no coincidentes.  
[1 punto]
5. Sea la función  $f(x) = \sqrt{x} + x - 2$ .
- a) Compruebe que la función  $f(x)$  cumple el enunciado del teorema de Bolzano en el intervalo  $[0, 2]$  y que, por lo tanto, la ecuación  $f(x) = 0$  tiene alguna solución en el intervalo  $(0, 2)$ . Compruebe que  $x = 1$  es una solución de la ecuación  $f(x) = 0$  y razone, teniendo en cuenta el signo de  $f'(x)$ , que la solución es única.  
[1 punto]
- b) A partir del resultado final del apartado anterior, encuentre el área limitada por la gráfica de la función  $f(x)$ , el eje de abscisas y las rectas  $x = 0$  y  $x = 1$ .  
[1 punto]
6. Unos estudiantes de bachillerato han programado una hoja de cálculo como la de la siguiente figura que da la solución de un sistema de ecuaciones compatible determinado de manera automática:

|                                                                                   |   |   |    |    |    |                                 |   |   |                   |   |
|-----------------------------------------------------------------------------------|---|---|----|----|----|---------------------------------|---|---|-------------------|---|
| <div> Liberation Sans 10 <b>N</b> <b>C</b> <b>S</b> <b>A</b> </div>               |   |   |    |    |    |                                 |   |   |                   |   |
| <div> E8 <div> <div>fx</div> <div>Σ</div> <div>=</div> <div>2</div> </div> </div> |   |   |    |    |    |                                 |   |   |                   |   |
|                                                                                   | B | C | D  | E  | F  | G                               | H | I | J                 | K |
| 2                                                                                 |   |   |    |    |    |                                 |   |   |                   |   |
| 3                                                                                 |   |   |    |    |    |                                 |   |   |                   |   |
| 4                                                                                 |   | x | y  | z  |    | sistema: COMPATIBLE DETERMINADO |   |   |                   |   |
| 5                                                                                 |   |   |    |    |    |                                 |   |   |                   |   |
| 6                                                                                 |   | 1 | 2  | -1 | -6 |                                 |   |   | <div>x = 1</div>  |   |
| 7                                                                                 |   | 1 | -1 | -2 | -3 |                                 |   |   | <div>y = -2</div> |   |
| 8                                                                                 |   | 2 | 1  | 2  | 6  |                                 |   |   | <div>z = 3</div>  |   |
| 9                                                                                 |   |   |    |    |    |                                 |   |   |                   |   |
| 10                                                                                |   |   |    |    |    |                                 |   |   |                   |   |
| 11                                                                                |   |   |    |    |    |                                 |   |   |                   |   |
| 12                                                                                |   |   |    |    |    |                                 |   |   |                   |   |

- a) Escriba el sistema y compruebe que los valores propuestos como solución son correctos.  
[1 punto]
- b) ¿Qué valor debería ponerse en lugar del 2 que está enmarcado en la imagen, correspondiente a la celda E8 ( $a_{33}$  de la matriz de coeficientes), para que el sistema fuera incompatible?  
[1 punto]