

SÈRIE 1

Responeu a CINC de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no s'autoritzarà l'ús de calculadores o altres aparells que portin informació emmagatzemada o que puguin transmetre o rebre informació.

Criteris generals per a la correcció:

1. En tots els casos la resolució que fa l'estudiant s'ha de poder seguir i comprendre els passos que fa. **Aquelles respostes, parcials o totals, que no estiguin desenvolupades o no es pugui seguir el com s'ha arribat a donar la resolució seran puntuades amb 0 punts.**
2. La resolució proposada és, en alguns casos, una de les possibles i no és, en principi, única. Per tant, **sempre que l'enunciat ho permeti, en el cas que l'estudiant respongui amb una resolució alternativa totalment correcta se li assignarà el total de puntuació de l'apartat.** Si la resposta és parcial la puntuació obtinguda serà proporcional a la part corresponent de la puntuació total.
3. En alguns casos, la solució final pot admetre **expressions equivalents**. En aquests casos la puntuació serà la totalitat de la puntuació de l'apartat.
4. Tots els exercicis, apartats i passos dins d'un apartat es valoraran amb múltiples de 0,25 punts.
5. **Penalització per errades de càlcul o transcripció:**
 - Si l'errada que es comet no té més transcendència, aleshores NO es descomptarà res de la puntuació parcial de l'apartat.
 - En el cas que l'errada condueixi a derivacions paral·leles de l'enunciat, es valorarà i puntuarà el desenvolupament i coherència de la resolució resultant, i només s'aplicarà una penalització final de 0,25 punts.
 - En cas que l'errada condueixi a no tenir sentit alguna de les qüestions que es demanen, aleshores la puntuació màxima de l'apartat serà de 0,75 punts.
 - Si la resolució d'un apartat conté dues errades la puntuació de l'apartat serà l'acumulada fins al moment previ al cometre la segona errada.

1. Siguin les matrius $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ t & 2 \end{pmatrix}$ i $N = \begin{pmatrix} -1 & t & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Calculeu $M \cdot N$ i comproveu que la matriu resultant no és invertible.

[1 punt]

b) Trobeu els valors de t per als quals la matriu $N \cdot M$ és invertible.

[1 punt]

Resolució:

$$a) M \cdot N = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ t & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & t & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2-t & t^2 & 2t-2 \end{pmatrix}$$

$|M \cdot N| = 2t - t^2 - t^2 + 2t^2 - 2t = 0$ per tant la matriu no és invertible (sigui quin sigui el valor de t).

$$b) N \cdot M = \begin{pmatrix} -1 & t & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ t & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t-1 & 2-t \\ 1-t & 0 \end{pmatrix}$$

$$|N \cdot M| = \begin{vmatrix} 2t-1 & 2-t \\ 1-t & 0 \end{vmatrix} = -(1-t) \cdot (2-t).$$

És immediat veure que el determinant s'anul·la per a $t = 1$ i $t = 2$.

Per tant, la matriu és invertible per a qualsevol valor de t diferent d'1 i 2.

Pautes de correcció:

a)

0,5 punts pel producte.

0,25 punts pel determinant.

0,25 punts per la conclusió.

b)

0,25 punts pel producte.

0,25 punts pel determinant.

0,25 punts pels punts singulars.

0,25 punts per la conclusió.

2. Sigui r la recta que passa pels punts $A = (0, 1, 1)$ i $B = (1, 1, -1)$.

a) Trobeu l'equació paramètrica de la recta r .

[1 punt]

b) Calculeu tots els punts de la recta r que estan a la mateixa distància dels plans

$$\pi_1: x + y = -2 \text{ i } \pi_2: x - z = 1$$

[1 punt]

Nota: Podeu calcular la distància d'un punt de coordenades (x_0, y_0, z_0) al pla

d'equació $Ax + By + Cz + D = 0$ amb l'expressió $\frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

Resolució:

a) Recta per $A = (0, 1, 1)$ i $B = (1, 1, -1)$. Si agafem com a punt per on ha de passar la recta el punt A i com a vector director el vector $\overrightarrow{AB} = B - A = (1, 0, -2)$

$$(x, y, z) = (0, 1, 1) + t(1, 0, -2).$$

En forma paramètrica serà:

$$\begin{cases} x = t \\ y = 1 \\ z = 1 - 2t \end{cases}$$

o equivalentment $(x, y, z) = (t, 1, 1 - 2t)$.

b) Plantegem la igualtat de les dues distàncies a partir dels punts de la recta en forma paramètrica:

$$\frac{|t + 1 + 2|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2}} = \frac{|t - 1 + 2t - 1|}{\sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2}}$$

Eliminem els denominadors perquè són iguals i ens queda

$$|t + 3| = |3t - 2|$$

D'aquí obtenim dues possibilitats:

$$\bullet \quad t + 3 = 3t - 2 \Rightarrow t = \frac{5}{2} \Rightarrow P_1 = \left(\frac{5}{2}, 1, -4\right)$$

$$\bullet \quad t + 3 = -3t + 2 \Rightarrow t = -\frac{1}{4} \Rightarrow P_2 = \left(-\frac{1}{4}, 1, \frac{3}{2}\right)$$

Pautes de correcció:

a)

0,5 punts pel plantejament de punt i vector.

0,5 punts per l'equació en forma paramètrica.

b)

0,25 punts per la igualtat de distàncies a partir de la fórmula.

0,25 punts pels càlculs preliminars.

0,25 punts pel primer punt.

0,25 punts pel segon punt.

3. Sigui la funció $f(x) = x^3 - x^2$.

a) Trobeu l'equació de la recta tangent a la gràfica i que és paral·lela a la recta d'equació $x + 3y = 0$.

[1 punt]

b) Calculeu, si n'hi ha, els punts de la gràfica en què la funció presenta un màxim o mínim relatiu o un punt d'inflexió.

[1 punt]

Resolució:

a) El pendent de la recta $x + 3y = 0$, és a dir $y = (-1/3)x$, és $-1/3$. Per a trobar una recta tangent paral·lela, cal trobar els punts en què la derivada de la funció és igual a $-1/3$.

$$f'(x) = 3x^2 - 2x$$

$$3x^2 - 2x = -\frac{1}{3}, \text{ per tant } 9x^2 - 6x + 1 = 0.$$

$$\text{Resolent l'equació de segon grau, obtenim } x = \frac{1}{3}.$$

Per a trobar la recta tangent demanada:

$$f'\left(\frac{1}{3}\right) = 3 \cdot \frac{1}{9} - 2 \cdot \frac{1}{3} = -\frac{1}{3} \text{ (com ja sabíem)}$$

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{27} - \frac{1}{9} = -\frac{2}{27}$$

L'equació de la recta tangent és: $y + \frac{2}{27} = -\frac{1}{3}\left(x - \frac{1}{3}\right)$ o, desenvolupant,

$$\boxed{y = -\frac{x}{3} + \frac{1}{27}}, \text{ o alternativament, } \boxed{9x + 27y = 1}.$$

b) Per a calcular els punts de màxim o mínim i les inflexions ens cal tenir les derivades

$$f(x) = x^3 - x^2$$

$$f'(x) = 3x^2 - 2x$$

$$f''(x) = 6x - 2$$

Per a calcular els candidats a màxim o mínim, resollem $f'(x)=0$, i obtenim $x = 0$ i $x = \frac{2}{3}$

Per a classificar aquest els punts singulars, els substituïm a la derivada segona:

$f''(0) = -2 < 0$, per tant, en $x = 0$ la funció té un màxim relatiu, $M = (0,0)$.

$f''\left(\frac{2}{3}\right) = 2 > 0$, per tant, en $x = \frac{2}{3}$ la funció té un mínim relatiu, $m = \left(\frac{2}{3}, -\frac{4}{27}\right)$.

Per a obtenir els candidats a inflexió, resollem $f''(x)=0$, i obtenim $x = \frac{1}{3}$.

Per a decidir si és inflexió, mirem el signe de la derivada segona a l'entorn de l'abscissa $x = \frac{1}{3}$.

$$f''(x) = 6x - 2$$

$$\left(-\infty, \frac{1}{3}\right), \quad f'' < 0,$$

$$\left(\frac{1}{3}, +\infty\right), \quad f'' > 0,$$

per tant, en $x = \frac{1}{3}$ hi ha un canvi de concavitat i, per tant, en aquest punt tenim l'única inflexió, $I = \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{27}\right)$.

Observació: A l'enunciat es demana “els punts de la gràfica”, per tant, cal explicitar l'abscissa i l'ordenada dels punts. En el cas de contestar correctament només les abscisses, s'aplicarà **només una vegada** la penalització de 0,25 punts.

Pautes de correcció:

a)

0,25 punts pel pendent de la recta proposada.

0,25 punts per la derivada primera i el punt en què cal fer la recta tangent.

0,25 punts per la fórmula de la recta tangent (sigui en general o aplicada al cas).

0,25 punts per l'expressió de la recta tangent.

b)

0,25 punts per les derivades.

0,25 punts pel màxim relatiu.

0,25 punts pel mínim relatiu.

0,25 punts per la inflexió.

4. Considereu els punts $P = (3, -2, 1)$, $Q = (5, 0, 3)$, $R = (1, 2, 3)$ i la recta

$$r: \begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ 2y + 3z - 5 = 0 \end{cases}$$

a) Determineu l'equació general (és a dir, la que té la forma $Ax + By + Cz = D$) del pla que passa per P i Q i és paral·lel a la recta r .

[1 punt]

b) Donats el pla $x + 2y + mz = 7$ i el pla que passa per P, Q i R, trobeu m perquè siguin paral·lels i no coincidents.

[1 punt]

Resolució:

a) Un vector direcció de r és: $(1, 1, 0) \times (0, 2, 3) = \begin{vmatrix} i & 1 & 0 \\ j & 1 & 2 \\ k & 0 & 3 \end{vmatrix} = (3, -3, 2)$.

El vector $\overrightarrow{PQ} = Q - P = (2, 2, 2)$ o equivalentment $(1, 1, 1)$.

Busquem un pla paral·lel als dos vectors que acabem de calcular, $(3, -3, 2)$ i $(1, 1, 1)$.

Per tant, un vector normal del pla que busquem serà

$$\vec{n} = (3, -3, 2) \times (1, 1, 1) = (5, 1, -6).$$

L'equació del pla que passa per P i té vector normal $\vec{n}$ és:

$$5(x - 3) + (y + 2) - 6(z - 1) = 0.$$

La seva equació general és $\boxed{5x + y - 6z = 7}$.

b) Calculem el vector $\overrightarrow{PQ} = Q - P = (2, 2, 2)$ o equivalentment $(1, 1, 1)$ (si no s'ha fet en l'apartat anterior)

I el vector $\overrightarrow{PR} = R - P = (-2, 4, 2)$ o equivalentment $(-1, 2, 1)$.

Calculem el vector normal al pla: $\vec{n} = (1, 1, 1) \times (-1, 2, 1) = (-1, -2, 3)$.

Perquè els dos plans siguin paral·lels cal que els respectius vectors normals siguin proporcional, és a dir, que $\frac{1}{-1} = \frac{2}{-2} = \frac{m}{3}$. Per tant, $\boxed{m = -3}$.

Comprovem que els plans no són coincidents perquè el punt P, per exemple, no hi pertany, $x + 2y - 3z \neq 7$; efectivament $3 - 4 - 3 \neq 7$.

Observació: La comprovació de la no coincidència dels plans es pot provar també a partir de la no proporcionalitat dels termes independents.

Pautes de correcció:

a)

0,25 punts pel vector director de la recta r .

0,25 punts pel vector que uneix P i Q.

0,25 punts pel plantejament de l'equació general.

0,25 punts pel càlcul final.

b)

0,25 punts pel vector normal del pla.

0,25 punts pel plantejament del paral·lelisme a partir de la proporcionalitat.

0,25 punts pel valor de m .

0,25 punts per la comprovació que els plans no són el mateix.

5. Sigui la funció $f(x) = \sqrt{x} + x - 2$.

- a) Comproveu que la funció $f(x)$ compleix l'enunciat del teorema de Bolzano a l'interval $[0, 2]$ i que, per tant, l'equació $f(x) = 0$ té alguna solució a l'interval $(0, 2)$. Comproveu que $x = 1$ és una solució de l'equació $f(x) = 0$ i raoneu, tenint en compte el signe de $f'(x)$, que la solució és única.

[1 punt]

- b) A partir del resultat final de l'apartat anterior, trobeu l'àrea limitada per la gràfica de la funció $f(x)$, l'eix de les abscisses i les rectes $x = 0$ i $x = 1$.

[1 punt]

Resolució:

a)

La funció $f(x)$ és contínua en l'interval tancat $[0, 2]$ per tractar-se de suma de funcions contínues en el seu domini com són la funció arrel quadrada i les funcions polinòmiques.

Els valors en els extrems $f(0) = -2 < 0$ i $f(2) = \sqrt{2} > 0$ tenen signe diferent, és a dir, $f(0) \cdot f(2) < 0$, per tant, sí que es compleixen les condicions del teorema de Bolzano.

Així doncs, la funció canvia de signe dins l'interval indicat i, per tant, aplicant el teorema de Bolzano, com a mínim existeix un punt dins l'interval obert $(0, 2)$ en què la seva imatge és zero.

$f(1) = 1 + 1 - 2 = 0$ i, per tant, efectivament $x = 1$ és solució de l'equació $f(x) = 0$.

La funció derivada $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + 1 > 0$ és positiva en tot el domini de la funció i per tant la funció $f(x)$ és estrictament creixent i, per tant, després de tallar l'eix de les abscisses una vegada, la gràfica no pot tornar-lo a tallar.

b)

Com que $x = 1$ és l'únic punt en què la funció talla l'eix de les abscisses, la funció $f(x)$ té signe constant en l'interval $(0,1)$ i, per tant, l'àrea que es demana es pot calcular amb

$$A = \left| \int_0^1 (\sqrt{x} + x - 2) \, dx \right| = \left| \left(\frac{x^{3/2}}{3/2} + \frac{x^2}{2} - 2x \right) \right|_0^1 = \left| \frac{2}{3} + \frac{1}{2} - 2 \right| = \left| \frac{-5}{6} \right| = \boxed{\frac{5}{6} u^2}$$

Observació: També es donarà per bona la resolució si l'estudiant planteja la integral sense el valor absolut i canvia el signe després d'haver vist el resultat negatiu. Es penalitzarà donar com a resposta de l'àrea un valor negatiu.

Pautes de correcció:***a)***

0,25 punts per la continuïtat de la funció i les imatges en els extrems.

0,25 punts per l'argumentació del signe diferent i conclusió d'existència de solució.

0,25 punts per la comprovació en $x = 1$ i la derivada de la funció.

0,25 punts per l'argument de monotonia de la funció i unicitat de la solució.

b)

0,25 punts per l'argumentació del signe constant.

0,25 punts pel plantejament de la integral.

0,25 punts per la primitiva.

0,25 punts per l'aplicació de la regla de Barrow i el càlcul final.

6. Uns estudiants de batxillerat han programat un full de càlcul que dona la solució d'un sistema d'equacions compatible determinat de manera automàtica, com el de la figura següent:

The screenshot shows a spreadsheet with the following content:

	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
2										
3										
4		x	y	z						sistema: COMPATIBLE DETERMINAT
5										
6		1	2	-1	-6					x=1
7		1	-1	-2	-3					y=-2
8		2	1	2	6					z=3
9										
10										
11										
12										

- a) Escriviu el sistema i comproveu que els valors proposats com a solució són correctes.
[1 punt]
- b) Quin valor s'hauria de posar en lloc del 2 que està emmarcat en la imatge, corresponent a la cel·la E8 (a_{33} de la matriu de coeficients), perquè el sistema fos incompatible?
[1 punt]

Resolució:

a)

El sistema és $\begin{cases} x + 2y - z = -6 \\ x - y - 2z = -3 \\ 2x + y + 2z = 6 \end{cases}$ i la solució $\begin{cases} 1 + 2 \cdot (-2) - 3 = -6 \\ 1 - (-2) - 2 \cdot 3 = -3 \\ 2 \cdot 1 + (-2) + 2 \cdot 3 = 6 \end{cases}$ és correcta.

b)

Estudiem el rang de la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & t \end{pmatrix}$ segons el paràmetre t :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & t \end{vmatrix} = -t - 8 - 1 - 2 + 2 - 2t = -3t - 9; \quad -3t - 9 \neq 0,$$

és a dir, $t \neq -3$ tenim rang $A=3$ i, per tant, rang màxim i el sistema seria compatible determinat.

Què passa quan $t = -3$?

Com que $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$, aleshores, rang $A = 2$.

Estudiem el rang de la matriu ampliada: $A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -6 \\ 1 & -1 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & -3 & 6 \end{pmatrix}$.

Sempre tenim el menor: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -6 \\ 1 & -1 & -3 \\ 2 & 1 & 6 \end{vmatrix} = -6 - 12 - 6 - 12 + 3 - 12 \neq 0$, per tant, el rang de la matriu ampliada és 3.

Tenim, doncs, rang $A = 2$ i rang $A' = 3$, per tant, el sistema és incompatible.

Aleshores el valor 2 emmarcat s'hauria de canviar per un -3.

Pautes de correcció:

a)

0,5 punts pel sistema.

0,5 punts per la comprovació de la solució.

b)

0,25 punts pel plantejament del sistema parametritzat.

0,25 punts pel punt singular.

0,25 punts per la discussió del cas $t \neq -3$

0,25 punts per la discussió del cas $t = -3$ i la conclusió final.