



Proves d'accés a la universitat

Matemàtiques

Serie 1

Responda a CINCO de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué.

Cada cuestión vale 2 puntos.

Puede utilizar calculadora, pero no se autorizará el uso de calculadoras u otros aparatos que permitan almacenar datos o que puedan transmitir o recibir información.

1. Sean las matrices $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ t & 2 \end{pmatrix}$ y $N = \begin{pmatrix} -1 & t & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Calcule $M \cdot N$ y compruebe que la matriz resultante no es invertible.

[1 punto]

b) Encuentre los valores de t para los cuales la matriz $N \cdot M$ es invertible.

[1 punto]

2. Sea r la recta que pasa por los puntos $A = (0, 1, 1)$ y $B = (1, 1, -1)$

a) Encuentre la ecuación paramétrica de la recta r .

[1 punto]

b) Calcule todos los puntos de la recta r que están a la misma distancia de los planos $\pi_1: x + y = -2$ y $\pi_2: x - z = 1$.

[1 punto]

NOTA: Puede calcular la distancia de un punto de coordenadas (x_0, y_0, z_0) al plano de

ecuación $Ax + By + Cz + D = 0$ con la expresión $\frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

3. Sea la función $f(x) = x^3 - x^2$.

a) Encuentre la ecuación de la recta tangente a la gráfica y que es paralela a la recta de ecuación $x + 3y = 0$.

[1 punto]

b) Calcule, si existen, los puntos de la gráfica en los que la función presenta un máximo o mínimo relativo o un punto de inflexión.

[1 punto]

4. Considere los puntos $P = (3, -2, 1)$, $Q = (5, 0, 3)$, $R = (1, 2, 3)$ y la recta $r: \begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ 2y + 3z - 5 = 0 \end{cases}$.

- a) Determine la ecuación general (es decir, que tiene la forma $Ax + By + Cz = D$) del plano que pasa por P y Q y es paralelo a la recta r .
[1 punto]
- b) Dados el plano $x + 2y + m \cdot z = 7$ y el plano que pasa por P , Q y R , encuentre m para que sean paralelos y no coincidentes.
[1 punto]

5. Sea la función $f(x) = \sqrt{x} + x - 2$.

- a) Compruebe que la función $f(x)$ cumple el enunciado del teorema de Bolzano en el intervalo $[0, 2]$ y que, por lo tanto, la ecuación $f(x) = 0$ tiene alguna solución en el intervalo $(0, 2)$. Compruebe que $x = 1$ es una solución de la ecuación $f(x) = 0$ y razone, teniendo en cuenta el signo de $f'(x)$, que la solución es única.
[1 punto]
- b) A partir del resultado final del apartado anterior, encuentre el área limitada por la gráfica de la función $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = 0$ y $x = 1$.
[1 punto]

6. Unos estudiantes de bachillerato han programado una hoja de cálculo como la de la siguiente figura que da la solución de un sistema de ecuaciones compatible determinado de manera automática:

	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
2										
3										
4	x	y	z							
5				sistema: COMPATIBLE DETERMINADO						
6	1	2	-1	-6						
7	1	-1	-2	-3						
8	2	1	2	6						
9										
10										
11										
12										

- a) Escriba el sistema y compruebe que los valores propuestos como solución son correctos.
[1 punto]
- b) ¿Qué valor debería ponerse en lugar del 2 que está enmarcado en la imagen, correspondiente a la celda E8 (a_{33} de la matriz de coeficientes), para que el sistema fuera incompatible?
[1 punto]

SOLUCIONES

1. Sean las matrices $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ t & 2 \end{pmatrix}$ y $N = \begin{pmatrix} -1 & t & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Calcule $M \cdot N$ y compruebe que la matriz resultante no es invertible. [1 punto]

b) Encuentre los valores de t para los cuales la matriz $N \cdot M$ es invertible. [1 punto]

a) Determinamos la expresión de la matriz $M \cdot N$.

$$M \cdot N = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ t & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & t & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+2 & t+0 & 2-2 \\ 0-1 & 0+0 & 0+1 \\ -t+2 & t^2+0 & 2t-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2-t & t^2 & 2t-2 \end{pmatrix}$$

$$3 \times \boxed{2 \cdot 2} \times 3 \longrightarrow 3 \times 3$$

Calculamos el valor de su determinante.

$$|M \cdot N| = \begin{vmatrix} 1 & t & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2-t & t^2 & 2t-2 \end{vmatrix} = 0 + t(2-t) + 0 - 0 + t(2t-2) - t^2 = 2t - t^2 + 2t^2 - 2t - t^2 = 0$$

Al tener un valor nulo el determinante la matriz $M \cdot N$ no tiene inversa.

b) Determinamos la expresión de la matriz $N \cdot M$.

$$N \cdot M = \begin{pmatrix} -1 & t & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ t & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+0+2t & -2-t+4 \\ 1+0-t & 2-0-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t-1 & 2-t \\ 1-t & 0 \end{pmatrix}$$

$$2 \times \boxed{3 \cdot 3} \times 2 \longrightarrow 2 \times 2$$

Calculamos el valor de su determinante.

$$|N \cdot M| = \begin{vmatrix} 2t-1 & 2-t \\ 1-t & 0 \end{vmatrix} = -(2-t)(1-t)$$

Este determinante se anula para $t=2$ y $t=1$.

La matriz $N \cdot M$ es invertible para cualquier valor de t distinto de 1 y de 2.

2. Sea r la recta que pasa por los puntos $A = (0, 1, 1)$ y $B = (1, 1, -1)$

a) Encuentre la ecuación paramétrica de la recta r . [1 punto]

b) Calcule todos los puntos de la recta r que están a la misma distancia de los planos $\pi_1 : x + y = -2$ y $\pi_2 : x - z = 1$. [1 punto]

NOTA: Puede calcular la distancia de un punto de coordenadas (x_0, y_0, z_0) al plano de ecuación

$$Ax + By + Cz + D = 0 \text{ con la expresión } \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

a) Hallamos la ecuación de la recta.

$$\left. \begin{array}{l} A(0,1,1) \in r \\ B(1,1,-1) \in r \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{v}_r = \overrightarrow{AB} = (1,1,-1) - (0,1,1) = (1,0,-2) \quad \left. \begin{array}{l} A(0,1,1) \in r \end{array} \right\} \Rightarrow r : \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 \\ z = 1 - 2\lambda \end{cases}; \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\text{La ecuación paramétrica de la recta } r \text{ tiene la expresión: } r : \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 \\ z = 1 - 2\lambda \end{cases}; \lambda \in \mathbb{R}.$$

b) Un punto P perteneciente a la recta tiene las coordenadas $P(\lambda, 1, 1 - 2\lambda)$.

Calculamos la expresión de la distancia del punto P a cada uno de los planos e igualamos dichas expresiones.

$$\left. \begin{array}{l} P(\lambda, 1, 1 - 2\lambda) \\ \pi_1 : x + y + 2 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow d(P, \pi_1) = \frac{|\lambda + 1 + 2|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2}} = \frac{|\lambda + 3|}{\sqrt{2}}$$

$$\left. \begin{array}{l} P(\lambda, 1, 1 - 2\lambda) \\ \pi_2 : x - z - 1 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow d(P, \pi_2) = \frac{|\lambda - 1 + 2\lambda - 1|}{\sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2}} = \frac{|3\lambda - 2|}{\sqrt{2}}$$

$$d(P, \pi_1) = d(P, \pi_2) \Rightarrow \frac{|\lambda + 3|}{\sqrt{2}} = \frac{|3\lambda - 2|}{\sqrt{2}} \Rightarrow |\lambda + 3| = |3\lambda - 2| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda + 3 = 3\lambda - 2 \rightarrow 5 = 2\lambda \rightarrow \boxed{\lambda = \frac{5}{2}} \\ \lambda + 3 = -(3\lambda - 2) \rightarrow \lambda + 3 = -3\lambda + 2 \rightarrow 4\lambda = -1 \rightarrow \boxed{\lambda = -\frac{1}{4}} \end{cases}$$

Tenemos dos puntos que cumplen lo pedido.

Para $\lambda = \frac{5}{2}$ el punto es $P_1\left(\frac{5}{2}, 1, -4\right)$.

Para $\lambda = -\frac{1}{4}$ el punto es $P_2\left(-\frac{1}{4}, 1, \frac{3}{2}\right)$.

3. Sea la función $f(x) = x^3 - x^2$.

a) Encuentre la ecuación de la recta tangente a la gráfica y que es paralela a la recta de ecuación $x + 3y = 0$. [1 punto]

b) Calcule, si existen, los puntos de la gráfica en los que la función presenta un máximo o mínimo relativo o un punto de inflexión. [1 punto]

a) Si la recta tangente a la gráfica en $x = a$ es paralela a la recta de ecuación $x + 3y = 0$ entonces tiene la misma pendiente que la recta $x + 3y = 0 \rightarrow 3y = -x \rightarrow y = -\frac{1}{3}x$, siendo su pendiente $-\frac{1}{3}$.

La derivada de la función en $x = a$ debe valer $-\frac{1}{3}$.

$$\left. \begin{aligned} f(x) = x^3 - x^2 &\Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 2x \\ f'(a) &= -\frac{1}{3} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{-1}{3} = 3a^2 - 2a \Rightarrow -1 = 9a^2 - 6a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9a^2 - 6a + 1 = 0 \Rightarrow a = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 9 \cdot 1}}{2 \cdot 9} = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$$

La recta tangente a la gráfica que cumple lo pedido es tangente en $x = \frac{1}{3}$.

Hallamos la ecuación de esta recta tangente.

$$\left. \begin{aligned} f\left(\frac{1}{3}\right) &= \left(\frac{1}{3}\right)^3 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{-2}{27} \\ f'\left(\frac{1}{3}\right) &= -\frac{1}{3} \end{aligned} \right\} \Rightarrow y + \frac{2}{27} = \frac{-1}{3}\left(x - \frac{1}{3}\right) \Rightarrow y + \frac{2}{27} = \frac{-1}{3}x + \frac{1}{9} \Rightarrow \boxed{y = \frac{-1}{3}x + \frac{1}{27}}$$

$$y - f\left(\frac{1}{3}\right) = f'\left(\frac{1}{3}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right)$$

La recta buscada tiene ecuación $y = \frac{-1}{3}x + \frac{1}{27}$.

b) Hallamos los puntos críticos de la función usando la derivada.

$$\left. \begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 2x \\ f'(x) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 3x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(3x - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x = 0} \\ 3x - 2 = 0 \rightarrow 3x = 2 \rightarrow \boxed{x = \frac{2}{3}} \end{cases}$$

Estudiamos el signo de la segunda derivada en cada uno de los puntos críticos.

$$f'(x) = 3x^2 - 2x \Rightarrow f''(x) = 6x - 2 \Rightarrow \begin{cases} f''(0) = -2 < 0 \rightarrow \text{Máximo} \\ f''\left(\frac{2}{3}\right) = 6\left(\frac{2}{3}\right) - 2 = 2 > 0 \rightarrow \text{Mínimo} \end{cases}$$

La función tiene un máximo relativo en $x=0$ y un mínimo relativo en $x=\frac{2}{3}$.

Como $f(0) = 0^3 - 0^2 = 0$ el máximo relativo tiene coordenadas $A(0,0)$.

Como $f\left(\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{-4}{27}$ el mínimo relativo tiene coordenadas $B\left(\frac{2}{3}, \frac{-4}{27}\right)$.

Buscamos los posibles puntos de inflexión averiguando cuando se anula la segunda derivada.

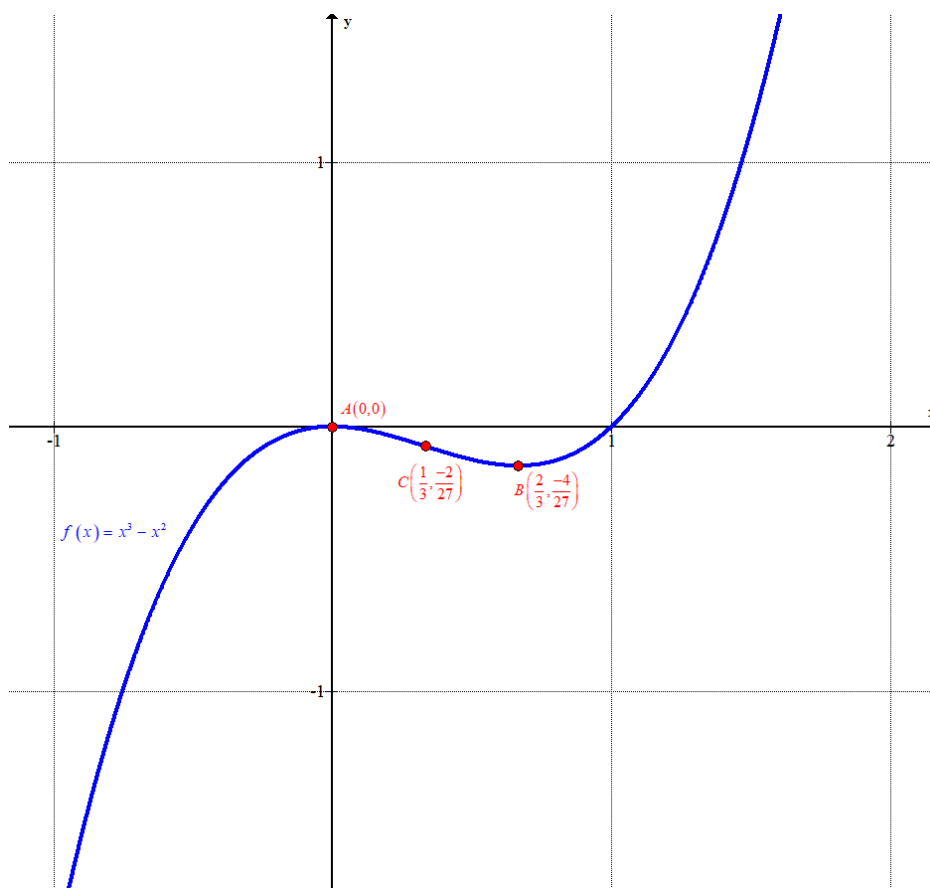
$$\begin{cases} f''(x) = 6x - 2 \\ f''(x) = 0 \end{cases} \Rightarrow 6x - 2 = 0 \Rightarrow 6x = 2 \Rightarrow x = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Comprobamos que la derivada tercera no se anula para $x = \frac{1}{3}$.

$$f''(x) = 6x - 2 \Rightarrow f'''(x) = 6 \Rightarrow f'''(\frac{1}{3}) = 6 \neq 0$$

La función presenta un punto de inflexión en $x = \frac{1}{3}$.

Como $f\left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{-2}{27}$ el punto de inflexión tiene coordenadas $C\left(\frac{1}{3}, \frac{-2}{27}\right)$.



4. Considere los puntos $P = (3, -2, 1)$, $Q = (5, 0, 3)$, $R = (1, 2, 3)$ y la recta $r: \begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ 2y + 3z - 5 = 0 \end{cases}$.
- a) Determine la ecuación general (es decir, que tiene la forma $Ax + By + Cz = D$) del plano que pasa por P y Q y es paralelo a la recta r . [1 punto]
- b) Dados el plano $x + 2y + m \cdot z = 7$ y el plano que pasa por P , Q y R , encuentre m para que sean paralelos y no coincidentes. [1 punto]

a) Si el plano es paralelo a la recta el vector director de la recta es un vector director del plano. Otro vector director del plano es $\overrightarrow{PQ}$.

Hallamos un vector director de la recta como el producto vectorial de los vectores normales de los planos que la definen.

$$r: \begin{cases} x + y + 1 = 0 \rightarrow \vec{n} = (1, 1, 0) \\ 2y + 3z - 5 = 0 \rightarrow \vec{n} = (0, 2, 3) \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_r = \vec{n} \times \vec{n} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 3i + 2k - 3j = (3, -3, 2)$$

Hallamos la ecuación del plano pedido-

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} = \overrightarrow{PQ} = (5, 0, 3) - (3, -2, 1) = (2, 2, 2) \\ \vec{v} = \vec{v}_r = (3, -3, 2) \\ Q(5, 0, 3) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \pi: \begin{vmatrix} x-5 & y & z-3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4(x-5) + 6y - 6(z-3) - 6(z-3) - 4y + 6(x-5) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4x - 20 + 6y - 6z + 18 - 6z + 18 - 4y + 6x - 30 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 10x + 2y - 12z - 14 = 0 \Rightarrow \boxed{\pi: 5x + y - 6z - 7 = 0}$$

El plano buscado tiene ecuación $\pi: 5x + y - 6z - 7 = 0$.

b) Hallamos la ecuación del plano que contiene a los puntos P , Q y R .

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} = \overrightarrow{PQ} = (5, 0, 3) - (3, -2, 1) = (2, 2, 2) \\ \vec{v} = \overrightarrow{PR} = (1, 2, 3) - (3, -2, 1) = (-2, 4, 2) \\ Q(5, 0, 3) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \pi': \begin{vmatrix} x-5 & y & z-3 \\ 2 & 2 & 2 \\ -2 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4x - 20 - 4y + 8z - 24 + 4z - 12 - 4y - 8x + 40 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -4x - 8y + 12z - 16 = 0 \Rightarrow \boxed{\pi': x + 2y - 3z + 4 = 0}$$

Para que sean paralelos los planos $x + 2y + m \cdot z = 7$ y $\pi': x + 2y - 3z = -4$ deben tener vectores normales que indiquen la misma dirección, es decir, con coordenadas proporcionales.

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y + m \cdot z = 7 \rightarrow \vec{n} = (1, 2, m) \\ \pi': x + 2y - 3z + 4 = 0 \rightarrow \vec{n}' = (1, 2, -3) \\ \vec{n} \parallel \vec{n}' \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{1} = \frac{2}{2} = \frac{m}{-3} \Rightarrow \boxed{m = -3}$$

Para $m = -3$ los planos son paralelos o coincidentes.

Para este valor los planos son $x + 2y - 3z = 7$ y $\pi': x + 2y - 3z = -4$. Se observa que no son coincidentes y por tanto son paralelos.

5. Sea la función $f(x) = \sqrt{x} + x - 2$.

a) Compruebe que la función $f(x)$ cumple el enunciado del teorema de Bolzano en el intervalo $[0, 2]$ y que, por lo tanto, la ecuación $f(x) = 0$ tiene alguna solución en el intervalo $(0, 2)$. Compruebe que $x = 1$ es una solución de la ecuación $f(x) = 0$ y razone, teniendo en cuenta el signo de $f'(x)$, que la solución es única. [1 punto]

b) A partir del resultado final del apartado anterior, encuentre el área limitada por la gráfica de la función $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = 0$ y $x = 1$. [1 punto]

a) La función $f(x) = \sqrt{x} + x - 2$ es continua en el intervalo $[0, 2]$ pues $x \geq 0$ y por tanto existe la raíz cuadrada.

Tenemos que $f(0) = \sqrt{0} + 0 - 2 = -2 < 0$ y $f(2) = \sqrt{2} + 2 - 2 = \sqrt{2} > 0$. La función toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo $[0, 2]$.

Se cumplen los requisitos del teorema de Bolzano y podemos aplicarlo a la función $f(x) = \sqrt{x} + x - 2$ en el intervalo $[0, 2]$ y afirmar que existe $c \in (0, 2)$ tal que $f(c) = 0$.

Comprobamos que $f(1) = 0$.

$$f(1) = \sqrt{1} + 1 - 2 = 1 + 1 - 2 = 0$$

Calculamos la derivada de la función.

$$f(x) = \sqrt{x} + x - 2 \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + 1$$

En el intervalo $[0, 2]$ la derivada siempre es positiva, por lo que la función es creciente en dicho intervalo. Como $f(0) = -2 < 0$, $f(1) = 0$ y $f(2) = \sqrt{2} > 0$ no puede existir en el intervalo otra solución de la ecuación $f(x) = 0$.

b) Como la función solo corta el eje de abscisas en $x = 1$ y toma valores negativos entre 0 y 1 el área limitada por la gráfica de la función $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = 0$ y $x = 1$ es el valor absoluto de la integral definida de la función entre 0 y 1.

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x) dx &= \int_0^1 \sqrt{x} + x - 2 dx = \int_0^1 x^{1/2} + x - 2 dx = \left[\frac{x^{3/2}}{3/2} + \frac{x^2}{2} - 2x \right]_0^1 = \\ &= \left[\frac{1^{3/2}}{3/2} + \frac{1^2}{2} - 2 \cdot 1 \right] - \left[\frac{0^{3/2}}{3/2} + \frac{0^2}{2} - 2 \cdot 0 \right] = \frac{2}{3} + \frac{1}{2} - 2 = \boxed{\frac{-5}{6} \approx -0.833} \end{aligned}$$

El área limitada por la gráfica de la función $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = 0$ y $x = 1$ tiene un valor de $\frac{5}{6} \approx 0.833$ unidades cuadradas.

6. Unos estudiantes de bachillerato han programado una hoja de cálculo como la de la siguiente figura que da la solución de un sistema de ecuaciones compatible determinado de manera automática:

	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
2										
3										
4		x	y	z						
5						sistema: COMPATIBLE DETERMINADO				
6			1	2	-1	-6				x=1
7			1	-1	-2	-3				y=-2
8			2	1	2	6				z=3
9										
10										
11										
12										

- a) Escriba el sistema y compruebe que los valores propuestos como solución son correctos.
[1 punto]
- b) ¿Qué valor debería ponerse en lugar del 2 que está enmarcado en la imagen, correspondiente a la celda E8 (a_{33} de la matriz de coeficientes), para que el sistema fuera incompatible?
[1 punto]

a) Obtenemos el sistema de ecuaciones con matriz ampliada $A/B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -6 \\ 1 & -1 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$.

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -6 \\ 1 & -1 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y - z = -6 \\ x - y - 2z = -3 \\ 2x + y + 2z = 6 \end{cases}$$

Comprobamos que la solución del sistema es $x=1, y=-2, z=3$ sustituyendo estos valores en el sistema y viendo que se cumplen las tres igualdades.

$$\begin{cases} x + 2y - z = -6 \\ x - y - 2z = -3 \\ 2x + y + 2z = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 + 2(-2) - 3 = -6 \\ 1 - (-2) - 2 \cdot 3 = -3 \\ 2 \cdot 1 - 2 + 2 \cdot 3 = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 - 4 - 3 = -6 \\ 1 + 2 - 6 = -3 \\ 2 - 2 + 6 = 6 \end{cases}$$

Se cumplen las tres igualdades y la solución del sistema es correcta.

- b) Cambiamos el valor 2 por un parámetro m .

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -6 \\ 1 & -1 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & m & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y - z = -6 \\ x - y - 2z = -3 \\ 2x + y + mz = 6 \end{cases}$$

Para ser incompatible debe ser nulo el determinante de la matriz de coeficientes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & m \end{pmatrix}.$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & m \end{vmatrix} = -m - 8 - 1 - 2 - 2m + 2 = -3m - 9$$

$$|A| = 0 \Rightarrow -3m - 9 = 0 \Rightarrow 3m = -9 \Rightarrow \boxed{m = \frac{-9}{3} = -3}$$

Para $m = -3$ el determinante de A es nulo y su rango no es 3. Su rango es 2 pues podemos considerar el menor de orden 2 que resulta de quitar la columna y fila terceras.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 2 = -3 \neq 0$$

Como tiene un valor no nulo el rango de A es 2.

Para $m = -3$ determinamos el rango de la matriz ampliada $A/B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -6 \\ 1 & -1 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & -3 & 6 \end{pmatrix}.$

Consideramos el menor de orden 3 que resulta de quitar la tercera columna.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -6 \\ 1 & -1 & -3 \\ 2 & 1 & 6 \end{vmatrix} = -6 - 12 - 6 - 12 - 12 + 3 = -45 \neq 0$$

Como el determinante del menor de orden 3 de la matriz A/B es no nulo su rango es 3.

El rango de la matriz de coeficientes A es 2 distinto del rango de la matriz ampliada A/B, por lo que el sistema es incompatible para $m = -3$.

Se debería cambiar el 2 por -3 para conseguir un sistema incompatible.